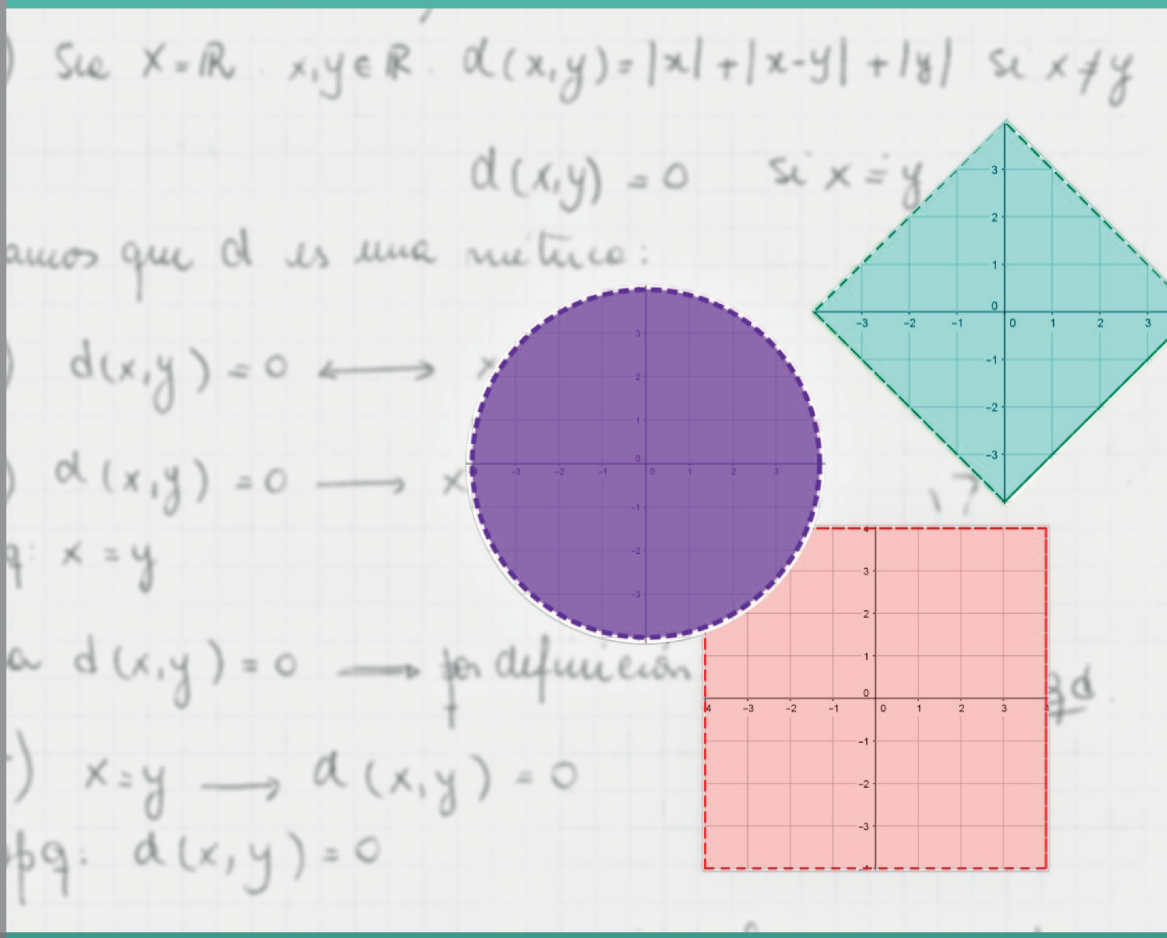
LIBROS DE TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

# Espacios Métricos



*María Eva ASCHERI*
*Marisa REID*

EdUNLPam

[2016] LIBROS DE TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

# Espacios Métricos

María Eva Ascheri
Marisa Reid

Ascheri, Maria Eva
Espacios métricos / Maria Eva Ascheri ; Marisa Elisabet Reid. - 1a ed . - Santa Rosa : Universidad Nacional de La Pampa, 2016.
176 p. ; 25 x 18 cm. - (Libros de texto para estudiantes universitarios)

ISBN 978-950-863-275-3

1. Matemática. I. Reid, Marisa Elisabet II. Título
CDD 372.7

LIBRO DE TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Espacios Métricos
María Eva Ascheri, Marisa Reid

Diciembre de 2016, Santa Rosa, La Pampa

Edición: Melina Caraballo-EdUNLPam

Diseño y Diagramación: Florencia Mirassón-Div. Diseño-UNLPam

Impreso en Argentina
ISBN 978-950-863-275-3

© Cumplido con lo que marca la ley 11.723
*La reproducción total o parcial de esta publicación, no autorizada por los editores, viola los derechos reservados. Cualquier utilización debe ser previamente autorizada.*

EdUNLPam - Año 2016
Cnel. Gil 353 PB - CP L6300DUG
SANTA ROSA - La Pampa – Argentina

Presidente:
Ana María T. Rodríguez

Director:
Rodolfo Rodríguez

Consejo Editor:
Pedro Molinero
María Esther Folco
María Silvia Di Liscia
Maria Estela Torroba / Liliana Campagno
Celia Rabotnikof / Alicia Saenz
Edith Alvarellos / Yamila Magiorano
Paula Laguarda / Marisa Elizalde
Rubén Pizarro / Jorge Luis Olivares
Mónica Boeris / Ricardo Tosso
Griselda Cistac / Raúl Álvarez

# Índice


| | | |
|---|---|---|
| **Prólogo** | | **9** |
| **Capítulo 1** | **Espacios Métricos** | **13** |
| 1.1 | Espacios métricos | 15 |
| 1.2 | Isometrías | 21 |
| 1.3 | Distancia entre un punto y un conjunto. Distancia entre conjuntos | 23 |
| 1.4 | Diámetro de un conjunto. Conjunto acotado | 25 |
| 1.5 | Conjunto totalmente acotado | 31 |
| 1.6 | Ejercicios propuestos | 37 |
| **Capítulo 2** | **Sucesiones en un Espacio Métrico** | **43** |
| 2.1 | Sucesiones en un espacio métrico | 45 |
| 2.2 | Subsucesión | 48 |
| 2.3 | Límite en el producto cartesiano | 51 |
| 2.4 | Ejercicios propuestos | 53 |
| **Capítulo 3** | **Topología de los Espacios Métricos** | **57** |
| 3.1 | Topología de los espacios métricos | 59 |
| 3.2 | Clausura de un conjunto | 59 |
| 3.3 | Puntos de acumulación y puntos aislados | 63 |
| 3.4 | Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados | 69 |
| 3.5 | Interior de un conjunto. Entorno. Frontera de un conjunto | 74 |
| 3.6 | Conjuntos densos | 79 |
| 3.7 | Conjuntos densos en sí | 80 |
| 3.8 | Conjunto perfecto | 82 |
| 3.9 | Subespacio de un espacio métrico | 83 |
| 3.10 | Ejercicios propuestos | 88 |
| **Capítulo 4** | **Continuidad en Espacios Métricos** | **95** |
| 4.1 | Aplicaciones continuas | 97 |
| 4.2 | Homeomorfismos | 101 |

| | | |
|---|---|---|
| 4.3 | Sucesiones de funciones. Convergencia uniforme | 106 |
| 4.4 | Continuidad de funciones en productos cartesianos. Funciones de varias variables | 107 |
| 4.5 | Ejercicios propuestos | 115 |
| **Capítulo 5** | **Sucesiones de Cauchy. Espacios Métricos Completos. Espacios Métricos Separables** | **121** |
| 5.1 | Sucesiones de Cauchy. Espacios métricos completos | 123 |
| 5.2 | Conjuntos ralos o nunca densos | 130 |
| 5.3 | Espacios métricos separables | 135 |
| 5.4 | Ejercicios propuestos | 141 |
| **Capítulo 6** | **Espacios Métricos Compactos** | **145** |
| 6.1 | Espacios métricos compactos | 147 |
| 6.2 | Aplicaciones continuas de espacios compactos | 160 |
| 6.3 | Producto cartesiano de espacios compactos | 163 |
| 6.4 | El conjunto de Cantor | 164 |
| 6.5 | Ejercicios propuestos | 168 |
| **Apéndice** | | **171** |
| **Bibliografía** | | **175** |

# Prólogo

El presente texto es producto de nuestra experiencia como profesoras de la asignatura Topología - Topología I que se dicta para estudiantes del Profesorado y de la Licenciatura en Matemática. Nuestra intención es aproximar un poco más la materia al estudiante de matemática a partir de un enfoque clásico.

El concepto de espacio métrico fue introducido por el matemático M.R. Fréchet en 1906 y probó que las ideas de Cantor de subconjuntos abiertos y cerrados podían extenderse de manera natural a los espacios métricos.

Actualmente, todas las obras de topología general dedican algún espacio al tratamiento de los espacios métricos, ya sea como un caso particular de los espacios topológicos o como una manera natural de introducirlos. Sin embargo, la teoría de los espacios métricos es el fundamento indispensable para un estudio serio y riguroso del Análisis Matemático y puede presentarse en forma de una hermosa teoría accesible a la intuición geométrica. La topología es una rama de la Geometría Proyectiva, una geometría no euclideana donde interesan más las cualidades de las figuras que las cantidades. Para la topología es lo mismo una rosquilla que un disco de Juan Sebastián Bach, los anteojos de Einstein que una cacerola de dos asas, ya que un objeto se puede transformar en otro por deformaciones sucesivas. La topología resuelve problemas, entre otros, tales como:

¿Con cuántos colores mínimos se ha de pintar un mapa?

¿Cómo salir de un laberinto?

¿Cómo se relacionan las caras, aristas y vértices de poliedros convexos?

¿Existen superficies unilaterales?

¿Por qué para un topólogo no existe diferencia entre una rosquilla y una taza de té?

¿El hombre y su imagen proyectada en un espejo deformante son topológicamente iguales?

En este texto, se trata de dar una introducción a la topología a través de la teoría de espacios métricos, que generalizan las propiedades de los espacios euclídeos, en los que se puede "medir" la distancia entre dos puntos. Esto es, generalizando la interpretación de los números reales como un conjunto en el que se ha definido la distancia entre sus elementos, se llega al concepto de espacios métricos, una de las nociones más importantes de la matemática moderna. La generalidad de los espacios métricos, cuyos resultados fundamentales se ven en topología, basta para la mayoría de las aplicaciones más importantes. El propósito de esta asignatura es ofrecer una presentación accesible de los conceptos fundamentales de topología y se pone gran interés en presentar la asignatura desde el punto de vista de su aplicación al Análisis y otras ramas de la matemática. La topología trabaja con conceptos más generales que el Análisis. Por consiguiente, con la topología se pueden estudiar problemas que el Análisis no puede resolver. La topología, que es un poderoso instrumento para el Análisis Funcional y para varias ramas del Análisis Clásico que, a su vez, está conectado, por sus aplicaciones, con la Matemática Aplicada e Informática y con las Ciencias Naturales, hace uso de los métodos del Álgebra y de la Teoría de Conjuntos, y del Análisis Real.

Los conocimientos previos que se requieren para asimilar el contenido de este libro son los referidos a las nociones elementales de la Teoría de Conjuntos, los conceptos básicos de numerabilidad y, en especial, las propiedades de los números reales. Para ello, y a manera de introducción al desarrollo de los contenidos de esta asignatura, se recomienda a los estudiantes la lectura y análisis del Libro de Texto para Estudiantes Universitarios titulado *Nociones Previas a la Topología Métrica* de nuestra autoría, que es también utilizado durante el tratamiento de los contenidos temáticos de Topología - Topología I.

El texto está organizado en 6 capítulos.

El capítulo 1 sirve para que el lector comprenda que los axiomas que definen los espacios métricos, que desde el punto de vista estructuralista constituyen el inicio de la teoría, son el resultado de un largo proceso de abstracción y de trabajo científico sobre las nociones intui-

tivas de distancia. En este capítulo y en los siguientes, se incluye una gran cantidad de ejemplos.

En los capítulos 2 y 3, junto con la base axiomática de los espacios métricos, se introducen el concepto de sucesiones en un espacio métrico y los elementos topológicos iniciales, además se estudian importantes propiedades con las que se ha de tratar en los siguientes capítulos.

En el capítulo 4 se estudian los conceptos de aplicaciones continuas y homeomorfismos en un espacio métrico, ligados especialmente con los espacios más específicos que se analizan en los dos últimos capítulos.

En los capítulos 5 y 6 se tratan clases especiales de espacios métricos que son de importancia particular en las aplicaciones del Análisis Matemático. Se abordan, respectivamente, las propiedades de completitud y compacidad, conceptos fundamentales que constituyen, junto con el estudio de las aplicaciones continuas entre espacios métricos, el núcleo central de Topología – Topología I. Exigen, pues, un estudio cuidadoso, porque deriva en una serie de teoremas fundamentales que constituyen los resultados más notables de la teoría.

Al final de cada capítulo se ofrece una amplia colección de ejercicios, en la que los más complicados están marcados con el símbolo *.

El apéndice contiene importantes teoremas del Análisis Matemático que se utilizan en los espacios métricos compactos.

La bibliografía citada se refiere a libros clásicos de topología general que estudian también los espacios métricos como casos particulares específicos y a textos sobre espacios métricos. Los libros recomendados para el curso están marcados con (*), siendo los textos [3], [16] y [18] los que se adaptan perfectamente al contenido de esta asignatura, aunque cualquiera de ellos será un buen libro de consulta.

# Capítulo 1

## Espacios Métricos

## 1.1. Espacios métricos

Un espacio métrico es un conjunto en el que se introduce la noción de distancia entre sus elementos. Se intenta generalizar la noción de valor absoluto en $\mathbb{R}$; esto permitirá precisar la noción de proximidad que está presente implícitamente en los conceptos fundamentales de la Topología y el Análisis. Para abstraer el concepto de distancia, se debe captar lo esencial en dicha noción, dando lugar a la siguiente definición.

Para el estudio de este tema se recomienda, previamente, la lectura del libro de Ascheri y Reid, 2008, capítulos 1 y 2.

***Definición.*** Sea $E$ un conjunto no vacío. Una función $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada pareja de elementos $x, y$ de $E$ le asocia el número real $d(x, y)$ se dice una *métrica* o una *distancia* si verifica los siguientes axiomas:

d1) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$, para todo $x, y \in E$ (Axioma de separación)

d2) $d(x, y) = d(y, x)$, cualesquiera sean $x, y \in E$ (Axioma de simetría)

d3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para cada $x, y, z \in E$ (Desigualdad triangular).

A un conjunto $E$ dotado de una distancia $d$ se lo denomina *espacio métrico* y se lo representa por $(E, d)$.

*Observaciones*

1. Si $(E, d)$ es un espacio métrico y $S$ es cualquier subconjunto no vacío de $E$, entonces $(S, d)$ es un espacio métrico conservando la misma definición de distancia.

2. Una distancia $d$ verifica también el Axioma de positividad:

$$d(x, y) \geq 0 \text{ para todo } x, y \in E$$

$$\begin{aligned} 0 = d(x, x) \leq & \qquad \text{(por d1)} \\ \leq d(x, y) + d(y, x) = & \qquad \text{(por d3)} \\ = 2\, d(x, y) & \qquad \text{(por d2)} \end{aligned}$$

Entonces $2d(x, y) \geq 0$, luego $d(x, y) \geq 0$.

3. Por inducción sobre $n$, se puede generalizar d3) del siguiente modo:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

para cualquier número natural $n$ mayor que 1.

Como puede comprobarse con los siguientes ejemplos, sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas distancias. Para distinguirlas se utilizan, con carácter universal, ciertos subíndices.

*Ejemplos*

1. Sea $E = \mathbb{R}$. Entonces, la aplicación siguiente es una distancia

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

que recibe el nombre de *métrica usual de* $\mathbb{R}$. Luego, $(\mathbb{R}, d)$ denotado por $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ es un espacio métrico.

2. Sea $E$ un conjunto no vacío. Entonces, la aplicación siguiente es una distancia

$$d_T(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases} \quad \text{para todo } x, y \text{ elementos de } E$$

que recibe el nombre de *métrica trivial* o *discreta*. Luego, $(E, d_T)$ es un espacio métrico.

3. Sea el conjunto de todas las duplas ordenadas $\vec{x} = (x_1, x_2)$ de números reales $x_1, x_2$ denotado por $\mathbb{R}^2$. Considérense $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. Entonces, la siguiente aplicación

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}\,) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

recibe el nombre de *métrica usual, natural* o *euclídea del plano*. Luego, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ es un espacio métrico.

La desigualdad triangular en este ejemplo se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwartz que se recuerda a continuación.

Dados los números reales $a_i,\ b_i$, con $i = 1, 2, \cdots, n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i\ \ b_i)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ \ \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

4. Sean $E = \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. Entonces, la siguiente aplicación

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - \ y_1| + |x_2 - \ y_2|$$

es una distancia. Luego, $(\mathbb{R}^2, d_1)$ es un espacio métrico.

En efecto,

d1) $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ si y solo si $\sum_{i=1}^{2} |x_i - \ y_i| = 0$.

Lo cual es equivalente a

$$|x_i - \ y_i| = 0 \quad \text{para} \ \ i = 1, 2$$

esto es,

$$x_i = y_i \ \ \text{para} \ \ i = 1, 2$$

o equivalentemente, $\vec{x} = \vec{y}$.

d2) $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - \ y_i| = \sum_{i=1}^{2} |y_i - \ x_i| = d_1(\,\vec{y}, \vec{x})$

d3) Para cada $i = 1, 2$

$$|x_i - \ y_i| \leq |x_i - \ z_i| + |z_i - \ y_i|$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{2} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{2} |z_i - y_i|$$

Por lo tanto,

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_1(\vec{x}, \vec{z}) + d_1(\vec{z}, \vec{y}).$$

5. Sean $E = \mathbb{R}^2$, $\vec{x}, \vec{y}$ elementos de $\mathbb{R}^2$. Entonces, la aplicación

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = máx\ \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

es una métrica. Luego, $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ es un espacio métrico.

Para verificar que es una métrica, se observa primero que las propiedades d1) y d2) de métrica se satisfacen trivialmente por la definición de valor absoluto.

Para la desigualdad triangular, se toman $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$, $\vec{z} = (z_1, z_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$.

Para un $i$ fijo, $i = 1, 2$ se tiene

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq$$
$$\leq \max_{1 \leq i \leq 2}\{|x_i - z_i|\} + \max_{1 \leq i \leq 2}\{|z_i - y_i|\} =$$
$$= d_\infty(\vec{x}, \vec{z}) + d_\infty(\vec{z}, \vec{y})$$

Por lo tanto,

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{1 \leq i \leq 2}\{|x_i - y_i|\} \leq d_\infty(\vec{x}, \vec{z}) + d_\infty(\vec{z}, \vec{y}).$$

6. Sea el conjunto de todas las $n$-uplas ordenadas $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, de números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ denotado por $\mathbb{R}^n$.

Considérense $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, entonces las siguientes aplicaciones son distancias

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(\vec{x},\vec{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

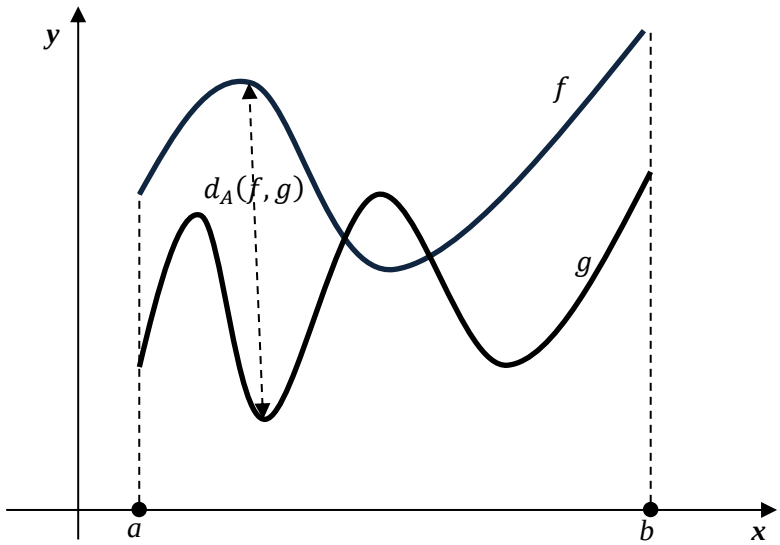
$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \max_{1\le i\le n}\{|x_i - y_i|\}.$$

Luego, $\mathbb{R}^n$ con cada una de estas distancias es un espacio métrico.

7. Sea el conjunto de las funciones continuas de variable real definidas en un intervalo $[0,1]$, denotado por $C_{\mathbb{R}}[0,1]$. Entonces, la aplicación

$$d_A(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\} \text{ para todo } f,g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$$

es una distancia. Luego, $(C_{\mathbb{R}}[0,1], d_A)$ es un espacio métrico.




En efecto, en primer lugar $d_A$ está bien definida, puesto que $|f(x) - g(x)|$ es una función continua en $[0,1]$ pues $f$ y $g$ lo son. Como el conjunto de números reales $\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$ es no vacío y acotado superiormente, entonces existe el $\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\}$.

d1) Supóngase que $d_A(f,g) = 0$ , entonces

$$\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\} = 0 \text{ para todo } f,g \in C_{\mathbb{R}}[0,1] .$$

Como para cada $x \in [0,1]$,

$$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\} = 0$$

entonces,

$$|f(x) - g(x)| = 0, \text{ para todo } x \in [0,1];$$

esto se verifica si y solo si

$$f(x) = g(x), \text{ para cada } x \in [0,1],$$

de donde, $f = g$.

Por otra parte, si $f = g$, entonces $f(x) = g(x)$ para cada $x \in [0,1]$. Luego,

$$|f(x) - g(x)| = 0, \text{ para todo } x \in [0,1],$$

esto significa que

$$\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\} = 0$$

y, por lo tanto,

$$d_A(f,g) = 0$$

d2) El axioma de simetría es trivial.

d3) Sea $h \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$, para cada $x \in [0,1]$ se tiene

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq$$

$$\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - h(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]}\{|h(x) - g(x)|\} =$$

$$= d_A(f,h) + d_A(h,g)$$

Por lo tanto,

$$\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\} \leq d_A(f,h) + d_A(h,g)$$

esto es,

$$d_A(f,g) \leq d_A(f,h) + d_A(h,g).$$

Así, $(C_{\mathbb{R}}[0,1], d_A)$ es un espacio métrico.

8. Sea $d$ una métrica sobre $E$ y se define $D(x,y) = \lambda\, d(x,y)$ para todo $x, y \in E$, donde $\lambda$ es un número real positivo cualquiera. Entonces, $(E, D)$ es un espacio métrico.

El lector puede verificar sin dificultad que $D$ es una métrica sobre $E$.

9. Sean $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{x}, \vec{y}$ elementos de $\mathbb{R}^n$ y $p$ un número real fijo mayor que 1. Entonces, la aplicación

$$d_p(\vec{x}, \vec{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^p\right]^{1/p}$$

es una distancia. Luego $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es un espacio métrico.

La demostración de la desigualdad triangular se basa en el siguiente resultado.

**Desigualdad de Hölder:** Sean $p > 1$ y $q > 1$ tales que verifican $1/p + 1/q = 1$. Entonces, cualesquiera sean $\vec{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k\, v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{1/q}$$

## 1.2. Isometrías

***Definición.*** Sean $(E, d)$ y $(E', d')$ dos espacios métricos y sea $f: E \longrightarrow E'$ una biyección tal que preserva la distancia, es decir, para cada $x, y \in E$ es

$$d(x,y) = d'(f(x), f(y)).$$

Entonces, se dice que $f$ es una *isometría*.

Dos espacios métricos $(E, d)$ y $(E', d')$ son *isométricos* si existe una isometría $f$ entre ellos.

*Observaciones*

1. Si $f: E \longrightarrow E'$ es una isometría entonces $f^{-1}: E' \longrightarrow E$ también lo es.

Como $f$ es biyectiva, entonces existe $f^{-1}: E' \longrightarrow E$ y además es biyectiva (ver Ascheri y Reid, 2008, capítulo 1). Resta probar que $f^{-1}$ preserva distancias.

Sean $y_1, y_2 \in E'$. Como $f$ es sobreyectiva existen $x_1, x_2 \in E$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Además, por ser $f$ inyectiva, $x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Luego, como $f$ es una isometría, $d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$.

Por lo tanto,

$$d'(y_1, y_2) = d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$$

De este modo, $f^{-1}$ es una isometría.

2. Sean $(E, d)$ un espacio métrico, $E'$ un subconjunto no vacío de $E$ y $f: E \longrightarrow E'$ una biyección. Entonces, si se define para todo $x, y \in E$

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

se tiene que $(E', d')$ es un espacio métrico y entonces $f$ es una isometría.

Se probará que $(E', d')$ es un espacio métrico.

d1) Supóngase que $d'(f(x), f(y)) = 0$ entonces $d(x, y) = 0$. Por ser $d$ una métrica, $x = y$, lo cual implica por definición de función que $f(x) = f(y)$.

Recíprocamente, si $f(x) = f(y)$, por ser $f$ inyectiva, $x = y$. Como $d$ es una métrica $d(x, y) = 0$, lo cual implica $d'(f(x), f(y)) = 0$.

d2) $d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y) = d(y, x) = d'\big(f(y), f(x)\big)$

d3) Como $d$ es una métrica, se satisface la desigualdad triangular

$$d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y) \leq$$

$$\leq d(x, z) + d(z, y) = d'\big(f(x), f(z)\big) + d'\big(f(z), f(y)\big)$$

Luego, $(E', d')$ es un espacio métrico.

Como $f: E \longrightarrow E'$ es una biyección entre espacios métricos que preserva distancias, entonces $f$ es una isometría y $(E, d)$ y $(E', d')$ son isométricos.

## 1.3. Distancia entre un punto y un conjunto. Distancia entre conjuntos

Se plantea ahora la posibilidad de medir distancias entre un punto y un conjunto o entre dos conjuntos, a partir de la distancia definida en un espacio métrico.

Parece que de forma intuitiva se podría pensar, por ejemplo, que la distancia entre un punto y un conjunto, sería la distancia entre tal punto y el punto del conjunto más cercano a aquél.

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico, $A$ un subconjunto no vacío de $E$ y $x_0$ un punto de $E$. Se llama *distancia de $x_0$ al subconjunto $A$*, y se denota $d(x_0, A)$, al número real

$$d(x_0, A) = \inf_{a \in A}\{d(x_0, a)\}$$

*Observaciones*

1. La definición anterior es correcta. Como $0 \leq d(x_0, a)$ para cada $a \in A$, entonces $\{d(x_0, a): a \in A\}$ es un conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente por cero; en consecuencia, existe el ínfimo del conjunto $\{d(x_0, a): a \in A\}$.

2. El ínfimo puede ser alcanzado en un punto que no pertenezca al conjunto $\{d(x_0, a): a \in A\}$.

Por ejemplo, considérese $E = \mathbb{R}$ con la métrica usual y sean $x_0 = 0$ y $A = (1, 2]$. Entonces, para cada $a \in A$

$$d(x_0, a) = d(0, a) = |0 - a| = |a| = a.$$

Para cada $a \in A$, $1 < d(x_0, a) = a \leq 2$, es decir que el conjunto $\{d(0, a): a \in A\}$ está acotado inferiormente por 1, pero no tiene elemento mínimo pues $1 \notin \{d(0, a): a \in A\}$ ya que para cada $a \in A$, $d(0, a) > 1$, es decir no existe $a \in A$ tal que $d(0, a) = 1$. Pero como 1

es la mayor de todas las cotas inferiores del conjunto $\{d(0,a): a \in A\}$, entonces $d(0,A) = 1$.

3. Si $(E,d)$ es un espacio métrico y $A \subseteq X$, entonces

$$d(x_0, A) = 0 \quad \text{para todo } x_0 \in A.$$

En efecto,

$$d(x_0, A) = \inf_{a \in A}\{d(x_0, a)\} = d(x_0, x_0) = 0$$

***Definición.*** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y sean $A$ y $B$ subconjuntos no vacíos de $E$. Se llama *distancia del subconjunto $A$ al subconjunto $B$*, y se denota $d(A,B)$, a

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b): a \in A, b \in B\}$$

*Ejemplos*

1. Sea $E = \mathbb{R}$ con la métrica usual y sean $A = [2,3)$, $B = (3,5]$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces,

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} =$$
$$= \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\} = 0$$

En efecto, sea $0 < \varepsilon < 1$ y supóngase que $d(A,B) = \varepsilon > 0$.

Resulta que $3 - \varepsilon/3 \in A$ y $3 + \varepsilon/3 \in B$ y

$$d(3 - \varepsilon/3, 3 + \varepsilon/3) = |3 - \varepsilon/3 - (3 + \varepsilon/3)| = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$$

Lo cual contradice que $\varepsilon$ es el ínfimo.

2. Si $d_T$ es la métrica discreta sobre $E$ y $A$, $B$ son subconjuntos no vacíos de $E$, por definición, se tiene

$$d_T(A,B) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \cap B \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

Entonces, con los conjuntos $A$ y $B$ de números reales dados en el ejemplo 1, se tiene que

$$d_T(A,B) = 1 \quad \text{pues } A \cap B = \emptyset.$$

Como se puede observar, estas nociones dependen de la métrica que se define.

*Observaciones*

1. $A \cap B \neq \emptyset \implies d(A,B) = 0$

En efecto, como $A \cap B \neq \emptyset$ entonces existe $a' \in A \cap B$, luego $a' \in A$ y $a' \in B$, de donde,

$$d(A,B) = \inf \{d(a,b) : a \in A, b \in B\} = d(a',a') = 0.$$

2. La recíproca no es cierta. Esto es,

$d(A,B) = 0$ no implica necesariamente que $A \cap B \neq \emptyset$.

Como lo muestra el ejemplo 1 para $(\mathbb{R}, |\quad|)$, es posible encontrar subconjuntos no vacíos $A$ y $B$ de $\mathbb{R}$, $A = [2,3)$ y $B = (3,5]$, tal que $d(A,B) = 0$.

Pero esto no implica necesariamente que $A \cap B \neq \emptyset$, ya que $A = [2,3)$ y $B = (3,5]$ no tienen puntos en común.

## 1.4. Diámetro de un conjunto. Conjunto acotado

***Definición.*** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$ . Se llama *diámetro* de $A$, y se denota $\delta(A)$, a

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} \{d(x,y)\}$$

El supremo puede ser finito o no.

***Definición.*** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y $A \subseteq E, A \neq \emptyset$. Si $\delta(A)$ es finito, se dice que $A$ es *acotado*; en caso contrario, se dice que *A no es acotado*.

*Ejemplo*

Sea $E = \mathbb{R}$ con la métrica usual y se considera el subconjunto de $E$, $A = [-1,3]$. Entonces,

$$\delta([-1,3]) = \sup_{x,y \in [-1,3]} \{|x - y|\} = 4$$

*Propiedades*

Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A, B$ subconjuntos no vacíos de $E$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades

a) $A \subseteq B \Longrightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

b) $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$

c) $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A = \{a\}$

*Demostración.* Las propiedades a) y b) se dejan como ejercicio para el lector.

Se prueba c). Supóngase que $\delta(A) = 0$. Entonces

$$\sup_{x,y \in A} \{d(x, y)\} = 0$$

Como

$$0 \leq d(x, y) \leq \sup_{x,y \in A} \{d(x, y)\} = 0 \text{ para todo } x, y \in A,$$

entonces,

$$d(x, y) = 0, \text{ para todo } x, y \in A.$$

Por ser $d$ una métrica, se tiene que

$$x = y \quad \text{cualesquiera sean } x, y \in A.$$

Luego, $A$ consta de un solo punto, digamos $a$. Esto es, $A = \{a\}$.

Recíprocamente, sean $x, y \in A$. Como $A = \{a\}$, entonces $x = y = a$, luego, $d(x, y) = 0$ para cada $x, y \in A$.

Por lo tanto,

$$\sup_{x,y \in A} \{d(x, y)\} = 0$$

de donde, $\delta(A) = 0$.

*Observaciones*

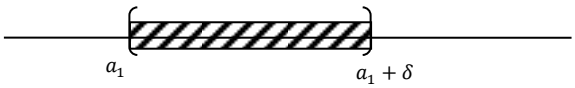
1. Se deduce de a) que si $B$ es acotado, entonces $A$ es acotado.

2. Si $A \cap B \neq \emptyset$ se deduce de b) que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

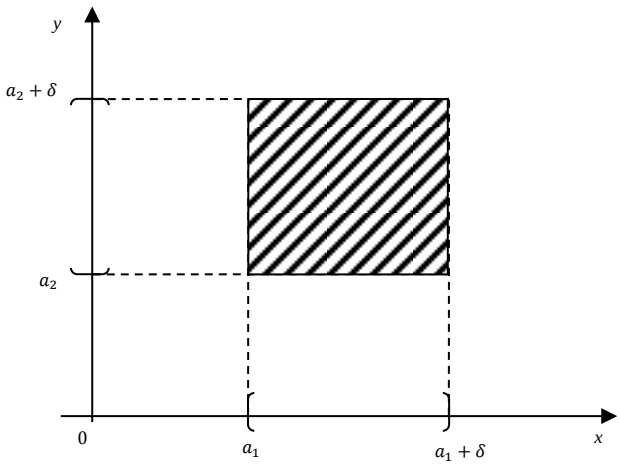
***Definición.*** En $\mathbb{R}^n$, se llama *hipercubo de lado* $\delta$ ($\delta > 0$), a todo conjunto $H$ de la forma

$$H = \prod_{i=1}^{n} [a_i\,, a_i + \delta] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq a_i + \delta, i = 1, \cdots, n\}$$

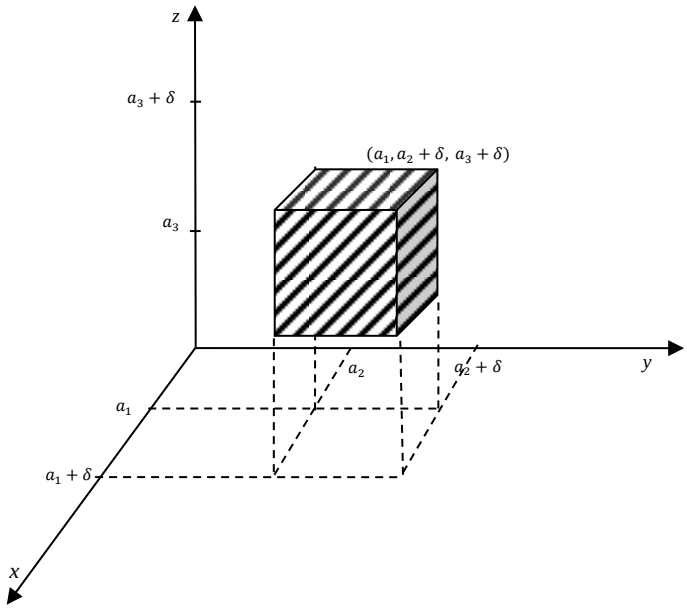
En $\mathbb{R}$:




En $\mathbb{R}^2$:




En $\mathbb{R}^3$ :




**Teorema 1.** En $(\mathbb{R}^n, d_2)$, el hipercubo $H$ es un conjunto acotado.

*Demostración.* Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $|x_i - y_i| \leq \delta$ para $i = 1, \cdots, n$; esto es,

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \leq (n\,\delta^2)^{1/2} = \sqrt{n}\,\delta$$

Es decir,

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{n}\,\delta, \text{ cualesquiera sean } \vec{x}, \vec{y} \in H,$$

por lo tanto,

$$\sup_{\vec{x},\vec{y}\in H}\{d_2(\vec{x}, \vec{y})\} \leq \sqrt{n}\,\delta,$$

esto es,

$$\delta(H) \leq \sqrt{n}\,\delta < \infty.$$

Por consiguiente, $H$ es un conjunto acotado.

### *Definiciones*

Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sean $x_0 \in E$ y $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Se llama *bola abierta con centro en* $x_0$ y *radio* $r$, y se denota $B(x_0, r)$, al conjunto

$$B(x_0, r) = \{y \in E : d(y, x_0) < r\}$$

Se llama *bola cerrada con centro en* $x_0$ y *radio* $r$, y se denota $B_C(x_0, r)$, al conjunto

$$B_c(x_0, r) = \{y \in E : d(y, x_0) \leq r\}$$

Se llama *borde de la bola con centro en* $x_0$ *y radio* $r$, y se denota $B_{or}(x_0, r)$, al conjunto

$$B_{or}(x_0, r) = \{y \in E : d(y, x_0) = r\}$$

### *Observaciones*

1. $\{x_0\} \subseteq B(x_0, r) \subseteq B_c(x_0, r)$

Evidentemente $x_0 \in B(x_0, r)$, pues $x_0 \in E$ tal que $d(x_0, x_0) = 0 < r$, de donde la primera inclusión es cierta.

Se probará la segunda inclusión.

Sea $y \in B(x_0, r)$, entonces $0 \leq d(y, x_0) < r$, que es equivalente a $d(y, x_0) \in [0, r) \subseteq [0, r]$. Luego, $d(y, x_0) \in [0, r]$, es decir, $0 \leq d(y, x_0) \leq r$, de donde, $y \in B_c(x_0, r)$.

Es inmediato a partir de esta observación que $B(x_0, r)$ y $B_c(x_0, r)$ son conjuntos no vacíos, pues $x_0 \in B(x_0, r)$ y $x_0 \in B_c(x_0, r)$ (lo cual no es siempre cierto para $B_{or}(x_0, r)$, como se verá en $(\mathbb{R}, d_T)$).

2. Para el caso de $B_c(x_0, r)$ se puede considerar $r \geq 0$.

Pues como $x_0 \in B_c(x_0, r)$ entonces $0 = d(x_0, x_0) \leq r$, de donde, $r \geq 0$.

Si $r = 0$, entonces $B_c(x_0, r) = \{x_0\}$.

En efecto, sea $y \in B_c(x_0, r)$. Entonces, $0 \leq d(y, x_0) \leq r = 0$. Luego, $d(y, x_0) = 0$ y por ser $d$ una métrica, $y = x_0$. En consecuencia, $y \in \{x_0\}$ y se concluye que $B_c(x_0, r) \subseteq \{x_0\}$. La otra inclusión es válida por la observación 1.

### *Ejemplos*

1. Sea $(\mathbb{R}, |\ \ |)$. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, entonces

$$B(x_0,r) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x_0| < r\} = \{y \in \mathbb{R} : x_0 - r < y < x_0 + r\}$$
$$= (x_0 - r, x_0 + r)$$

$$B_c(x_0,r) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x_0| \leq r\} = \{y \in \mathbb{R} : x_0 - r \leq y \leq x_0 + r\}$$
$$= [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$B_{or}(x_0,r) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x_0| = r\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R} : y = x_0 - r \text{ ó } y = x_0 + r\}$$
$$= \{x_0 - r, x_0 + r\}$$

2. Sea $(E, d_T)$. Sean $x_0 \in E$ y $r > 0$. Se tiene que

$$B(x_0,r) = \begin{cases} \{x_0\} & si\ \ r \leq 1 \\ E & si\ \ r > 1 \end{cases}$$

$$B_c(x_0,r) = \begin{cases} \{x_0\} & si\ \ r < 1 \\ E & si\ \ r \geq 1 \end{cases}$$

$$B_{or}(x_0,r) = \begin{cases} \emptyset & si\ \ r \neq 1 \\ E - \{x_0\} & si\ \ r = 1 \end{cases}$$

*Observación*

Del último ejemplo se deduce que una bola puede ser, al mismo tiempo, una bola abierta y una bola cerrada. Además, el borde de una bola puede ser un conjunto vacío.

**Lema 1.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $A$ un subconjunto no vacío de $E$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $A$ es acotado
b) Existen $x_0 \in A$ y $r > 0$ tal que $A \subseteq B_c(x_0, r)$.

*Demostración.* Supóngase que se verifica a), entonces $\delta(A) = k < \infty$ y como por hipótesis $A$ es no vacío, existe $x_0 \in A$.

Si $A = \{x_0\}$, entonces trivialmente $A \subseteq B_c(x_0, r)$ para $r > 0$.

Por consiguiente, se supone que $A$ tiene más de un elemento. Sea $z \in A, z \neq x_0$, entonces

$$d(x_0, z) \leq \delta(A) = k$$

esto es, $d(x_0, z) \leq k$, de donde, tomando $r = k$ se tiene que

$$0 < d(x_0, z) \leq r$$

esto es,

$$z \in B_c(x_0, r) \text{ con } r > 0$$

Por lo tanto, existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B_c(x_0, r)$.

Supóngase que se verifica b) y se probará a). Sean entonces $x, y \in A$. Como, por hipótesis, $A \subseteq B_c(x_0, r)$ se tiene que

$$d(x, x_0) \leq r \text{ y } d(y, x_0) \leq r$$

y por la desigualdad triangular se tiene

$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq r + r = 2r$, para todo $x, y \in A$.

de donde,

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A}\{d(x, y)\} \leq 2r,$$

o sea,

$$\delta(A) \leq 2r < \infty.$$

## 1.5. Conjuntos totalmente acotados

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $A$ un subconjunto no vacío de $E$. Se dice que $A$ es *totalmente acotado* si, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número finito de conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tales que

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ y } \delta(A_i) \leq \varepsilon, \ i = 1,2, \dots, n.$$

***Ejemplo***

Sea $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ y sea $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Se demostrará que $A$ es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$. Se particiona el $[0,1]$ en $n$ segmentos de longitud $\frac{1}{n}$.
Se designa

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right],\ A_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots,\ A_n = \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right]$$

Evidentemente, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Además, para $i = 1, 2, \dots, n$, $\delta(A_i) \leq \frac{1}{n}$. Para ello basta tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. En consecuencia, $A = [0,1]$ es totalmente acotado.

**Proposición 1.** Un subconjunto $A$ de un espacio métrico $(E, d)$ es totalmente acotado si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de $A$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_c(x_i, \varepsilon)$.

*Demostración.* Supóngase que $A$ es totalmente acotado, luego dado $\varepsilon > 0$, existe un número finito de conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tales que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ y } \delta(A_i) \leq \varepsilon,\ \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, se elige $x_i \in A_i$ y sea $x \in A$. Como, por hipótesis, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ entonces existe $i \in \{1,2, \dots, n\}$ tal que $x \in A_i$.

Como

$$\delta(A_i) \leq \varepsilon \ \text{ y } \ d(x, x_i) \leq \delta(A_i)$$

entonces

$$d(x, x_i) \leq \varepsilon \ \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, n.$$

Luego,

$$x \in B_c(x_i, \varepsilon) \ \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, n;$$

y, por lo tanto,

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} B_c(x_i, \varepsilon).$$

Así,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_c(x_i, \varepsilon);$$

esto es, se ha probado que dado $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de $A$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_c(x_i, \varepsilon)$.

Recíprocamente, sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ puntos de $A$ tal que $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_c(x_i, \varepsilon/2)$

Por lo tanto,

$$A = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_c(x_i, \varepsilon/2) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A \cap B_c(x_i, \varepsilon/2)\right)$$

Tomando

$$A_i = A \cap B_c(x_i, \varepsilon/2), i = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces, evidentemente,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

y además, para $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$\delta(A_i) \leq \delta\left(A \cap B_c(x_i, \varepsilon/2)\right) \leq \delta\left(B_c(x_i, \varepsilon/2)\right) \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ (ver nota).}$$

O sea que

$$\delta(A_i) \leq \varepsilon \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo tanto, $A$ es totalmente acotado.

***Nota.*** $\delta\left(B_c(x_0, r)\right) \leq 2r$

En efecto, sean $x, y \in B_c(x_0, r)$ entonces

$$d(x, x_0) \leq r \text{ y } d(y, x_0) \leq r.$$

Luego, usando la desigualdad triangular se tiene

$$d(x, y) \leq 2r, \text{ para todo } x, y \in B_c(x_0, r)$$

Esto es, $\delta\left(B_c(x_0, r)\right) \leq 2r$.

**Proposición 2.** Si $(E, d)$ es un espacio métrico y $A \subseteq E$ es totalmente acotado, entonces $A$ es acotado.

*Demostración.* Por hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $\delta(A_i) \leq \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots, n$.

Tómese $\varepsilon = 1$. Luego, por hipótesis

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n \text{ con } \delta(A_i) \leq 1, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se elige $x_i \in A_i$ y se llama

$$M = \max \{d(x_i, x_j), \quad i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Dados $x, y \in A$ existirán $i, j$ tales que $x \in A_i$, $y \in A_j$. Luego, usando la desigualdad triangular

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq \delta(A_i) + M + \delta(A_j) =$$

$$= 1 + M + 1 = 2 + M \quad \text{para todo } x, y \in A,$$

lo que prueba que $\delta(A)$ es finito. Es decir, $A$ es acotado.

### *Observaciones*

1. $(E, d_T)$ es un espacio métrico acotado, pues

$$\delta(E) = \sup_{x,y \in E} \{d_T(x, y)\} \leq 1$$

2. La recíproca de la proposición 2 no es cierta; que $A$ sea acotado no implica necesariamente que $A$ sea totalmente acotado.

Sea $A$ un conjunto infinito con la métrica discreta el cual es acotado, pero no es totalmente acotado, pues es posible elegir un $\varepsilon < 1$ tal que cualesquiera sea el número finito de puntos de $A$, digamos $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $A \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_c(x_i, \varepsilon)$.

Como para $\varepsilon < 1$, $B_c(x_i, \varepsilon) = \{x_i\}$. Por lo tanto, para $\varepsilon < 1$

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_c(x_i, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

y $A$ que es un conjunto infinito no podrá cubrirse con un conjunto finito de puntos del propio conjunto $A$. Luego, $A$ no es totalmente acotado.

Existe un caso donde vale la recíproca, pero antes se demostrarán las siguientes proposiciones.

**Proposición 3.** Si $A$ es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ con la métrica $d_2$, entonces existe un hipercubo $H$ tal que $A \subseteq H$.

*Demostración.* Por el lema 1 se sabe que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado, entonces existen $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A$ y $r > 0$ tal que $A \subseteq B_c(\vec{a}, r)$ .

Se designa con $H$ al hipercubo de lado $2r$ definido por

$$H = \prod_{i=1}^{n} [a_i - r\,, a_i + r] =$$

$$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : a_i - r \leq x_i \leq a_i + r, i = 1, \cdots, n\}$$

Evidentemente, $B_c(\vec{a}, r) \subseteq H$. En efecto, sea $\vec{z} \in B_C(\vec{a}, r)$. Entonces $d_2(\vec{z}, \vec{a}) \leq r$; esto es,

$$d_2(\vec{z}, \vec{a}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)^2} \leq r$$

Como

$$|z_i - a_i| \leq \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)^2} \leq r, \quad i = 1, \cdots, n;$$

resulta que

$$a_i - r \leq z_i \leq a_i + r \qquad \text{para } i = 1, \cdots, n.$$

Luego, $\vec{z} \in H$.

**Proposición 4**. En $(\mathbb{R}^n, d_2)$, todo hipercubo $H$ de lado $\delta$ es un conjunto totalmente acotado.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Se debe hallar una familia finita $\{H_\alpha\}$ tal que $H = \cup H_\alpha$ y $\delta(H_\alpha) \leq \varepsilon$.

Se considera una partición del segmento $[a_i, a_i + \delta]$ en un número $k$ suficientemente grande de segmentos de longitud $\delta/_k$ . Esto se hace en todos los ejes y se arman así todos los posibles subhipercubos que se designan $H_\alpha$. Entonces, evidentemente

$$H = \bigcup_{\alpha=1}^{k^n} H_\alpha$$

Además, para $\alpha = 1, \cdots, k^n$, $\delta(H_\alpha) \leq \sqrt{n}\,\frac{\delta}{k}$. Basta tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq \sqrt{n}\frac{\delta}{\varepsilon}$, entonces para $\alpha = 1, \cdots, k^n$, $\delta(H_\alpha) \leq \varepsilon$. Por lo tanto, $H$ es totalmente acotado.

**Proposición 5.** Si $A$ es un subconjunto no vacío de $B$ y $B$ es totalmente acotado, entonces $A$ es acotado.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existen conjuntos $B_1, B_2, \cdots, B_n$ tales que

$$B = \cup_{i=1}^{n} B_i \quad \text{y} \quad \delta(B_i) \leq \varepsilon, \ \ i = 1, 2, \dots, n$$

Como $A \subseteq B$, entonces $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_i$. Luego,

$$A = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

Se designa entonces

$$A_i = A \cap B_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\delta(A_i) = \delta(A \cap B_i) \leq \delta(B_i) \leq \varepsilon, \ \ i = 1, 2, \dots, n$$

Luego, $A$ es totalmente acotado.

**Teorema 2.** Sea $A$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, con la ca $d_2$. Entonces, son equivalentes:

**a)** $A$ es totalmente acotado

**b)** $A$ es acotado.

*Demostración.* Supóngase que $A$ es totalmente acotado. Por la proposición 2, en cualquier espacio métrico se verifica que $A$ es acotado.

Recíprocamente, supóngase que $A$ es acotado, entonces por la proposición 3, existe un hipercubo $H$ tal que $A \subseteq H$. Pero de acuerdo a la proposición 4, todo hipercubo $H$ es un conjunto totalmente acotado. Luego, por la proposición 5, $A$ es totalmente acotado.

## 1.6. Ejercicios propuestos

**1.** Para $\vec{x} = (x_1, x_2)$ , $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define

$$d_0(x, y) = min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

¿Es $d_0$ una métrica en $\mathbb{R}^2$?

**2.** Sea $f: E \to E$ una función inyectiva. Demuestre que

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

es una distancia sobre E.

**3.** Si $(E, d)$ es un espacio métrico y se consideran $x$, $y$, $x'$ e $y'$ elementos cualesquiera de $E$, pruebe que

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

**4.** Sea $E = \mathbb{R}^2$, para $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ se define $d(\vec{x}, \vec{y})$ del siguiente modo

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) =$$

$$= \begin{cases} |x_1 - y_1|, & \text{si } x_2 = y_2 \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1|, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que $(E, d)$ es un espacio métrico.

**5.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico. Sobre él se definen $d_1'$ y $d_2'$ del siguiente modo

$$d_1'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

$$d_2'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Demuestre que $d_1'$ y $d_2'$ son métricas sobre $E$.

**6.** Sea el espacio

$$E = C_{\mathbb{R}}[0,1] = \{f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$$

Demuestre que si se define

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \quad \text{para todo } f, g \in E$$

y

$$d_A(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\} \quad \text{para todo } f, g \in E$$

entonces $d$ y $d_A$ son métricas. Luego, $(E, d)$ y $(E, d_A)$ son espacios métricos.

**7.** Sean $\vec{x}$, $\vec{y}$ puntos de $\mathbb{R}^n$ y sea

$$d_2(\vec{x},\vec{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

Pruebe que $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es un espacio métrico.

***8.** Sea $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $p > 1$, donde

$$d_p(\vec{x},\vec{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^p\right]^{1/p}$$

Demuestre que $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es un espacio métrico.

***9.** Sea $S(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}: x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$. Si $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ se define

$$d(x,y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2\right]^{1/2}$$

Pruebe que $(S(\mathbb{R}), d)$ es un espacio métrico. $S(\mathbb{R})$ se llama *Espacio de Hilbert* y se lo suele notar por $l_2$.

**10.** ***Definición.*** $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice una *pseudométrica* si verifica

**1)** $d(x,x) = 0$

**2)** $d(x,y) = d(y,x)$

**3)** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Si $d$ es una pseudométrica sobre $E$ y $x, y \in E$; se define una relación binaria sobre $E$ por

$$x \approx_d y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$$

Se pide

**(a)** Pruebe " $\approx_d$ " es una relación de equivalencia sobre $E$.

**(b)** Dados $x, y, z, w \in E$ tales que $x \approx_d y$ y $z \approx_d w$, demuestre que

$$d(x,y) = d(z,w)$$

**(c)** Sean $\overline{x}$, $\overline{y} \in (E/\approx_d)$ ($\overline{x}$ = clase de $x = \{z \in E : z \approx_d x\}$).

Dados $a \in \overline{x}$ y $b \in \overline{y}$ se define

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d(a,b).$$

Pruebe que $\overline{d}$ es una métrica en $(E/\approx_d)$, que se llama *asociada a d.*

**(d)** Sea $e(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1|$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Pruebe que $e$ es una pseudométrica. ¿$(\mathbb{R}^2, e)$ es un espacio métrico? Justifique la respuesta.

**11.** Sean $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y $\varphi \in \mathbb{R}$. Sea la rotación elemental de ángulo $\varphi$, $r_\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$r_\varphi(x,y) = (x \cos(\varphi) - y \operatorname{sen}(\varphi),\ x \operatorname{sen}(\varphi) + y \cos(\varphi)).$$

Pruebe que $r_\varphi$ es una isometría entre los espacios euclídeos correspondientes.

**12.** Demuestre que toda isometría $f: (\mathbb{R}, |\ \ |) \to (\mathbb{R}, |\ \ |)$ cumple que

$$f(x) = a + x \text{ ó } f(x) = a - x.$$

**13.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y sean $x,y \in E$, $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Pruebe que

$$\left| d(x,A) - d(y,A) \right| \leq d(x,y)$$

**14.** Sean $(E,d)$ un espacio métrico, $a$ y $b$ elementos de $E$, $r$ y $s$ números reales positivos. Si $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$, demuestre que existe una bola abierta de radio $\delta > 0$ tal que

$$B(x,\delta) \subseteq B(a,r) \cap B(b,s).$$

**15.** Sea el subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$$

Calcule $d_1((2,0),A)$ y $d_\infty((2,0),A)$.

**16.** Sean el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

y

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}.$$

Calcule $d(A,B)$.

**17.** Sea $E = C_{\mathbb{R}}[0,2\pi] = \{f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$ con la métrica

$$d_A(f,g) = \sup_{x\in[0,2\pi]}\{|f(x) - g(x)|\} \text{ para todo } f,g \in E$$

y el conjunto

$$A = \{sen\, x + k : 0 \leq k \leq 1\}$$

**(a)** ¿Cuál es la distancia de la función $f(x) = x^2 + 2$ al conjunto $A$?

**(b)** Si

$$B = \{cos\, x + k : 2 \leq k \leq 3\}$$

¿Cuánto vale $d(A,B)$?

**18.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico, $A,B \subseteq E$, $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$, entonces

**(a)** $A \subseteq B \rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

**(b)** $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$.

¿Qué ocurre si $A \cap B \neq \varnothing$?

**(c)** $\delta(A) = 0 \leftrightarrow A = \{a\}$

**19.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $x_0 \in E$. Pruebe que $B(x_0,r)$; $B_c(x_0,r)$ y $B_{or}(x_0,r)$ son conjuntos acotados.

**20.** Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_T)$ y sean $A$, $B$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Determine $d_T(A,B)$.

**21.** Sean $A = [0,1)$ y $B = (1,4]$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Calcule la distancia de $A$ a $B$ usando

**(a)** la métrica usual,

**(b)** la métrica discreta.

***22.** En el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $p > 1$, pruebe que todo hipercubo $H$ es acotado.

**23.** Sean $A$ y $B$ conjuntos acotados en un espacio métrico $(E,d)$. Demuestre que $A \cup B$ es un conjunto acotado.

Deduzca que una unión finita de conjuntos acotados en $E$ es un conjunto acotado.

**24.** Sea $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ y sea $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Pruebe que $A$ es totalmente acotado.

**25.** ¿Es la unión de dos conjuntos totalmente acotados un conjunto totalmente acotado?

**26.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sean $A$ y $B$ subconjuntos no vacíos de $E$ tales que $A \subseteq B \subseteq E$. Si $B$ es totalmente acotado. Demuestre que $A$ es totalmente acotado.

**27.** Pruebe que en un espacio métrico discreto, un conjunto es totalmente acotado si y solo si es finito.

**28.** Dado $\mathbb{R}^2$ con las siguientes métricas, determine y represente gráficamente las bolas $B(\overrightarrow{x_0}, r)$, $B_c(\overrightarrow{x_0}, r)$, $B_{or}(\overrightarrow{x_0}, r)$, donde $\overrightarrow{x_0} = (0, 0)$ y $r = 1$:

**(a)** $d_2(\vec{x}, \vec{y}) = [\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2]^{1/2}$

**(b)** $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|$

**29.** Sean $(E, d)$ un espacio métrico, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $x_0 \in E$. Pruebe que

**(a)** $B(x_0, r) \subseteq B_c(x_0, r)$

**(b)** $B_{or}(x_0, r) \subseteq B_c(x_0, r)$

**(c)** $B_{or}(x_0, r) = B_c(x_0, r) - B(x_0, r)$

**(d)** $B(x_0, r) \cap B_{or}(x_0, r) = \emptyset$

**30.** Sea $f: (E, d) \to (E', d')$ una isometría. Demuestre que

**(a)** $f^{-1}$ es una isometría.

**(b)** $d$ *es* discreta $\Leftrightarrow$ $d'$ es discreta.

**(c) i)** $f\big(B(x_0, r)\big) = B(f(x_0), r)$

**ii)** $f\big(B_C(x_0, r)\big) = B_C(f(x_0), r)$

**iii)** $f\big(B_{or}(x_0, r)\big) = B_{or}(f(x_0), r)$

**(d)** $A$ es acotado en $E \Leftrightarrow f(A)$ es acotado en $E'$.

# Capítulo 2

## Sucesiones en un Espacio Métrico

## 2.1. Sucesiones en un espacio métrico

Recuérdese que una sucesión de números reales es una función $x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural $n$ le hace corresponder el número real $x(n)$, que usualmente se denota por $x_n$. Normalmente, en vez de utilizar la notación funcional, se usa la notación con subíndices: $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)$. Se designa con $x_n$ al $n$-ésimo término de la sucesión. Una sucesión de este tipo se llama *sucesión infinita de números reales*, pues el dominio es el conjunto de los números naturales y el rango son los números reales (ver Ascheri y Reid, 2008, capítulo 3).

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico arbitrario. Se llama *sucesión* de puntos de $E$ a toda función $x: \mathbb{N} \longrightarrow E$ que a cada numero natural $n \in \mathbb{N}$ le asigna un elemento $x(n) \underbrace{=}_{Not} x_n \in E$ . La sucesión se denota por $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)$.

*Ejemplos*

Sea $(\mathbb{R}, |\quad|)$. Entonces, las siguientes son sucesiones de números reales:

1) $x_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es,

$$x = (x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

2) $x_n = (-1)^n$ , para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es,

$$(x_n) = (-1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots)$$

*Observación*

La función $x$ que define una sucesión no tiene por qué ser inyectiva, es decir, puede haber $n_1 \neq n_2$ con $x_{n_1} = x_{n_2}$. Por ello es que hay que distinguir entre la sucesión $(x_n)$ y el conjunto de términos (o dominio de valores o conjunto de puntos imágenes) de la sucesión $(x_n)$.

Si bien la sucesión tiene una infinidad de términos, el dominio de valores puede ser finito. En el ejemplo 2, el dominio de valores es el conjunto finito $\{-1, 1\}$, mientras que en el ejemplo 1 es el conjunto infinito $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

***Definición.*** Se dice que la sucesión $(x_n)$ de puntos de $E$ *converge a un punto* $x_0 \in E$ si la sucesión de números reales $\big(d(x_n, x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero; es decir,

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \quad \Leftrightarrow \quad d(x_n, x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Se dice en este caso que $x_0$ es el límite de $(x_n)$ y se nota

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$$

*Observación*

$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ si $n > n_0(\varepsilon)$.

O equivalentemente,

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n > n_0(\varepsilon) \;\; x_n \in B(x_0, \varepsilon)$$

*Ejemplo*

En $(\mathbb{R}, |\;\;|)$, se considera la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, o sea, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Se debe probar que existe un número $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ siempre que $n > n_0$.

Por la propiedad arquimedeana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\varepsilon$. Luego, para todo $n > n_0$ se tiene $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Así, pues, se ha probado que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

**Proposición 1.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $a \in E$. Si $x_n = a \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

*Demostración* 1. Se debe probar que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ si $n > n_0(\varepsilon)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n = a \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \varepsilon, \text{ cualquiera sea } n \in \mathbb{N},$$

de donde,

$$d(x_n, a) < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

*Demostración* 2. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n = a \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \in B(a, \varepsilon)$, entonces se tiene que $x_n = a \in B(a, \varepsilon)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

**Proposición 2.** Toda sucesión $(x_n)$ convergente de puntos de un espacio métrico $(E, d)$ es acotada, esto es, el dominio de valores de una sucesión $(x_n)$ convergente de puntos de $E$ es un conjunto acotado.

*Demostración.* Sea $(x_n)$ una sucesión de puntos de $E$ convergente a un punto $x_0 \in E$, o sea, $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Se designa con

$$Z = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, \cdots\}$$

y se debe probar que $Z$ es acotado, esto es, que $\delta(Z) < \infty$.

Como $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0(\varepsilon)$ entonces $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. En particular, para $\varepsilon = 1$ existe $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0(1)$ se tiene que $d(x_n, x_0) < 1$, de modo que si $n > n_0(1)$, $x_n \in B(x_0, 1)$, y por lo tanto, a partir de un $n_0$ en

adelante se tienen acotados todos los términos de la sucesión $(x_n)$ $(\{x_n : n > n_0\} \subseteq B(x_0, 1) \Longrightarrow \delta(\{x_n : n > n_0\}) \leq \delta\big(B(x_0, 1)\big) \leq$ $\leq 2 \cdot 1 = 2)$

Solo resta acotar los primeros términos de la sucesión $(x_n)$ que son un número finito; se toma

$$M = \max_{1 \leq i \leq n_0} \{1, d(x_i, x_0)\}$$

Así, $(x_n)$ es acotada. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ $d(x_n, x_0) \leq M$. Luego, sean $x_i, x_j \in Z$ $(i, j \in \mathbb{N})$; usando la desigualdad triangular, resulta

$d\big(x_i, x_j\big) \leq d(x_i, x_0) + d\big(x_0, x_j\big) \leq M + M = 2M,$ para todo $x_i, x_j \in Z$ $(i, j \in \mathbb{N})$.

Por lo tanto,

$$\sup_{x_i, x_j \in Z} \big\{d\big(x_i, x_j\big)\big\} = \delta(Z) \leq 2M < \infty$$

Esto es, $\delta(Z) < \infty$.

*Observación*

En general, la recíproca de la proposición anterior no es cierta; esto es, existen sucesiones acotadas que no son convergentes. En el ejemplo 2, el dominio de valores es el conjunto finito $\{-1, 1\}$ y por lo tanto, $(x_n)$ es acotada. Pero $(x_n)$ no es convergente. Se pueden sí extraer subsucesiones convergentes. Por ejemplo,

$(-1, \cdots, -1, \cdots)$ que converge a $-1$

y

$(1, 1, \cdots, 1, \cdots)$ que converge a 1.

## 2.2. Subsucesión

Sea $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente y sea la función $x: \mathbb{N} \longrightarrow E$. Se considera la siguiente composición de funciones

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\boldsymbol{n}} \mathbb{N} \xrightarrow{\boldsymbol{x}} E$$

tal que

$$k \longrightarrow n(k) \underbrace{=}_{Not} n_k \longrightarrow x\big(n(k)\big) \underbrace{=}_{Not} x_{n_k} \in E$$

Esto es,

$$x \circ n = \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{=}_{Not} \left(x_{n_k}\right).$$

Así, si se llama

$$y = x \circ n : \mathbb{N} \longrightarrow E \text{ tal que } k \longrightarrow x_{n_k} = y_k,$$

entonces

$$y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

***Definición.*** Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos del espacio métrico $(E, d)$ y sea $n = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente, o sea, una sucesión de números naturales con la propiedad

$$k_1 < k_2 \Longrightarrow n_{k_1} < n_{k_2}$$

Entonces, $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ se denomina *subsucesión* de $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

***Ejemplos.*** En $(\mathbb{R}, |\quad|)$.

1) Sea $x_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n_k = 2k - 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$

Entonces,

$$(x \circ n)(k) = x\big(n(k)\big) = x(2k-1) = \frac{1}{2k-1}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2k-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

es la subsucesión que consiste en todos los términos impares de la sucesión $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Sea $x_n = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n_k = 2k-1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Entonces,

$(x \circ n)(k) = x\big(n(k)\big) = x(2k-1) = (-1)^{2k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Luego,

$$y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = ((-1)^{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1,-1,\cdots)$$

es una subsucesión de $(x_n) = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proposición 3**. Si el $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ y $\left(x_{n_k}\right)$ es una sucesión de $(x_n)$, entonces $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$; esto es, una subsucesión de una sucesión convergente es también convergente y converge al mismo límite.

*Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0(\varepsilon)$ entonces $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Como la función $n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente entonces es inyectiva, de donde, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Pues si no fuera así, entonces $n_{k_0} \leq n_0$, para todo $k_0 \in \mathbb{N}$; luego, el dominio de valores de $n = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sería finito y, por lo tanto, la aplicación $k \longrightarrow n_k$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ no sería inyectiva, pues en este caso se tendría que $k_1 \neq k_2$ le corresponderían $n_{k_1} = n_{k_2}$. Y, por lo tanto, no sería estrictamente creciente.

Luego, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Así, para todo $k > k_0$ es $n_k > n_{k_0} > n_0$, de donde, para todo $k > k_0$ es $n_k > n_0$ y por lo tanto, es $d\left(x_{n_k}, x_0\right) < \varepsilon$, cualquiera sea $k > k_0$. Así, $lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ .

**Proposición 4.** Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$, entonces la sucesión $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$ converge a $x_0$.

*Demostración.* Sea

$$(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots)$$

Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis,

existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1(\varepsilon)$, $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$

y

existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_2(\varepsilon)$, $y_n \in B(x_0, \varepsilon)$

Se toma

$$n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}.$$

Entonces,

$$x_n, y_n \in B(x_0, \varepsilon), \text{ para todo } n > n_0(\varepsilon)$$

es decir,

$$z_n \in B(x_0, \varepsilon) \text{ si } n > n_0(\varepsilon),$$

esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x_0.$$

## 2.3. Límite en el producto cartesiano

Sean $(X, d_1)$ e $(Y, d_2)$ dos espacios métricos y se considera el producto cartesiano de $X$ e $Y$; es decir,

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$$

Dados $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X \times Y$, se define

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{2} d_i^2(x_i, y_i)\right]^{1/2}$$

Entonces, $(X \times Y, d)$ es un espacio métrico que se llama *espacio producto cartesiano* de los espacios $X$ e $Y$.

Se deja a cargo del lector demostrar que $(X \times Y, d)$ es un espacio métrico.

Esta métrica es una generalización de la métrica euclídea de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pues en este caso sería

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \left[\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

**Teorema 1.** Sean $(X, d_1)$ e $(Y, d_2)$ dos espacios métricos y se considera el producto cartesiano $(X \times Y, d)$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que $z_n = (x_n, y_n)$ converja a $z = (x, y)$ es que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

*Demostración.* Supóngase que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n, z) < \varepsilon$ para todo $n > n_0(\varepsilon)$.

Como

$d_1(x_n, x) \leq d(z_n, z) < \varepsilon$ y $d_2(y_n, y) \leq d(z_n, z) < \varepsilon$ para todo $n > n_0(\varepsilon)$, se tiene que

$$d_1(x_n, x) < \varepsilon \text{ y } d_2(y_n, y) < \varepsilon \text{ siempre que } n > n_0(\varepsilon)$$

lo que implica que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ e } y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y.$$

Recíprocamente, por hipótesis,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ y } \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces,

existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1(\varepsilon)$ es $d_1(x_n, x) < {}^{\varepsilon}/_{\sqrt{2}}$

y

existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_2(\varepsilon)$ entonces $d_2(y_n, y) < {}^{\varepsilon}/_{\sqrt{2}}$

Luego, tómese

$$n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}.$$

Así pues, para todo $n > n_0(\varepsilon)$

$$d_1(x_n, x) < {}^{\varepsilon}/_{\sqrt{2}} \text{ y } d_2(y_n, y) < {}^{\varepsilon}/_{\sqrt{2}}$$

De donde, para $n > n_0$ se tiene

$$d(z_n, z) = \sqrt{d_1^2(x_n, x) + d_2^2(y_n, y)} < \sqrt{2\varepsilon^2/2} = \varepsilon$$

En consecuencia

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z, \text{ siendo } z_n = (x_n, y_n), z = (x, y).$$

## 2.4. Ejercicios propuestos

**1.** Demuestre que una sucesión de puntos del espacio métrico $(E, d)$ no puede converger a dos límites distintos. En otras palabras, pruebe que si el límite de una sucesión de puntos de un espacio métrico $(E, d)$ existe, entonces es único.

**2.** Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Pruebe que

**(a)** Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ en $\mathbb{R}$, entonces existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**(b)** Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, entonces existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $x_n > 0$.

Análogamente, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b < 0$, entonces existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $x_n < 0$.

**(c) i)** Sean $(x_n)$ e $(y_n)$ sucesiones convergentes. Si $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

**ii)** Sean $(x_n)$ e $(y_n)$ dos sucesiones tales que $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supóngase además, que ambas sucesiones son convergentes. ¿Es cierto que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$?

**(d)** Sea $(x_n)$ una sucesión convergente. Si $x_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq a$.

**(e)** Si $(x_n)$, $(y_n)$, $(z_n)$ son tres sucesiones que verifican

**i)** existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n > n_0$

**ii)** $\lim x_n = \lim z_n = L$.

Demuestre que $(y_n)$ también es convergente y que $\lim y_n = L$.

**3.** Sean $(x_n)$ e $(y_n)$ sucesiones de un espacio métrico $(E,d)$ tal que

$$d(x_n, y_n) < 1/n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que si $(x_n)$ converge a $x_0$, entonces $(y_n)$ también converge a $x_0$.

**4.** **(a)** Sean $(r_n)$ una sucesión de números reales positivos convergente a cero y $(x_n)$ una sucesión en $(E,d)$ tal que para cada $n$, $x_n \in B(x, r_n)$ con $x \in E$. Entonces, pruebe que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ en $E$.

**(b)** Si en a) se cambia $B(x, r_n)$ por $B_c(x, r_n)$ o por $B_{or}(x, r_n)$, ¿sigue valiendo la misma conclusión?

**5.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes a $x$ e $y$, respectivamente, en $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Pruebe que

**(a)** $x_n + y_n$ converge a $x + y$ en $\mathbb{R}$.

**(b)** $x_n \cdot y_n$ converge a $x \cdot y$ en $\mathbb{R}$.

**(c)** $\dfrac{1}{x_n}$ converge a $\dfrac{1}{x}$ en $\mathbb{R}$, siempre que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$.

***6.** Sean $(E,d)$ un espacio métrico, $A$ un subconjunto no vacío de $E$ y $d = d(x, A)$, siendo $x$ un punto de $E$. Pruebe que existe una sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que $d_n = d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} d$ en $(\mathbb{R}, |\ \ |)$.

***7.** Sean $(E,d)$ un espacio métrico, $A$ y $B$ subconjuntos no vacíos de $E$ y $d = d(A,B)$. Pruebe que existen una sucesión $(a_n) \subseteq A$ y una sucesión $(b_n) \subseteq B$ tal que si $d_n = d(a_n, b_n)$, entonces $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} d$ en $(\mathbb{R}, |\ \ |)$.

**8.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}^k$ con la métrica euclídea, donde $x_n = (a_{1_n}, a_{2_n}, \cdots, a_{k_n})$. Pruebe que $x_n \longrightarrow x$, con $x = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ si y solo si $a_{j_n} \longrightarrow a_j$ para todo índice $j$, con $1 \leq j \leq k$.

**9.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico arbitrario. Pruebe que si el dominio de valores de una sucesión $(x_n)$ de puntos de $E$ es un conjunto finito, entonces la sucesión contiene una subsucesión convergente.

**10.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Pruebe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

# Capítulo 3

# Topología de los Espacios Métricos

## 3.1. Topología de los espacios métricos

En los espacios métricos se encuentran ciertos subconjuntos que tienen propiedades especiales y que se consideran conceptos indispensables para un estudio riguroso del Análisis Matemático.

En este capítulo se presentan las definiciones, notaciones y propiedades básicas de tales nociones. Además, se introduce el concepto de subespacio de un espacio métrico.

## 3.2. Clausura de un conjunto

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. Se designa por $\overline{A}$ a un subconjunto de $E$, llamado *clausura* (o *cierre* o *adherencia*) de $A$, definido del siguiente modo:

Un punto $x \in E$ pertenece al conjunto $\overline{A}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)$ de puntos de $A$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Es decir,

$$\overline{A} = \left\{ x \in E\colon \ \text{existe } (x_n) \subseteq A \ : \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \right\}.$$

Los puntos del conjunto $\overline{A}$ se llaman *puntos clausura* de $A$ o *puntos adherentes* de $A$.

***Ejemplo***

Sea en el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\ \ |)$, el conjunto $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} \subseteq \mathbb{R}$.

Considérese la siguiente sucesión de puntos de $A$: $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Entonces, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, de donde, $0 \in \overline{A}$. Pero también se puede tomar como sucesión de puntos de $A$ aquella que sea constantemente igual a un elemento de $A$, que converge a ese elemento de $A$. Esto es, para $m \in \mathbb{N}$ fijo, sea $x_n = \frac{1}{m} \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $x_n = \frac{1}{m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{m}$, y esto se hace para cada $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, todo punto de $A$ es también punto de $\overline{A}$.

Así, $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

**Teorema 1.** En $(E, d)$, $x \in \overline{A}$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

*Demostración.* Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in \overline{A}$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)$ de puntos de $A$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Esto es, $x_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0(\varepsilon)$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. De donde, $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A$ a partir de un cierto $n_0(\varepsilon)$ y, por lo tanto, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Recíprocamente, por hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Así, se puede afirmar que para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De donde, existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queda así construida una sucesión $(x_n)$ de puntos de $A$.

Además, por la propiedad arquimedeana, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Luego, para $n > n_0$ es $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, o sea, para do $n > n_0$ es $d(x_n, x) < \varepsilon$ lo cual implica que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Por lo tanto, $x \in \overline{A}$.

*Observación*

El teorema 1 se puede enunciar del siguiente modo:

$x \notin \overline{A}$ si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

*Ejemplo*

Sea en el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\ \ |)$, el conjunto $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} \subseteq \mathbb{R}$.

Se sabe que en $(\mathbb{R}, |\ \ |)$, $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.

Sea $a \in A$. Entonces, como $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$, se tiene que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, de donde, $a \in \overline{A}$; esto es, todo punto de $A$ es un punto del conjunto $\overline{A}$.

Además, $0 \in \overline{A}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimedeana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Luego, como $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\frac{1}{n_0} \in A$, entonces $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, de donde, $0 \in \overline{A}$.

Por lo tanto, $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

## Propiedades de la clausura de un conjunto

Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sean $A, B \subseteq E$. Entonces, son válidas las siguientes propiedades:

1) $A \subseteq \overline{A}$.

Sea $x \in A$. Tomando $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que existe una sucesión de puntos de $A$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$; en consecuencia, $x \in \overline{A}$.

Sin embargo, no siempre $\overline{A} \subseteq A$. En efecto, en el ejemplo anterior se tiene que $0 \in \overline{A}$ y $0 \notin A$.

2) $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Sea $x \in \overline{A}$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)$ de puntos de $A$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Como $A \subseteq B$ entonces, existe una sucesión $(x_n) \subseteq B$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. En consecuencia, $x \in \overline{B}$. Luego, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

3) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Se supone, por absurdo, que $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$. Entonces, existe $x \in \overline{\emptyset}$, de donde, dado $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap \emptyset \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Luego, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

4) $\overline{E} = E$.

Por la propiedad 1, $E \subseteq \overline{E}$ y, por la definición de clausura, $\overline{E} \subseteq E$, de donde, $E = \overline{E}$.

5) $\overline{\{x\}} = \{x\}$, para todo $x \in E$.

Por la propiedad 1, $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$. Luego, resta probar que $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$.

Sea $p \in \overline{\{x\}}$. Entonces, existe una sucesión $(x_n) \subseteq \{x\}$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$, de donde, $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$.

Por lo tanto, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$. Luego, por unicidad del límite de una sucesión, $p = x$, de donde, $p \in \{x\}$. Por consiguiente, $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$.

6) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, por la propiedad 2, resulta $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ y $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$. Luego, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

7) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$, cualquiera sea el conjunto de índices $I$.

Para cada $j \in I$, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j$, de donde, para cada $j \in I$, por la propiedad 2, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \overline{A_j}$ y, por lo tanto, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{j\in I} \overline{A_j}$. Sustituyendo $j$ por $i$, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

8) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, por la propiedad 2, resulta $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, entonces $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Por otro lado, sea $x \in \overline{A \cup B}$. Entonces, existe una sucesión $(x_n) \subseteq A \cup B$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, de donde, existe $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \in A$ o bien

$x_{n_k} \in B$ y $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ pues $(x_{n_k})$ es una subsucesión de $(x_n)$. Entonces, en el primer caso $x \in \overline{A}$ o bien, en el segundo $x \in \overline{B}$. Luego, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

9) $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, cualquiera sea el conjunto de índices $I$.

Para cada $j \in I$, $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, entonces, por la propiedad 2, para cada $j \in I$, $\overline{A_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ y, por lo tanto, $\bigcup_{j\in I} \overline{A_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$. Sustituyendo $j$ por $i$, $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_{i.}}$

La demostración de las siguientes propiedades se dejan como ejercicio para el lector (ejercicios 2-e) y 2-f))

10) $\overline{A} - \overline{B} \subseteq \overline{A - B}$

11) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

## 3.3. Puntos de acumulación y puntos aislados

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. Se dice que $x \in E$ es un *punto de acumulación* de $A$ si existe una sucesión $(x_n)$ de términos distintos dos a dos en $A$, es decir, existe $(x_n) \subseteq A$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

***Definición.*** Sean $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. El conjunto de todos los puntos de acumulación de $A$ se llama el *derivado* de $A$, y se designa $A'$ o $A^d$.

***Definición.*** Sean $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. Un punto $x \in A$ que no es punto de acumulación de $A$ se dice *punto aislado*.

***Ejemplos***

1) Sea $(\mathbb{R}, |\quad|)$ y sea $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} \subseteq \mathbb{R}$.

El único punto de acumulación de $A$ es el punto $0$. En efecto, $0 \in A'$ pues existe $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \subseteq A$ con $\frac{1}{i} \neq \frac{1}{j}$ si $i \neq j$ tal que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Todos los puntos de $A$ son aislados, por lo tanto, $A' = \{0\}$.

2) Sea $(\mathbb{R}, d_T)$. Entonces, todos los puntos de $\mathbb{R}$ son puntos aislados.

La pregunta que surge es: ¿cuáles son las únicas sucesiones convergentes en $(\mathbb{R}, d_T)$?

Sea $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0(\varepsilon)$ es $d_T(x_n, x) < \varepsilon$. Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, se toma $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Entonces, $d_T(x_n, x) < \frac{1}{2}$ para todo $n > n_0(\varepsilon)$, es decir, $d_T(x_n, x) = 0$ para todo $n > n_0(\varepsilon)$, luego, $x_n = x$ para todo $n > n_0(\varepsilon)$.

Luego, las únicas sucesiones convergentes en $(\mathbb{R}, d_T)$ son las que tienen la cola constante. Por lo tanto, $\mathbb{R}' = \emptyset$.

**Teorema 2.** En un espacio métrico $(E, d)$, sea $A \subseteq E$.

$x \in A'$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ es $(B(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in A'$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)$ de elementos de $A$ distintos dos a dos, tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Esto es, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0(\varepsilon)$ es $x_n \in B(x, \varepsilon)$.

Como $(x_n)$ es una sucesión de puntos de $A$ distintos, es claro que entonces debe ser para todo $n > n_0(\varepsilon)$ $x_n \in B(x, \varepsilon)$ y $x_n \neq x$, es decir, para $n > n_0(\varepsilon)$ se tiene $x_n \in B(x, \varepsilon) - \{x\}$. Pues en caso contrario, habría infinitos términos de la sucesión $(x_n)$ iguales a $x$, en contradicción con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Supóngase que para un $n > n_0$, digamos $n_1$, se tiene $x_{n_1} = x$. Entonces, para todo $n > n_1$ debe ser $x_n \neq x$, pues si existiera un $n > n_1$, digamos $n_2$, para el cual $x_{n_2} = x$, entonces se tendría que $x_{n_1} = x = x_{n_2}$ con $n_2 > n_1$, en contradicción con que los términos de la sucesión $(x_n)$ son distintos dos a dos.

Luego, $(B(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Recíprocamente, sea $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por hipótesis, $(B(x, 1) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Luego, existe $x_1 \in (B(x, 1) - \{x\}) \cap A$; esto es, $x_1 \in B(x, 1)$, $x_1 \neq x$ y $x_1 \in A$.

Se toma

$$\delta_2 = min\left\{\frac{1}{2}, d(x, x_1)\right\}.$$

Como, por hipótesis, $(B(x, \delta_2) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, entonces existe $x_2 \in (B(x, \delta_2) - \{x\}) \cap A$; esto es, $x_2 \in B(x, \delta_2)$, $x_2 \neq x$ y $x_2 \in A$.

Además, $x_2 \neq x_1$. Pues si $x_2 = x_1$, entonces de la desigualdad triangular resulta

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_2) + d(x_2, x_1) < \delta_2$$

que contradice la definición de $\delta_2$.

Repitiendo este procedimiento, se toma

$$\delta_n = min\left\{\frac{1}{n}, d(x, x_{n-1})\right\}$$

y entonces

$x_n \in B(x, \delta_n)$, $x_n \neq x$, $x_n \in A$ y $x_n \neq x_k$, $k = 1, \cdots, n-1$.

Se continúa con este procedimiento quedando así construida una sucesión $(x_n)$ de puntos de $A$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $x_n \in B(x, \delta_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, por la propiedad arquimedeana, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Luego, para todo $n > n_0$ se tiene

$$d(x_n, x) < \delta_n \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

de donde, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$.

*Observación*

Sean $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. $x \in A'$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \{x\}$ y $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

La demostración es inmediata. De aquí se deduce el siguiente teorema.

**Teorema 3.** En un espacio métrico $(E, d)$, sea $A$ un subconjunto de $E$. Un punto $x \in A$ es punto aislado de $A$ si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$.

*Demostración.* Por definición, un punto $x \in A$ es punto aislado de $A$ si y solo si $x \notin A'$ y por la observación anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$.

**Teorema 4.** Sean un espacio métrico $(E, d)$ y $A \subseteq E$. Si $x$ es punto de acumulación de $A$, entonces toda bola centrada en $x$ contiene infinitos puntos de $A$.

*Demostración.* Supóngase que existe una bola centrada en $x$ y radio $r > 0$ que contiene solo un número finito de puntos de $A$ distintos de $x$.

Entonces

$$(B(x, r) - \{x\}) \cap A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

Se toma

$$\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \{d(x, x_i)\}$$

Entonces, $B(x, \varepsilon)$ será una bola centrada en $x$ que no contendrá ninguno de los puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y tampoco contiene a ningún punto de $A$ distinto de $x$, entonces

$$(B(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A = \emptyset.$$

Esta conclusión contradice que $x$ sea un punto de acumulación de $A$.

**Corolario.** Todo conjunto con un número finito de puntos no tiene puntos de acumulación.

*Observación*

Que un conjunto tenga infinitos puntos no implica necesariamente que posea puntos de acumulación.

Por ejemplo, sea $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ y se considera $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito pero carece de puntos de acumulación. Esto es, $\mathbb{N}' = \emptyset$.

## Propiedades del conjunto derivado

Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sean $A$ y $B$ subconjuntos de $E$. Entonces, son válidas las siguientes propiedades:

1) Si $A \subseteq B$ entonces $A' \subseteq B'$.

Sea $x \in A'$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)$ de términos distintos dos a dos en $A$, tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Como, por hipótesis, $A \subseteq B$ entonces existe una sucesión $(x_n) \subseteq B$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, de donde, $x \in B'$.

2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, aplicando la propiedad 1, se obtiene que $A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)'$, es decir, $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

Para la inclusión opuesta, si $x \in (A \cup B)'$ entonces existe una sucesión $(x_n) \subseteq A \cup B$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Luego, existe $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \in A$ o bien $x_{n_k} \in B$, y $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ pues $(x_{n_k})$ es una subsucesión de $(x_n)$. Entonces, en el primer caso $x \in A'$ o bien, en el segundo $x \in B'$. Luego, $x \in A' \cup B'$, por lo tanto, $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

Se concluye que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

3) $\bigcup_{i\in I} A_i' \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i)'$, cualquiera sea el conjunto de índices $I$.

Se deja la demostración como ejercicio (ejercicio 2-a))

4) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, por la propiedad 1, $(A \cap B)' \subseteq A'$ y $(A \cap B)' \subseteq B'$. Luego, $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

5) $(\bigcap_{i\in I} A_i)' \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i'$, cualquiera sea el conjunto de índices $I$.

Se deja la demostración como ejercicio (ejercicio 2-b))

6) $\overline{A} = A \cup A'$.

Si $x \in \overline{A}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, es decir, cada bola abierta de centro $x$ interseca a $A$ en un punto, digamos $y$.

Puede suceder que $y = x$, entonces como $x \in A$, sigue que $x \in A \cup A'$.

O bien que $y \neq x$, entonces $y \in (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A$ para cualquier $\varepsilon > 0$ y en este caso,$(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Luego, $x \in A'$ pero entonces $x \in A \cup A'$.

En todo caso, $x \in A \cup A'$.

Nótese que también se verifica la inclusión opuesta. En efecto, supóngase que $x \in A \cup A'$, entonces $x \in A$ o $x \in A'$.

Si $x \in A$, es claro que $x \in \overline{A}$.

Si $x \in A'$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ $(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Pero como cualquiera sea $\varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon) - \{x\} \subseteq B(x,\varepsilon)$, se tiene que $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ y se puede concluir que $x \in \overline{A}$.

Como se tienen ambas inclusiones, se sigue que $\overline{A} = A \cup A'$.

7) $A' \subseteq \overline{A}$.

Consecuencia inmediata de la propiedad 6.

8) $\overline{A'} = A'$.

Por propiedad de clausura se sabe que $A' \subseteq \overline{A'}$. Luego, solo resta probar que $\overline{A'} \subseteq A'$.

Sea $x \in \overline{A'}$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon) \cap A' \neq \emptyset$, de donde para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in B(x,\varepsilon) \cap A'$, es decir, $y \in B(x,\varepsilon)$ y $y \in A'$.

Si $y = x$ entonces $x \in A'$.

Supóngase entonces que $y \neq x$. Como $y \in A'$ entonces, por la propiedad 7, $y \in \overline{A}$. Luego, para todo $\delta > 0$ $B(y,\delta) \cap A \neq \emptyset$. Como esta afirmación es válida para todo $\delta > 0$, en particular es cierta para

$$\delta = min\{d(x,y),\ \varepsilon - d(x,y)\}.$$

De donde $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$ y $x \notin B(y,\delta)$ (ver nota).

Por lo tanto, $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon) - \{x\}$, entonces $(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$ . En definitiva $x \in A'$.

***Nota.*** Si $\delta = min\{d(x,y),\ \varepsilon - d(x,y)\}$ entonces $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$

Sea $z \in B(y,\delta)$. Entonces $d(z,y) < \delta$. Luego, usando la desigualdad triangular

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) \leq \varepsilon - d(x,y) + d(y,x) =$$
$$= \varepsilon$$

de donde resulta que $z \in B(x,\varepsilon)$. Por lo tanto, $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$.

Además, de la definición de $\delta$ resulta que $x \notin B(y,\delta)$.

9) $A'' \subseteq A'$.

Por la propiedad 7, $A'' \subseteq \overline{A'}$ y, usando la propiedad 8, resulta que $A'' \subseteq A'$.

A continuación, se estudiarán diversos tipos de conjuntos comúnmente denominados *subconjuntos notables* en los espacios métricos.

## 3.4. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

***Definición.*** Un conjunto $A \subseteq E$ se dice *cerrado en un espacio métrico* $(E,d)$ o simplemente *cerrado* si satisface que $A = \overline{A}$.

*Observaciones*

1. Teniendo en cuenta que siempre se verifica que $A \subseteq \overline{A}$, la definición anterior puede reformularse como sigue:

Sea $(E,d)$ un espacio métrico. $A \subseteq E$ es un cerrado en $E$ si y solo si $\overline{A} \subseteq A$.

2. También es posible caracterizar a los cerrados por medio de sus puntos clausura:

Un conjunto $A \subseteq E$ es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos clausura.

3. Otra caracterización muy interesante es:

Un conjunto $A \subseteq E$ es cerrado si y solo si cualquier sucesión convergente de puntos de $A$ tiene su límite en $A$.

***Definición.*** Sea $(E,d)$ un espacio métrico. Un conjunto $A \subseteq E$ se dice *abierto en* $E$ o *simplemente abierto* si su complemento, $\complement_E A$, es un

conjunto cerrado, es decir, si $\complement_E A = \overline{\complement_E A}$ y esto es equivalente a decir que $A = \complement_E \overline{\complement_E A} \underbrace{=}_{Notación} \complement\overline{\complement A}$.

*Ejemplos*

1) En un espacio métrico $(E, d)$ se verifica que:

- $\emptyset$ y $E$ son conjuntos cerrados.

En efecto, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{E} = E$.

- $\emptyset$ y $E$ son conjuntos abiertos.

En efecto, $\complement\emptyset = E$ que es un cerrado y $\complement E = \emptyset$ que es un cerrado.

2) En cualquier espacio métrico $(E, d)$, para todo $A \subseteq E$, $\overline{A}$ y $A'$ son conjuntos cerrados.

En efecto, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ y $\overline{A'} = A'$.

3) En $(\mathbb{R}, |\quad|)$, todo intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto cerrado.

Se prueba que $\overline{[a, b]} \subseteq [a, b]$.

Supóngase que $x \notin [a, b]$, entonces $x < a$ ó $x > b$.

Se considera el primer caso $x < a$. Se toma $\varepsilon = \frac{|a-x|}{2}$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [a, b] = \emptyset$, de donde, $x \notin \overline{[a, b]}$.

De manera análoga se trata el caso $x > b$.

4) En $(\mathbb{R}, |\quad|)$, todo intervalo abierto $(a, b)$ es un conjunto abierto.

Se muestra que el complemento del intervalo $(a, b)$ es un cerrado, es decir que

$$\overline{\complement(a, b)} \subseteq \complement(a, b).$$

Supóngase que $x \notin \complement(a, b)$, entonces $x \in (a, b)$. Si se toma

$$\varepsilon = min\left\{\frac{|x - a|}{2}, \frac{|b - x|}{2}\right\}$$

resulta que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b).$$

Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \complement(a,b) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $x \notin \overline{\complement(a,b)}$.

**Teorema 5.** La unión de dos conjuntos cerrados en un espacio métrico $(E,d)$ es un conjunto cerrado.

*Demostración.* Sean $A$ y $B$ conjuntos cerrados en $(E,d)$. Entonces, $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$. Como, por la propiedad 8 de clausura,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

entonces $\overline{A \cup B} = A \cup B$, de donde, $A \cup B$ es un conjunto cerrado.

**Corolario.** La unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

El lector puede demostrarlo por inducción respecto al número de conjuntos cerrados $n$ aplicando el resultado que se acaba de obtener para $n = 2$.

*Observación*

La unión arbitraria de conjuntos cerrados no es, necesariamente, un conjunto cerrado. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, |\quad|)$ se considera la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$, $F_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Cada $F_n$, $n \in \mathbb{N}$, es un conjunto cerrado, de donde $F_n = \overline{F_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Por otro lado, como

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

y

$$0 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

se concluye que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ no es un conjunto cerrado.

**Teorema 6.** En cualquier espacio métrico, la intersección de un número arbitrario de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

*Demostración.* Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia cualquiera de subconjuntos cerrados de $(E, d)$.

Para cada $i \in I$, $F_i = \overline{F_i}$ y, usando la propiedad 7 de clausura, resulta que

$$\overline{\bigcap_{i\in I} F_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{F_i} = \bigcap_{i\in I} F_i$$

y como la inclusión opuesta siempre se verifica, se concluye que $\overline{\bigcap_{i\in I} F_i} = \bigcap_{i\in I} F_i$.

**Teorema 7.** En un espacio métrico $(E, d)$, la unión de un número arbitrario de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

*Demostración.* Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos de $(E, d)$. Por hipótesis, para cada $i \in I$, $\complement A_i$ es un cerrado. Por las leyes de De Morgan (ver Ascheri y Reid, 2008, capítulo 1), se tiene que $\complement(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \complement A_i$, siendo este último un conjunto cerrado según se demostró en el teorema 6, ya que cada $\complement A_i$ es un conjunto cerrado. Luego, $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto pues su complemento es cerrado.

**Teorema 8.** En un espacio métrico $(E, d)$, la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

*Demostración.* Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos abiertos de $(E, d)$. Para cada $i = 1,2, \cdots, n$, $\complement A_i$ es un conjunto cerrado por ser cada $A_i$ un conjunto abierto. Como

$$\complement\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i$$

entonces, por el corolario del teorema 5, $\bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i$ es cerrado, de donde, $\complement(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$ es cerrado y, por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.

*Observación*

La intersección de un número infinito de conjuntos abiertos no siempre es un conjunto abierto.

Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ se consideran los siguientes subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, $G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \text{ (ver nota).}$$

De aquí se deduce que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

***Nota***

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

Supóngase que $x \notin \{0\}$, entonces $x \neq 0$, de donde, $|x| > 0$. Por la propiedad arquimedeana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < |x|$, de donde, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n_0}$ ó $x < -\frac{1}{n_0}$ y, por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right)$, pero esto significa que $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. De este modo, se ha probado que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \{0\}.$$

Recíprocamente, sea $x \in \{0\}$, entonces $x = 0$. De donde, $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Por lo tanto,

$$\{0\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

*Observación*

Los teoremas dados anteriormente son un ejemplo del llamado *Principio de dualidad en topología*: “A todo teorema sobre conjuntos

cerrados le corresponde, en virtud de las leyes de De Morgan, un teorema sobre conjuntos abiertos".

## 3.5. Interior de un conjunto. Entorno. Frontera de un conjunto

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea un conjunto $A \subseteq E$. Se llama *interior del conjunto* $A$ y se lo nota $Int(A)$ o $\overset{o}{A}$, al conjunto

$$\overset{o}{A} = \complement(\overline{\complement A})$$

*Observaciones*

1. En un espacio métrico $(E, d)$, sea $A \subseteq E$. El interior del conjunto $A$ es un conjunto abierto.

En efecto, por definición de interior, $\complement \overset{o}{A} = \overline{\complement A}$ y $\overline{\complement A}$ es un conjunto cerrado, de donde, $\overset{o}{A}$ es un conjunto abierto.

2. En un espacio métrico $(E, d)$, para todo conjunto $A \subseteq E$ se satisface que $\overset{o}{A} \subseteq A$.

En efecto, como

$$\complement A \subseteq \overline{\complement A}$$

entonces $\complement\overline{\complement A} \subseteq \complement\complement A = A$. Luego, $\overset{o}{A} \subseteq A$.

3. Sean $(E, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq E$. Analizando la definición de interior de un conjunto $A$ se puede concluir que:

Sea $x \in A$, $x \in \overset{o}{A}$ si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

En efecto, supóngase que $x \in \overset{o}{A}$ , entonces $x \notin \overline{\complement A}$, que es equivalente a decir que

$$B(x, \varepsilon) \cap \complement A = \emptyset \text{ para algún } \varepsilon > 0.$$

Y esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

4. Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq E$. Los puntos que pertenecen al interior del conjunto $A$ se llaman *puntos interiores del conjunto $A$*.

5. En un espacio métrico $(E, d)$, un conjunto $A \subseteq E$ es abierto si y solo si $A = \overset{o}{A}$, o equivalentemente, para todo $a \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subseteq A$.

$A$ es abierto si y solo si $\complement A$ es cerrado, es decir, $\complement A = \overline{\complement A}$, que es equivalente a decir que $A = \complement(\overline{\complement A}) = \overset{o}{A}$.

Esto que se acaba de demostrar significa que un conjunto $A$ es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores.

Teniendo entonces presente que siempre se verifica $\overset{o}{A} \subseteq A$, se puede reformular 5 como sigue:

$$A \text{ es abierto si y solo si } A \subseteq \overset{o}{A}.$$

Luego, $A$ es abierto si y solo si para todo $a \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subseteq A$.

6. Para todo subconjunto $A$ de un espacio métrico $(E, d)$ se verifica que $\overset{o}{A} = \overset{o}{\overset{o}{A}}$.

Por la observación 1, $\overset{o}{A}$ es un conjunto abierto y teniendo en cuenta la observación 5, se puede afirmar que $\overset{o}{A} = \overset{o}{\overset{o}{A}}$.

### *Ejemplos*

1) En $(\mathbb{R}, |\quad|)$, $(a, b) = [a, b]^\circ$

Sea $x \in (a, b)$. Como $(a, b)$ es un abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b) \subseteq [a, b]$$

entonces, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq [a, b]$ para algún $\varepsilon > 0$, de donde, $x \in [a, b]^\circ$. Por lo tanto, $(a, b) \subseteq [a, b]^\circ$.

Recíprocamente, sea $x \in [a, b]^\circ$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq [a,b],$$

de donde, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$a \leq x-\varepsilon < x < x+\varepsilon \leq b.$$

Luego, $x \in (a,b)$ y se puede concluir que $[a,b]^\circ \subseteq (a,b)$.

2) Sea $(\mathbb{R}, |\quad|)$ y sea $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} \subseteq \mathbb{R}$.

Sea $a \in A$. Para todo $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimedeana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{2}}{n_0} < \varepsilon$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < a + \frac{\sqrt{2}}{n_0} < a + \varepsilon$, por consiguiente, cualquiera sea $\varepsilon > 0$, $a + \frac{\sqrt{2}}{n_0} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $a + \frac{\sqrt{2}}{n_0} \notin A$. Por lo tanto, $a \notin \overset{o}{A}$. Y como esto es válido cualquiera sea $a \in A$, se concluye que $\overset{o}{A} = \emptyset$.

***Definición.*** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y sea $x$ un punto de $E$. Un conjunto $A \subseteq E$ es *entorno del punto* $x$ si $x$ es un punto interior a $A$, es decir $x \in \overset{o}{A}$.

Con mayor generalidad:

***Definición.*** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y sea $B$ un subconjunto de $E$. Se dice que un conjunto $A \subseteq E$ es un *entorno del conjunto* $B$ si $B \subseteq \overset{o}{A}$.

*Observaciones*

1. En todo espacio métrico $(E,d)$, cualquier entorno de $x \in E$ contiene un entorno abierto del punto $x$; precisamente su interior.

Sea un conjunto $A \subseteq E$ tal que $A$ es entorno del punto $x$. Entonces $x \in \overset{o}{A}$ y como $\overset{o}{A} = \overset{o}{\overset{o}{A}}$, entonces $x \in \overset{o}{\overset{o}{A}}$. Por lo tanto, $\overset{o}{A}$ es entorno del punto $x$, $\overset{o}{A}$ es un conjunto abierto y $\overset{o}{A} \subseteq A$.

2. Sea $(E, d)$ un espacio métrico. $A$ es un conjunto abierto si y solo si $A$ es entorno de cada uno de sus puntos.

$A$ es un conjunto abierto si solo si $A = \overset{o}{A}$, lo que equivale a decir que todo punto de $A$ es punto de $\overset{o}{A}$, que es lo mismo que decir que $A$ es entorno de cada uno de sus puntos.

*Ejemplo*

En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, como $[-2,0]^\circ = (-2,0)$ y $-1 \in (-2,0)$, entonces $[-2,0]$ es entorno de $-1$.

Por otro lado, como $[-1,1]^\circ = (-1,1)$ y $1 \notin (-1,1)$, se puede afirmar que $[-1,1]$ no es entorno de $-1$.

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq E$ un subconjunto. Se llama *frontera del conjunto* $A$, y se lo representa $Fr(A)$, al conjunto

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement A}.$$

*Observaciones*

1. $Fr(A)$ es un conjunto cerrado por ser intersección de dos conjuntos cerrados.

2. Como consecuencia de la definición, el siguiente resultado es obvio:

Si $(E, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq E$, entonces $x \in Fr(A)$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap \complement A \neq \emptyset$.

Lo que equivale a decir que un punto $x \in Fr(A)$ si y solo si toda bola abierta con centro en $x$ contiene puntos de $A$ y de su complemento.

3. Los puntos que pertenecen al conjunto $Fr(A)$ se denominan *puntos frontera del conjunto* $A$. Un punto frontera de un conjunto puede pertenecer o no a éste.

En el siguiente ejemplo se ilustran los últimos conceptos y resultados.

*Ejemplo*

En $(\mathbb{R}, |\quad|)$, $Fr((a,b)) = \{a,b\}$.

En efecto, por definición, se sabe que

$$Fr((a,b)) = \overline{(a,b)} \cap \overline{\complement(a,b)}\ .$$

Se puede ver que si $x \notin \{a,b\}$ entonces $x \notin \overline{(a,b)} \cap \overline{\complement(a,b)}$ .
Supóngase que $x \notin \{a,b\}$. Puede ocurrir que

$$x \in (a,b) \text{ ó } x \in \complement[a,b].$$

Si $x \in (a,b)$, como $(a,b)$ es un conjunto abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b).$$

Pero entonces

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \complement(a,b) = \emptyset \text{ para algún } \varepsilon > 0.$$

Luego, $x \notin \overline{\complement(a,b)}$ .
En el segundo caso, si $x \in \complement[a,b]$ entonces $x \notin [a,b]$.
Como $(a,b) \subseteq [a,b]$, por propiedad de la clausura, $\overline{(a,b)} \subseteq \overline{[a,b]} = [a,b]$. Luego, como $x \notin [a,b]$ entonces $x \notin \overline{(a,b)}$.
Y por lo tanto, resulta que $x \notin \overline{(a,b)} \cap \overline{\complement(a,b)}$. Obteniendo de este modo la inclusión

$$Fr((a,b)) \subseteq \{a,b\}.$$

Por otra parte, resta probar que $\{a,b\} \subseteq \overline{(a,b)} \cap \overline{\complement(a,b)}$,
Sea $\varepsilon > 0$ y se toma

$$x_1 = a + \delta, \text{ con } \delta = min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-a}{2}\right\}.$$

Entonces, $x_1 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ y $x_1 \in (a,b)$. En efecto,

$$a < a + \delta = x_1 \leq a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b. \text{ Luego, } x_1 \in (a,b).$$

Además,

$$|x_1 - a| = |a + \delta - a| = \delta \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

por consiguiente,

$$x_1 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $x_1 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (a,b)$.

Del mismo modo, tomando $x_2 = a - \delta$, con $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ puede probarse que

$$x_2 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \complement(a,b) \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

De esto se deduce que dado $\varepsilon > 0$

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \complement(a,b) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $a \in \overline{(a,b)}$ y $a \in \overline{\complement(a,b)}$, es decir, $a \in Fr((a,b))$.

Análogamente, se comprueba que $b \in Fr((a,b))$.

## 3.6. Conjuntos densos

***Definición.*** En un espacio métrico $(E,d)$, un conjunto $A \subseteq E$ se dice *denso en* $E$ si $\overline{A} = E$.

***Observación.*** Como cualquiera sea $A$ subconjunto en un espacio métrico $(E,d)$ es siempre válido que $\overline{A} \subseteq E$, entonces también se dice que $A$ *es denso en* $E$ si $E \subseteq \overline{A}$.

Por extensión de la definición anterior se tiene:

***Definición.*** En un espacio métrico$(E,d)$, un conjunto $A \subseteq E$ se dice *denso con respecto a un conjunto* $B$ (o también, un conjunto $A$ *es denso en un conjunto* $B$) si $B \subseteq \overline{A}$.

**Lema 1.** En un espacio métrico $(E,d)$, si $A$ es un subconjunto de $E$ que es denso en $E$ y $A \subseteq B$, entonces $B$ es denso en $E$.

*Demostración.* Por hipótesis, $\overline{A} = E$ y $A \subseteq B$, de donde, por propiedad de la clausura, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ entonces $E \subseteq \overline{B}$. Por lo tanto, $B$ es denso en $E$.

Se caracterizan los conjuntos densos en términos de bolas: La idea de que un subconjunto denso *rellena* a $E$ se pone de manifiesto en el resultado siguiente.

**Teorema 9.** Un subconjunto $A$ de un espacio métrico $(E, d)$ es denso en $E$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in E$.

*Demostración.* Supóngase que $A \subseteq E$ es denso, es decir, $\overline{A} = E$. Esto significa que todo punto de $E$ es punto clausura de $A$. Esto es equivalente a decir que para cada $x \in E$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$.

*Ejemplos*

1) En el espacio métrico $(E, d)$, el conjunto $E$ es denso trivialmente. Es el único conjunto cerrado y denso, ya que si $A$ fuese denso y cerrado, entonces $A = \overline{A} = E$.

Pero existen también subconjuntos propios que son densos. El siguiente ejemplo comprueba este hecho.

2) Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Entonces, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, es decir $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Nótese que $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$.

Sean $r \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Se sabe que en $(\mathbb{R}, |\ |)$, $B(r, \varepsilon) = (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ y como entre dos números reales existe siempre un número racional, entonces existirá $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Luego $q \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ $B(r, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Esto que significa que $r \in \overline{\mathbb{Q}}$.

## 3.7. Conjuntos densos en sí

*Definición.* Se dice que un subconjunto $A$ de un espacio métrico $(E, d)$ es *denso en sí* si no tiene puntos aislados, es decir, si todos sus puntos son de acumulación. Esto es, si $A \subseteq A'$.

*Ejemplos*

Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual.

1) Un intervalo cerrado o un intervalo abierto son conjuntos densos en sí porque todos sus puntos son de acumulación.

2) Como todos los puntos del conjunto $\mathbb{R}$ son puntos de acumulación, $\mathbb{R}$ es denso en sí.

3) El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en sí, pues todos sus puntos son de acumulación.

4) Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son conjuntos densos en sí, porque, ninguno de sus puntos son de acumulación.

**Teorema 10.** En un espacio métrico $(E, d)$, la clausura de un conjunto denso en sí es un conjunto denso en sí.

*Demostración.* Sea $A$ un conjunto denso en sí. Por definición, $A \subseteq A'$. Por propiedades de la clausura y del derivado

$$\overline{A} \subseteq \overline{A'} = A'$$

y por propiedad del conjunto derivado

$$A' \subseteq A''.$$

Como se verifica que $A' \subseteq \overline{A}$, entonces $A'' \subseteq \left(\overline{A}\right)'$. Sigue que

$$\overline{A} \subseteq \left(\overline{A}\right)'.$$

**Teorema 11.** La unión de un número arbitrario de conjuntos densos en sí es un conjunto denso en sí.

*Demostración.* Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de conjuntos densos en sí; esto es, $A_i \subseteq A_i'$ para todo $i \in I$.

De donde, por propiedad del conjunto derivado,

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i' \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)'$$

y se obtiene el resultado deseado.

## 3.8. Conjunto perfecto

*Definición.* Un conjunto $A$ de un espacio métrico $(E, d)$ se dice *perfecto* si $A$ es un conjunto denso en sí y cerrado.

*Observación*

$A$ es un conjunto perfecto si y solo si $A = A'$.

En efecto, supóngase que $A$ es un conjunto perfecto. Entonces, $A = \overline{A}$ y $A \subseteq A'$.

Como $A' \subseteq \overline{A} = A$, entonces $A' \subseteq A$. De donde, usando la hipótesis, sigue que $A = A'$.

Por otro lado, si $A = A'$, en particular, $A \subseteq A'$, o sea, $A$ es denso en sí. Además, como $\overline{A} = A \cup A' = A \cup A = A$, entonces $A$ es cerrado.

Por lo tanto, $A$ es un conjunto perfecto.

**Teorema 12.** Todo espacio métrico $E$ puede expresarse como la unión de un conjunto perfecto y un conjunto que no contiene ningún subconjunto no vacío denso en sí.

*Demostración.* Se designa con $\mathcal{D} = \{D \subseteq E : D \text{ es denso en sí}\}$.

Se llama

$$\mathcal{C} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$$

Por el teorema 11, $\mathcal{C}$ es denso en sí y, por el teorema 10, $\overline{\mathcal{C}}$ es denso en sí.

Como $\mathcal{C}$ es la reunión de todos los densos en sí de $E$, $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$, de donde, $\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado. Luego, $\mathcal{C}$ es un conjunto perfecto.

Ahora bien, por ser disjunto con $\mathcal{C}$, $E - \mathcal{C}$ no contiene ningún subconjunto no vacío denso en sí.

Además, $E = \mathcal{C} \cup (E - \mathcal{C})$.

*Observación*

El conjunto $\emptyset$ que es subconjunto de cualquier conjunto es tal que $\emptyset' = \emptyset$, de donde, $\emptyset$ es denso en sí. De aquí que en el enunciado del teorema 12 debe decir “ningún subconjunto no vacío denso en sí”.

## 3.9. Subespacio de un espacio métrico

Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $A$ un subconjunto no vacío cualquiera de $E$. En este caso, el conjunto $A$ con la misma función $d$ pero definida para $x, y \in A$ también representa un espacio métrico que se denomina *subespacio* $A$ del espacio $(E, d)$.

Esto es, la restricción a $A \times A$ de la aplicación $(x, y) \longrightarrow d(x, y)$ es evidentemente una distancia en $A$ que se dice inducida en $A$ por la distancia $d$ en $E$, que se denota por $d_A$. Se dice también que el par $(A, d_A)$ es un *subespacio* de $(E, d)$.

Es importante distinguir entre los espacios métricos $(E, d)$ y $(A, d_A)$.

Se estudiará a continuación cuál es el comportamiento de los subespacios con respecto a las nociones de adherencia, derivado, interior y frontera. Se las puede estudiar tanto en $A$ como en $E$.

Se tratará de dar respuesta a la pregunta: ¿cuál es la relación entre ambas?

*Definiciones*

1) Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $A$ un subconjunto no vacío cualquiera de $E$.

Para cada conjunto $B \subseteq A \subseteq E$, se puede definir la *clausura* (o *cierre*) *de $B$ en $A$*, llamada también *clausura relativa* (o *cierre relativo*) *del conjunto $B$ en $A$*, de la siguiente forma:

Un punto $x$ está en la clausura relativa del conjunto $B$ en $A$ si $x \in A$ y $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, en donde $(x_n) \subseteq B$. Esto significa que $x \in \overline{B} \cap A$. El conjunto $\overline{B} \cap A$ es, por lo tanto, la *clausura relativa del conjunto $B$ en $A$* y la notaremos $\overline{B}_A$; esto es,

$$\overline{B}_A = \overline{B} \cap A.$$

2) Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $A$ un subconjunto no vacío cualquiera de $E$.

Para cada conjunto $B \subseteq A \subseteq E$, se puede definir el *derivado de $B$ en el espacio $A$*, llamado también *derivado relativo de $B$ en $A$*, de la siguiente forma:

Un punto $x$ está en el derivado relativo del conjunto $B$ en $A$ si $x \in A$ y $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, en donde $(x_n) \subseteq B$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Esto significa que $x \in B^d \cap A$. El conjunto $B^d \cap A$ es, por lo tanto, el *derivado relativo del conjunto $B$ en $A$* y lo notaremos $B_A^d$; esto es,

$$B_A^d = B^d \cap A.$$

3) Se llama *interior relativo del conjunto $B$ en $A$*, y se denota con $\overset{o}{B}_A$ o $Int_A(B)$, al conjunto

$$\overset{o}{B}_A = \complement_A\left(\overline{\complement_A B}\right) = A - \left(\overline{A - B}\right).$$

*Observación*

$$A \cap \overset{o}{B} \subseteq \overset{o}{B}_A$$

Como

$$A - B \subseteq E - B,$$

por propiedad de clausura,

$$\overline{A - B} \subseteq \overline{E - B}$$

Luego,

$$E - \left(\overline{E - B}\right) \subseteq E - \left(\overline{A - B}\right)$$

De acuerdo con la definición de interior

$$\overset{o}{B} \subseteq E - \left(\overline{A - B}\right)$$

Entonces,

$$A \cap \overset{o}{B} \subseteq A \cap \left[E - \left(\overline{A - B}\right)\right] = A - \left(\overline{A - B}\right) = \overset{o}{B}_A$$

La inclusión anterior puede ser estricta. En efecto, se considera en $\mathbb{R}$ con la métrica usual los conjuntos $B = [1,2], A = [1,3]$.

Entonces, $\overset{o}{B} = (1,2)$. Luego, $A \cap \overset{o}{B} = (1,2)$.

Por otro lado,

$$A - B = (2,3]$$

así

$$A - \left(\overline{A - B}\right) = [1,2) = \overset{o}{B}_A \ .$$

Luego, $A \cap \overset{o}{B} = (1,2) \subset [1,2) = \overset{o}{B}_A$ .

4) Se llama *frontera relativa de $B$ en $A$*, y lo notaremos $Fr_A(B)$, al conjunto

$$Fr_A(B) = \overline{B} \cap A \cap \overline{\complement_A B} = \overline{B} \cap A \cap \overline{A - B}$$

*Observación*

Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq E$. Considérese el subespacio métrico $(A, d_A)$ y sea $B \subseteq A \subseteq E$. Entonces,

$$Fr_A(B) \ \subseteq \ A \cap Fr(B).$$

$$Fr_A(B) = \overline{B} \cap A \cap \overline{A - B} \subseteq \overline{B} \cap A \cap \overline{E - B} = A \cap Fr(B).$$

No siempre se verifica la igualdad, es decir que

$$Fr_A(B) \neq \ A \cap Fr(B).$$

En efecto, usando el mismo ejemplo anterior, se tiene

$$Fr_A(B) = \overline{B} \cap A \cap \overline{A - B} = [1,2] \cap [1,3] \cap [2,3] = \{2\}$$

Por otro lado,

$$A \cap Fr(B) = [1,3] \cap \{1,2\} = \{1,2\}$$

Luego,

$$Fr_A(B) = \{2\} \neq \{1,2\} = \ A \cap Fr(B).$$

5) Se tratará de precisar cómo son las bolas abiertas en $(A, d_A)$. Tómese un punto $x \in A$ y un número real $\varepsilon > 0$. De acuerdo con la definición, una bola abierta de centro $x$ y radio $\varepsilon$ en $(A, d_A)$ es el conjunto

$$\{a \ \in A: d(a, x) < \varepsilon\},$$

que puede ser expresado de la siguiente manera

$$B_E(x, \varepsilon) \cap A,$$

donde $B_E(x, \varepsilon)$ es la bola abierta de centro $x$ y radio $\varepsilon$ en $(E, d)$.

Resulta, pues, que en $(E, d)$, si $A \subseteq E$ y $x \in A$, para $\varepsilon > 0$, se llama *bola abierta de centro en $x$ y radio $\varepsilon$ en el subespacio $A$* al conjunto

$$B_A(x, \varepsilon) = B_E(x, \varepsilon) \cap A.$$

Análogamente, se define *la bola cerrada en $A$* como la intersección de bolas cerradas en $(E, d)$ con $A$. En forma semejante, el *borde de la bola en $A$*.

A continuación, se intenta averiguar cómo son los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados en el subespacio $(A, d_A)$ y se dará una relación con los cerrados y abiertos en $(E, d)$.

6) Se dice que $B$ es un *conjunto cerrado en $A$* si $B = \overline{B}_A = \overline{B} \cap A$.

7) Se dice que $B$ es un *conjunto abierto en $A$* si $A - B$ es un conjunto cerrado en $A$, o sea, $A - B = \overline{A - B}_A$

*Observaciones*

En $(E, d)$, sean $B \subseteq A \subseteq E$. Entonces,

1. Sea $x \in A$. $x \in \overline{B}_A$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$

$$B_A(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Consecuencia inmediata de las definiciones.

2. Sea $x \in B$. $x \in \overset{o}{B}_A$ si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_A(x, \varepsilon) \subseteq B$.

Se deduce de las definiciones.

3. $B$ es un abierto en $(A, d_A)$ si y solo si $B = \overset{o}{B}_A$ .

De esta propiedad y teniendo presente que siempre se verifica que $\overset{o}{B}_A \subseteq B$, se deduce que:

$B$ es un abierto en $A$ si y solo si para todo $a \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_A(x, \varepsilon) \subseteq B$.

4. $x \in B_A^d$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ $(B_A(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Se deduce inmediatamente a partir de las definiciones.

**Teorema 13.** Sea $(E,d)$ y $A \subseteq E$. $B \subseteq A$ es cerrado en $(A,d_A)$ si y solo si existe $F$ cerrado en $(E,d)$ tal que $B = F \cap A$.

*Demostración.* Supóngase que $B \subseteq A$ es cerrado en $A$, entonces $B = \overline{B}_A = \overline{B} \cap A$. Se designa el conjunto $F = \overline{B}$ que es cerrado en $E$, y se tiene $B = F \cap A$.

Recíprocamente, como $B \subseteq A$ y $B \subseteq \overline{B}$, entonces

$$B \subseteq \overline{B} \cap A = \overline{B}_A.$$

Por otro lado, $B = F \cap A \subseteq F$ y como $F$ es cerrado en $E$, $\overline{B} \subseteq \overline{F} = F$, de donde

$$\overline{B}_A = \overline{B} \cap A \subseteq F \cap A = B.$$

Y, por lo tanto, se concluye que $B = \overline{B}_A$.

**Teorema 14**. Sea $A$ un subconjunto de un espacio métrico $(E,d)$. Un conjunto $G \subseteq A$ es abierto en el subespacio $(A,d_A)$ si y solo si existe un conjunto $C$ abierto en $(E,d)$ tal que $G = A \cap C$.

*Demostración.* Supóngase que $G \subseteq A$ es abierto en $A$. Entonces, $\complement_A G$ es un cerrado en $A$. Por el teorema 13, existe un conjunto $F$ cerrado en $E$ tal que $\complement_A G = F \cap A$, de donde

$$G = \complement_A(F \cap A) = \complement_A F \cup \complement_A A = \complement_A F \cup \emptyset = \complement_A F = A - F =$$
$$= A \cap \complement_E F.$$

Se designa $C = \complement_E F$. Luego, existe $C$ abierto en $E$ tal que $G = A \cap C$.

Recíprocamente, supóngase $G \subseteq A$ y que existe un conjunto abierto $C$ en $E$ tal que $G = A \cap C$.

Por hipótesis, $C$ es abierto en $E$ entonces $\complement_E C$ es cerrado en $E$.

$$\complement_A G = \complement_A(A \cap C) = \complement_A A \cup \complement_A C = \emptyset \cup \complement_A C = A - C = A \cap \complement_E C$$

Luego, $\complement_A G \subseteq A$ es cerrado en $A$, es decir, $G$ es abierto en $A$.

*Observación*

Puede suceder que $B \subseteq A \subseteq E$ sea abierto (respectivamente, cerrado) en $(A, d_A)$ y no lo sea en $(E, d)$.

Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, |\quad|)$ se considera $A = [0, 2) \subseteq \mathbb{R}$. Entonces,

**i)** $B = [0,1)$ es abierto en $(A, d_A)$ pero no lo es en $(\mathbb{R}, |\quad|)$, pues

$$[0,1) = (-1,1) \cap [0, 2)$$

**ii)** $B = \left[\frac{3}{4}, 2\right)$ es cerrado en $(A, d_A)$ pero no lo es en $(\mathbb{R}, |\quad|)$, pues

$$\left[\frac{3}{4}, 2\right) = \left[\frac{3}{4}, 3\right] \cap [0, 2).$$

**Teorema 15**. Sean $(E, d)$ y $A \subseteq E$. Entonces, todo subconjunto de $A$ que es cerrado en $(A, d_A)$ es también cerrado en $(E, d)$ si y solo si $A$ es cerrado en $(E, d)$.

*Demostración.* Sea $B \subseteq A$ cerrado en $A$.

Supóngase que $A$ no es cerrado en $E$. Ahora bien, $A$ es cerrado en $A$ y, por lo tanto, se tendría un conjunto cerrado en $A$ que no es cerrado en $E$ lo que contradice el hecho que todo subconjunto de $A$ cerrado en $A$ sea cerrado en $E$. Luego, $A$ es cerrado en $E$.

Recíprocamente, por hipótesis, $B \subseteq A$ es cerrado en $A$, entonces, por el teorema 14, existe un conjunto $F$ cerrado en $E$ tal que $B = F \cap A$. Como $A$ es cerrado en $E$ e intersección de dos cerrados en $E$ es un cerrado en $E$, entonces $B$ es un conjunto cerrado en $E$.

## 3.10. Ejercicios propuestos

**1.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sean $p$ perteneciente a $E$ y $\delta > 0$. Entonces, pruebe que para cualquier $q \in B(p, \delta)$ existe $\delta' > 0$ tal que $B(q, \delta') \subseteq B(p, \delta)$.

Deduzca entonces que toda bola abierta es un conjunto abierto.

**2.** Sean $A, B \subseteq E$ y sea $(E, d)$ un espacio métrico. Pruebe que

**(a)** $\bigcup_{i \in I} A_i' \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)'$

**(b)** $(\bigcap_{i\in I} A_i)' \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i'$

**(c)** $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$

**(d)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

**(e)** $\overline{A} - \overline{B} \subseteq \overline{A - B}$

**(f)** $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

**(g)** $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a $A$.

**(h)** $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$ $(A \neq \emptyset)$.

**(i)** $A$ es cerrado $\Leftrightarrow \{x : d(x, A) = 0\} \subseteq A$.

**(j)** Si $A$ es cerrado y si además $p \in E$ no pertenece a $A$, entonces $d(p, A) \neq 0$.

En los apartados **(a)**, **(b)**, **(c)** y **(e)** de un ejemplo donde no se verifique la igualdad.

**3.** Sean $A, B \subseteq E$ y sea $(E, d)$ un espacio métrico. Pruebe que

**(a)** $\overset{o}{A}$ es el mayor abierto contenido $A$.

**(b)** $A \subseteq B \longrightarrow \overset{o}{A} \subseteq \overset{o}{B}$.

**(c)** $(A \cap B)^o = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$ ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

**(d)** $\overset{o}{\varnothing} = \varnothing$, $\overset{o}{E} = E$

**(e)** $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subseteq (A \cup B)^o$. Dé un ejemplo en el que no se verifique la igualdad.

**(f)** $\overset{o}{A} \cap (\complement A)^o = \varnothing$

**(g)** $(A-B)^o \subseteq \overset{o}{A} - \overset{o}{B}$. ¿Vale la igualdad?

**(h)** $x \in (\complement A)^o \Leftrightarrow d(x,A) > 0 \quad (A \neq \varnothing)$.

**4.** Sean $A, B \subseteq E$ y sea $(E,d)$ un espacio métrico. Pruebe que

**(a)** $Fr(\overline{A}) \subseteq Fr(A)$

**(b)** $Fr(A) = \overline{A} \cap \complement \overset{o}{A}$

**(c)** $Fr(A \cap B) \subseteq (\overline{A} \cap Fr(B)) \cup (Fr(A) \cap \overline{B})$

**(d)** $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$ si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$

**(e)** $\overset{o}{A} = A - Fr(A) = \overline{A} - Fr(A)$

**(f)** $E = \overset{o}{A} \cup Fr(A) \cup (\complement A)^o$ y son disjuntos dos a dos.

**(g)** $Fr(A) = \varnothing \Leftrightarrow A$ es abierto y cerrado.

En los apartados **(a)** y **(c)** de un ejemplo donde no se verifique la igualdad.

**5.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

**(a)** $A$ es cerrado

**(b)** $Fr(A) \subseteq A$

**(c)** $A$ contiene a sus puntos de acumulación.

**6.** Sean $(X_i, d_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ espacios métricos y sean $X$ y $D$ tales que $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $D = \prod_{i=1}^{n} d_i$. Entonces, $(X, D)$ es un espacio métrico. Si $n = 2$, sean $A \subseteq X_1$, $B \subseteq X_2$. Pruebe que

**(a)** $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

**(b)** $(A\times B)^o = \overset{o}{A}\times \overset{o}{B}$

*Sugerencia:*

$$(X_1\times X_2)-(A\times B)=[(X_1-A)\times X_2]\cup[X_1\times(X_2-B)]$$

**(c)** Usando inducción, generalice las fórmulas anteriores para un producto finito de conjuntos.

**7.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y sea $A\subseteq E$. Pruebe que si $A$ no posee puntos aislados, entonces $\overline{A}$ tampoco los posee.

**8.** Sea $(E,d_T)$ el espacio métrico discreto. Halle el derivado, la clausura, el interior y la frontera de cualquier subconjunto de $E$. Indique entonces como son los subconjuntos de $E$.

**9.** Determine el conjunto derivado, el conjunto de adherencia, el interior y la frontera de cada uno de los siguientes conjuntos de números reales con la métrica usual, y deduzca cuáles de estos conjuntos son cerrados y cuáles son abiertos:

**(a)** $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales)

**(b)** $\mathbb{Q}$ (el conjunto de los números racionales)

**(c)** $A=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

**(d)** Cualquier subconjunto con un número finito de puntos.

**(e)** $(a,b)$; $[a,b)$; $(a,b]$.

**10.** Hallar un conjunto $A$ tal que:

**(a)** $A$ y $A'$ sean disjuntos.

**(b)** $A$ es un subconjunto propio de $A'$.

**(c)** $A'$ es un subconjunto propio de $A$.

**(d)** $A = A'$.

**11.(a)** Sea $(E,d)$ un espacio métrico, $r \in \mathbb{R}, r > 0$ y $x_0 \in E$. Demuestre que $\overline{B_c(x_0,r)} \subseteq B_c(x_0,r)$

**(b)** Sea el espacio métrico $(\mathbb{Z},|\quad|)$. Defina los siguientes conjuntos $B(n,2)$, $\overline{B(n,2)}$ y $B_c(n,2)$.

¿Qué conclusiones obtiene comparándolos con el resultado del apartado **(a)**?

**12.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y $x$ un punto aislado de $E$. Pruebe que $\{x\}$ es un conjunto abierto.

Deduzca que el conjunto de puntos aislados de un espacio métrico es abierto.

**13.** Pruebe que todo abierto en un espacio métrico $(E,d)$ se puede escribir como unión de bolas abiertas.

Deduzca que todo abierto de $\mathbb{R}$ se puede escribir como unión de intervalos abiertos.

**14.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y sea $A \subseteq E$, $A \neq \varnothing$. Se define

$$B(A,r) = \{x \in E : d(x,A) < r\}, r \in \mathbb{R}, r > 0.$$

Pruebe que

**(a)** $B(E,r) = E$

**(b)** $B(A,r)$ es un conjunto abierto cualquiera sea $A$

**(c)** Si $A = \{a\}$, calcule $B(A,r)$

Concluya que $B(A,r)$ es un entorno de $A$.

**15.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y sea $A \subseteq E$, $A \neq \varnothing$. Pruebe que $\overline{A} = \bigcap_{r>0} B(A,r)$. Deduzca que todo cerrado es intersección de abiertos y que todo abierto es unión de cerrados.

**16.** Pruebe que la intersección de un número finito de entornos de $A$ es un entorno de $A$. Muestre con un ejemplo que la intersección de un número infinito de entornos de $A$ no siempre es un entorno de $A$.

**17.** Si $A$ es un subconjunto abierto de un espacio métrico $(E,d)$, demuestre que cualquiera sea $B \subseteq \mathrm{E}$ se cumple que $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Muestre con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

**18.** Demuestre que si $A$ y $B$ son abiertos y densos en $(E,d)$, entonces $A \cap B$ es denso.

**19.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y $D$ un subconjunto de $E$.

**(a)** Si $D$ es denso en $E$ y $A \subseteq E$, entonces ¿$D \cap A$ es denso en $A$?

**(b)** Si $D$ es denso en $E$ y $A \subseteq E$, $A$ abierto, entonces pruebe que $D \cap A$ es denso en $A$.

**(c)** Pruebe que $D$ es denso en $E$ sí y solo si para cada subconjunto $A$ de $E$ con $\overset{o}{A} \neq \varnothing$, $D \cap \overset{o}{A} \neq \varnothing$.

**(d)** Pruebe que $D$ es denso en $E$ sí y solo si para todo entorno $U$ de $x$ en $E$ $D \cap U \neq \varnothing$.

# Capítulo 4

# Continuidad en Espacios Métricos

## 4.1. Aplicaciones continuas

La idea de continuidad constituye uno de los conceptos fundamentales de la Topología y del Análisis. En este capítulo, se aborda la continuidad de funciones entre espacios métricos. Se caracteriza la continuidad a través de conjuntos cerrados o de conjuntos abiertos y se presentan las relaciones entre las aplicaciones continuas y las propiedades de los conjuntos. También se estudian los homeomorfismos entre espacios métricos. Finalmente, se abordan las nociones de sucesiones de funciones, convergencia uniforme y continuidad de funciones en productos cartesianos.

Para el estudio de este tema se recomienda, previamente, la lectura del libro de Ascheri y Reid, 2008, capítulo 4.

***Definición.*** Sean $(E, d)$ y $(E', d')$ espacios métricos y $f: E \longrightarrow E'$ una función. Se dice que $f$ es una *función continua en el punto* $x_0 \in E$ si para toda sucesión $(x_n)$ de $E$ la condición $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ implica $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$.

**Teorema 1.** Sean dos espacios métricos $(E, d)$ y $(E', d')$. La condición necesaria y suficiente para que $f: E \longrightarrow E'$ sea continua en $x_0 \in E$ es que

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta(\varepsilon, x_0) > 0\ :\ \forall\ x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \implies$$
$$\implies d'((f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

*Demostración.* Supóngase que $f$ es continua en $x_0$ y supóngase además, por absurdo, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ existe $x_\delta \in E$ tal que $d(x_\delta, x_0) < \delta$ pero $d'(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Entonces, dado $\delta = 1$ existe $x_1 \in E$ tal que $d(x_1, x_0) < 1$ con $d'(f(x_1), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Dado $\delta = \frac{1}{2}$ existe $x_2 \in E$ tal que $d(x_2, x_0) < \frac{1}{2}$ con $d'(f(x_2), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Y así sucesivamente, dado $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ con $d'(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Se obtiene así una sucesión $(x_n)$ de puntos de $E$ que converge a $x_0$, puesto que la sucesión de términos positivos $(d(x_n, x_0))$ converge a 0; sin embargo, la sucesión $\big(f(x_n)\big)$ no converge a $f(x_0)$, ya que siempre es $d'(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que se llega a una contradicción.

Recíprocamente, supóngase que $f$ es continua en $x_0 \in E$ y sea $(x_n)$ una sucesión de puntos de $E$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Para demostrar que $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$, se debe probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ resulta $d'((f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que $d'((f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ siempre y cuando $d(x, x_0) < \delta$. Se designa con $\varepsilon' = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$. Entonces, como $(x_n)$ converge a $x_0$ existe $n_0(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ resulta $d(x_n, x_0) < \delta$, con lo que $d'((f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$, que es lo que se quería demostrar.

*Observación*

$f: (E, d) \longrightarrow (E', d')$ no es continua en $x_0 \in E$ si verifica que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe $x \in E$ tal que $d(x, x_0) < \delta$ pero $d'(\big(f(x), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$.

***Definición.*** Se dice que una función $f$ es *continua en $E$* (o simplemente *continua*), si es continua en todo punto de $E$.

*Ejemplos*

1) Las funciones constantes son continuas cualquiera sea la métrica. Esto es, si $f: (E, d) \longrightarrow (E', d')$ es constante, por ejemplo, si $f(x) = a$ para todo $x \in E$, entonces $f$ es continua.

Se demuestra que $f$ es continua en cualquier punto $x_0 \in E$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in E$. Entonces, para cualquier $\delta > 0$, digamos $\delta = 1$, $d(x, x_0) < 1$ implica

$$d'((f(x), f(x_0)) = d'(a, a) = 0 < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f$ es continua.

2) Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. La restricción a $A$ de la aplicación idéntica, llamada *inyección natural de A en E* (o *inclusión*) $f: A \longrightarrow E$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in A$, es continua cualquiera sea la métrica $d$.

Se demuestra que $f$ es continua en cualquier punto $x_0 \in A$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in A$. Entonces, si se escoge $\delta = \varepsilon$ se tiene que la condición $d(x, x_0) < \varepsilon$ implica $d((f(x), f(x_0)) = d(x, x_0) < \delta = \varepsilon$. Por lo tanto, $f$ es continua.

**Teorema 2**. La condición necesaria y suficiente para que $f: (E, d) \longrightarrow (E', d')$ sea continua en $E$ es que la imagen inversa de todo conjunto cerrado en el espacio $E'$ sea un conjunto cerrado en el espacio $E$; o sea, $f: E \longrightarrow E'$ es continua en $E$ si y solo si para todo conjunto cerrado $B$ contenido en el espacio $E'$ se tiene que $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en el espacio $E$.

*Demostración.* Supóngase que $f$ es continua en $E$. Sea $B$ un subconjunto de $E'$ cerrado y probemos que $f^{-1}(B) \subseteq E$ es un cerrado; es decir que $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$.

Sea $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. Entonces, existe $(x_n) \subseteq f^{-1}(B)$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Por ser $f$ continua, se tiene que $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ en $E'$.

Como $x_n \in f^{-1}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x_n) \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $(f(x_n)) \subseteq B$ tal que $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ en $E'$, de donde, $f(x) \in \overline{B} = B$. Luego, $x \in f^{-1}(B)$. Por lo tanto, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$.

Recíprocamente, por hipótesis, la imagen inversa de todo cerrado en $E'$ es un cerrado en $E$ y supóngase que $f$ no es continua en el punto $x_0 \in E$.

Luego, existe una sucesión $(x_n)$ de puntos de $E$ que converge a $x_0$ en $E$ y $(f(x_n))$ no converge a $f(x_0)$ en $E'$.

Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_1 > n_0$ tal que $f(x_{n_1}) \notin B(f(x_0), \varepsilon)$. Por lo tanto, existen $n_1 < n_2 < \cdots <$

$< n_k < \cdots$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_{n_k}) \notin B(f(x_0), \varepsilon)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se toma $B = E' - B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq E'$ que es un conjunto cerrado en $E'$. De este modo, $f(x_{n_k}) \in B$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que equivale a decir que $x_{n_k} \in f^{-1}(B)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $f(x_0) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, entonces $f(x_0) \notin B$, es decir, $x_0 \notin f^{-1}(B)$.

Por ser $(x_{n_k})$ una subsucesión de $(x_n)$, entonces $(x_{n_k})$ converge a $x_0$. Así, se tiene una sucesión $(x_{n_k})$ de puntos de $f^{-1}(B)$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, o sea que $x_0 \in \overline{f^{-1}(B)}$, pero $x_0 \notin f^{-1}(B)$.

Se concluye que $f^{-1}(B)$ no es un conjunto cerrado en $E$.

**Corolario.** La condición necesaria y suficiente para que $f: (E, d) \longrightarrow (E', d')$ sea continua en $E$ es que la imagen inversa de todo conjunto abierto en el espacio $E'$ sea un conjunto abierto en el espacio $E$.

*Demostración.* Es inmediato a partir del teorema anterior y por la propiedad de la imagen inversa: para cada $A \subseteq E'$ es $f^{-1}(E' - A) = E - f^{-1}(A)$ (Ascheri y Reid, 2008, capítulo 1).

En efecto, sean $f: E \longrightarrow E'$ continua y $A \subseteq E'$ un conjunto abierto. Entonces, $\complement_{E'} A$ es un cerrado en $E'$ y, por el teorema 2, $f^{-1}(\complement_{E'} A) = E - f^{-1}(A)$ es un cerrado en $E$, por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es un abierto en $E$.

Recíprocamente, sean $A$ un conjunto abierto en $E'$ y $f^{-1}(A)$ un conjunto abierto en $E$. Entonces, $\complement_{E'} A$ es un cerrado en $E'$ y $\complement_E f^{-1}(A) = f^{-1}(\complement_{E'} A)$ es un cerrado en $E$. Luego, por el teorema 2, se concluye que $f$ es continua en $E$.

### *Observación*

Si $f: E \longrightarrow E'$ es continua en $E$, la imagen de un cerrado en $E$ no es, en general, un cerrado en $E'$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, se considera la función inclusión o inyección natural $i_E: E \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo $E = [0, 2)$, que es una función continua.

$[1, 2)$ es un subconjunto de $E$ que es cerrado en $E$, pues

$$[1,2) = [1,2] \cap [0,2) = [1,2] \cap E$$

y $[1,2]$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

Pero

$$i_E\big([1,2)\big) = [1,2),$$

y $[1,2)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$.

**Teorema 3.** Si $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ es continua, entonces

$$A = \text{gráfica de } f = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq E \times E'$$

es un conjunto cerrado.

*Demostración.* Sea $p \in \overline{A}$. Entonces, existe $(p_n) \subseteq A$ tal que $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$. Se debe probar que $p \in A$.

Como $p_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $p_n = (x_n, f(x_n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por ser $p$ un punto del espacio $E \times E'$, $p = (x,y)$. Como $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$, entonces $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ y $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Además, por ser $f$ continua, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. Luego, por unicidad del límite, $f(x) = y$. Por lo tanto, $p = \big(x, f(x)\big) \in A$.

En consecuencia, $\overline{A} \subseteq A$ como se quería demostrar.

## 4.2. Homeomorfismos

***Definición.*** Se dice que la función $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva, continua y su inversa $f^{-1}$ es también continua.

***Definición.*** Dos espacios métricos $(E,d)$ y $(E',d')$ son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos y se denota $E \simeq E'$.

De las definiciones anteriores se deducen las siguientes observaciones.

*Observaciones*

1. Si $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1} : (E',d') \longrightarrow (E,d)$ también lo es.

Como $f$ es biyectiva, entonces existe $f^{-1}: E' \longrightarrow E$ biyectiva. Como $f$ es un homeomorfismo, $f^{-1}: E' \longrightarrow E$ es continua y $f: E \longrightarrow E'$ es continua. Además, $(f^{-1})^{-1} = f$, por ser $f$ biyectiva. Luego, $f^{-1}: E' \longrightarrow E$ y $(f^{-1})^{-1}: E \longrightarrow E'$ son continuas.

2. La relación "ser homeomorfo a" es una relación de equivalencia sobre la familia de todos los espacios métricos.

*Demostración.* Se probará que la relación "ser homeomorfo a" es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva. $E \simeq E$, pues existe la aplicación idéntica $i_E: (E, d) \longrightarrow (E, d)$ tal que $i_E(x) = x$ para todo $x \in E$, que es un homeomorfismo para todo espacio métrico $(E, d)$.

Simétrica. Supóngase que $E \simeq E'$, entonces existe $f: E \longrightarrow E'$ homeomorfismo. Por la observación 1, $f^{-1}: E' \longrightarrow E$ es también un homeomorfismo y, por lo tanto, $E' \simeq E$.

Transitiva. Supóngase que $E \simeq E'$, $E' \simeq E''$. Entonces, existen $f: E \longrightarrow E'$ y $g: E' \longrightarrow E''$ homeomorfismos. Dado que la composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo, como el lector puede comprobar como ejercicio, se deduce que $E \simeq E''$.

A continuación, se caracterizan los homeomorfismos.

**Teorema 4.** Una condición necesaria y suficiente para una función $f: E \longrightarrow E'$ sobreyectiva sea un homeomorfismo es que se verifique:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ si y solo si } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

*Demostración.* Sea $f: E \longrightarrow E'$ un homeomorfismo. Entonces, del hecho que $f$ es continua se tiene que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \text{ implica } f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0).$$

Solo resta probar que

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0) \text{ implica } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0.$$

Por ser $f$ biyectiva, se tiene para $g = f^{-1}$ que se verifican

$$x_n = g(y_n) \quad \text{y} \quad y_n = f(x_n).$$

Como, por hipótesis, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$, entonces $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$. Y como $g = f^{-1}$ es continua, resulta que $g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(y_0)$. Por lo tanto, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

Recíprocamente, se debe probar que $f$ es un homeomorfismo. Por hipótesis, $f$ es sobre y continua. Solo resta probar que $f$ es inyectiva y que $f^{-1} = g: E' \longrightarrow E$ es continua.

Primero se prueba que $f$ es inyectiva. La condición $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ implica $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ entonces $f$ es inyectiva. En efecto, se toma $x \in E$ tal que $f(x) = f(x_0)$ y se considera $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $f(x_n) = f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. Por lo tanto, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ lo cual implica $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Pero para la sucesión constante $(x_n)$ se tiene que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Luego, $x = x_0$ , por unicidad del límite de una sucesión. Así, resulta que $f(x) = f(x_0)$ entonces $x = x_0$.

Por último, se prueba que $f^{-1} = g: E' \longrightarrow E$ es continua en $y_0$ cualquiera sea $y_0 \in E'$. En efecto, sea la sucesión $(y_n) \subseteq E'$ tal que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$. Como $g$ es la inversa de $f$, se verifica que $x_n = g(y_n)$ e $y_n = f(x_n)$.

Por hipótesis, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ implica $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

Luego, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$ implica $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$, entonces $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Esto es, $g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(y_0)$.

Por lo tanto, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$ implica $g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(y_0)$. Esto significa que la función $g = f^{-1}$ es continua.

**Teorema 5**. Una condición necesaria y suficiente para una función biyectiva $f: E \longrightarrow E'$ sea un homeomorfismo es que las imágenes y las imágenes inversas de conjuntos cerrados sean también conjuntos cerrados.

*Demostración.* Sea $f: E \longrightarrow E'$ un homeomorfismo y sean $A \subseteq E$ un cerrado cualquiera contenido en $E$ y $B \subseteq E'$ un cerrado cualquiera contenido en $E'$. Se prueba que $f(A)$ es un cerrado en $E'$ y que $f^{-1}(B)$ es un cerrado en $E$.

Como $f$ es continua, entonces $f^{-1}(B)$ es un cerrado en $E$. Por otro lado, como $f^{-1}$ es continua, entonces $(f^{-1})^{-1}(A)$ es un cerrado en $E'$ y como $f = (f^{-1})^{-1}$, entonces $f(A)$ es un cerrado en $E'$.

Recíprocamente, sea $f: E \longrightarrow E'$ una función biyectiva y sean $A \subseteq E$ un cerrado en $E$ y $B \subseteq E'$ un cerrado en $E'$. Entonces, por hipótesis, $f^{-1}(B)$ es un cerrado en $E$ y $f(A)$ es un cerrado en $E'$, de donde, resulta que $f$ es continua y usando que $f = (f^{-1})^{-1}$ se obtiene que $f^{-1}$ es continua. Luego, $f$ es un homeomorfismo.

**Teorema 6.** Todo espacio métrico es homeomorfo a un espacio métrico acotado.

*Demostración.* Sea $(E, d)$ un espacio métrico. Se introduce la siguiente función $d^*: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d^*(x,y) = \begin{cases} d(x,y) \text{ si } d(x,y) < 1 \\ 1 \quad\quad \text{si} \quad d(x,y) \geq 1 \end{cases}$$

El lector puede comprobar fácilmente que $d^*$ es una métrica sobre $E$.

Mediante la introducción de la distancia $d^*$ entre los puntos del espacio $E$, se transforma este espacio métrico en un espacio métrico $E^*$. Se designa esta transformación por $f$; esto es, $f: E \longrightarrow E^*$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in E$, que es claramente una biyección. Restaría probar que $f$ y $f^{-1}$ son continuas. Por el teorema 4, se sabe que una condición necesaria y suficiente para que $f$ sea un homeomorfismo es que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ si y solo si } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Supóngase que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Como

$$f(x_n) = x_n \text{ y } f(x_0) = x_0,$$

entonces, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$.

Por otro lado, supóngase ahora que $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$; pero como $f(x_n) = x_n$ y $f(x_0) = x_0$, entonces $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

Por lo tanto, $f$ es un homeomorfismo. Así, $E \simeq E^*$.

Faltaría probar que $E^*$ es acotado. Sean $x, y \in E^*$. Se tiene que $d^*(x, y) \leq 1$, de donde, $\delta(E^*) \leq 1$. En consecuencia, $E^*$ es un espacio métrico acotado.

A continuación, se desarrollan ejemplos de homeomorfismos entre espacios métricos.

*Ejemplos*

1) La aplicación $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

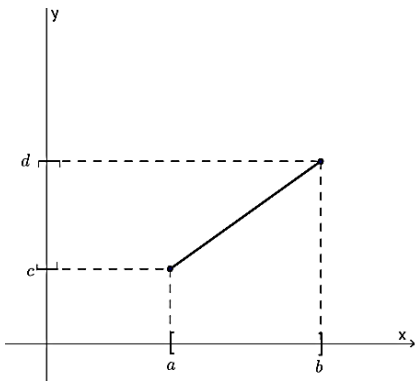
con la métrica usual es un homeomorfismo.

Evidentemente, $f$ es biyectiva y se define $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

La continuidad de $f$ y $f^{-1}$ es un resultado conocido de Análisis, por lo tanto, $f$ es un homeomorfismo.

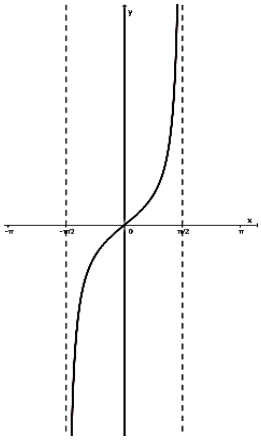
2) En la recta real, los intervalos cerrados son homeomorfos. Para ello, se prueba que $E = [a, b]$ con $a < b$ y $E' = [c, d]$ con $c < d$ son homeomorfos (considerando ambos intervalos como subconjuntos del espacio métrico $(\mathbb{R}, |\ \ |)$). Basta considerar la función $f: E \longrightarrow E'$ definida por $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x - a) + c$ para todo $x \in E$. Evidentemente, $f$ es biyectiva y continua. Además, su inversa $f^{-1}(y) = \frac{b-a}{d-c}(y - c) + a$ también lo es. Luego, $[a, b]$ es homeomorfo a $[c, d]$.




3) Vale la misma afirmación anterior para dos intervalos abiertos cualesquiera de $\mathbb{R}$ con la métrica usual; esto es,

$$(a, b) \simeq (c, d).$$

4) La aplicación $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ (considerando en ambos casos la métrica usual) tal que $f(x) = \tan(x)$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es continua por ser cociente de funciones continuas, es biyectiva y también es continua su aplicación inversa $f^{-1}(y) = \arctan(y)$. Luego, $f$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \simeq \mathbb{R}$.




De 3) y 4) puede concluirse que la recta es homeomorfa a cualquier intervalo abierto; esto es, la recta es homeomorfa a un subespacio propio.

## 4.3. Sucesiones de funciones. Convergencia uniforme

***Definición.*** Sean $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ una sucesión de funciones definidas en el espacio $(E, d)$ y con valores en $(E', d')$ y una función $f: E \longrightarrow E'$. Diremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *uniformemente convergente hacia el límite* $f$ si:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > k$ y $x \in E$ se verifica que $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ .

Se escribe en este caso que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in E$.

Se demostrará un teorema que es una generalización del conocido resultado de Análisis.

**Teorema 7.** El límite de una sucesión de funciones continuas uniformemente convergente en un espacio métrico $(E, d)$ es una función continua.

*Demostración.* Supóngase que $(f_n)$ es una sucesión de funciones continuas definidas en el espacio $E$ y **c**on valores en el espacio$(E', d')$.

Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Se debe probar que $f$ es continua en cualquier punto $x_0 \in E$.

Sea entonces $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces, existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > k$ es

$$d'\big(f_n(x), f(x)\big) < {}^{\varepsilon}/_{3} \quad \text{cualquiera sea } x \in E.$$

Si $x = x_0$, entonces esta última desigualdad también se puede escribir

$$d'(f_n(x_0), f(x_0)) < {}^{\varepsilon}/_{3} \quad \text{para todo } n > k.$$

Como cada $f_n$ es continua en el punto $x_0 \in E$, tomando $n > k$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in E$, $d(x, x_0) < \delta$ implica $d'(f_n(x), f_n(x_0)) < {}^{\varepsilon}/_{3}$.

Usando la desigualdad triangular, se deduce que para todo $n > k$

$$d'(f(x), f(x_0)) \leq d'\big(f(x), f_n(x)\big) + d'\big(f_n(x), f_n(x_0)\big) +$$
$$+ d'(f_n(x_0), f(x_0)) < {}^{\varepsilon}/_{3} + {}^{\varepsilon}/_{3} + {}^{\varepsilon}/_{3} = \varepsilon \quad \text{para todo } x \in E.$$

Luego, $d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ siempre que $d(x, x_0) < \delta$ para todo $x \in E$.

## 4.4. Continuidad de funciones en productos cartesianos. Funciones de varias variables

Sean $(X, d)$, $(Y, d')$ y $(W, d'')$ espacios métricos arbitrarios. Considérese $w = f(x, y)$, con $x \in X$, $y \in Y$, $w \in W$. Es claro que $f$ es una función de dos variables, $x$ e $y$. Pero se puede considerar a $f$ como una función de una variable, siendo esta variable $z = (x, y)$, de dominio en el producto cartesiano $X \times Y$; es decir,

$$f: X \times Y \longrightarrow W$$
$$z \longrightarrow f(z)$$

Por la definición de continuidad de funciones de una variable, la función $f$ es continua en el punto $z_0 = (x_0, y_0)$ si para toda $z_n = (x_n, y_n) \in X \times Y$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ implica $f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(z_0)$.

Puesto que $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$, o sea, $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y_0)$, por lo que se ha probado en el teorema 1 del capítulo 2, resulta que es equivalente a decir que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ e $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$.

Luego, $f$ es continua en el punto $(x_0, y_0)$ si para toda $(x_n, y_n) \in X \times Y$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ e $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$ entonces $f\big((x_n, y_n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\big((x_0, y_0)\big)$.

Similarmente se puede hacer para funciones de tres variables o, más generalmente, de cualquier número finito de variables.

**Proposición 1.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico. La aplicación $f : (E \times E, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\,|)$ definida por $f(x, y) = d(x, y)$ es una función continua

*Demostración.* Sean $\varepsilon > 0$ y $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \times E, n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ con $x, y \in E$.

Como $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, entonces existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1$ es $d(x_n, x) < {}^{\varepsilon}/_{2}$ y como $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, entonces existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_2$ es $d(y_n, y) < {}^{\varepsilon}/_{2}$.

Se designa con $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces, para todo $n > n_0$ se tiene que

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(y_n, x)| + |d(y_n, x) - d(x, y)|$$
$$\leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto, para todo $n > n_0$, resulta que $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon$.

También se puede extender el concepto de continuidad de manera análoga a funciones de un número infinito de variables. Para ello, considérese primero lo siguiente.

Sea $\{(X_m, d_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos uniformemente acotados; esto es,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\{\delta(X_m)\} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{x_m, y_m\in X_m}\{d_m(x_m, y_m)\}\right\} < \infty$$

Se define la distancia entre dos puntos $x = (x_1,\ x_2, \cdots, x_m, \cdots)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m, \cdots)$ del producto cartesiano infinito $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m \times \cdots = \prod_{m\in\mathbb{N}} X_m$ mediante la fórmula

$$d(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m)$$

Entonces, $(\prod_{m\in\mathbb{N}} X_m\ , d)$ es un espacio métrico.

Se probará en efecto que $(\prod_{m\in\mathbb{N}} X_m\ , d)$ es un espacio métrico.

Se sabe que

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\{\delta(X_m)\} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{x_m,\, y_m\in X_m}\{d_m(x_m, y_m)\}\right\} < \ \infty,$$

es decir que $\delta(X_m) \leq k < \infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De aquí, $d_m(x_m, y_m)\ \leq k < \infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Recordemos que una sucesión monótona en $\mathbb{R}$ converge si y solo si es acotada. Este resultado tiene una equivalencia inmediata para series. Una serie de términos no negativos converge si y solo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada superiormente (Ascheri y Reid, 2008, capítulo 5).

Primero se analizará si $d$ está bien definida. En efecto, sea $S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m)$ la $n$-ésima suma parcial de la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m)$. Se debe probar que esta serie converge, esto es, se debe probar que la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente.

Como $\frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m) \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces, en este caso, la sucesión de sumas parciales $(S_n)$ es creciente.

Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m) \leq k \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} = \frac{k}{2} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{k}{2}\ 2 = k$$

pues $t_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^{m-1}}$ es la $n$-ésima suma parcial de la serie geométrica convergente $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}}$ cuya suma es 2. De donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^{m-1}} \leq 2$.

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq k$, es decir que la sucesión de sumas parciales $(S_n)$ está acotada superiormente y se puede concluir que la serie de términos no negativos $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m)$ es convergente.

Se probará ahora la condición d1) de la definición de espacio métricos.

Sean $x, y \in X$ tales que $x = y$. Entonces, $(x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots) = (y_1, y_2, \cdots, y_m, \cdots)$, de donde, en particular, $x_m = y_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como, por hipótesis, $d_m$ son métricas, resulta que

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$, es decir que la $n$-ésima suma parcial de la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m)$ converge a cero y, por lo tanto, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m)$ es convergente y tiene suma cero. Luego, $d(x, y) = 0$.

Por otro lado, supóngase que $d(x, y) = 0$. Ello implica que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m) = 0,$$

lo que significa que la sucesión de sumas parciales $(S_n)$, con $S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m)$, converge a cero, es decir que $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$. La sucesión $(S_n)$ es creciente, por lo cual todos los términos no exceden a su límite, es decir, para todo $n$, $0 \leq S_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n = 0$ y entonces, $S_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De donde resulta que, para todo $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m) = 0$ y, por ser $d_m$ métrica, $d_m(x_m, y_m) = 0$, para $m = 1, 2, \cdots, n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, $x = y$.

Para la condición d2). Como para todo $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(y_m, x_m),$$

pues $d_m$ es métrica, entonces pasando al límite para $n \to \infty$, ya que ambas series son convergentes y, por lo tanto, existe el $\lim_{n\to\infty} S_n$, se obtiene que

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m)$$

y

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(y_m, x_m).$$

Luego, por unicidad del límite de una sucesión

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(y_m, x_m), \text{ es decir,}$$

$$d(x, y) = d(y, x).$$

Para la condición d3). Sean $x,\ y,\ z \in X$ con $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ , x_m,\ \cdots)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m, \cdots)$ y $z = (z_1, z_2, \cdots, z_m, \cdots)$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se sabe que

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m) \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ z_m) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(z_m,\ y_m)$$

por ser $d_m$ métrica.

Se sabe que $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ z_m)$ y $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(z_m,\ y_m)$ son series convergentes, es decir que tienen suma $S'$ y$S''$, por ser las sucesiones de sumas parciales crecientes.

De aquí, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ z_m) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(z_m,\ y_m) \leq S' + S''.$$

Luego,

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m) \leq S' + S'', \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De este modo, $(S_n)$ es una sucesión creciente acotada superiormente por el número $S' + S''$ y, por tanto, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m)$ es convergente y su suma no puede exceder esa cota; esto es,

$$S \leq S' + S'', \text{ siendo } S \text{ la suma de serie } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ y_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(x_m,\ z_m) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m(z_m,\ y_m)$$

Luego,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Se concluye que $(\prod_{m\in\mathbb{N}} X_m\,, d)$ es un espacio métrico.

**Teorema 8**. Con las hipótesis anteriores, sean $x_n = \left(x_{1_n}\,,\ x_{2_n}, \cdots, x_{m_n}, \cdots\right)$ para $n = 1,2,\cdots$ puntos del espacio $\prod_{m\in\mathbb{N}} X_m$ dotado de la métrica $d$. La condición necesaria y suficiente para que la sucesión $(x_n)$ converja a $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots)$ es que $\lim_{n\to\infty} x_{m_n} = x_m$, para $m = 1,2,\cdots$; es decir

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{si y solo si} \quad x_{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_m,\ m \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Supóngase que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Sea $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces, para un $m$ fijo existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2^m}$ cualquiera sea $n > n_0$.

Como $\frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n},\ x_m\right) \leq\ d(x_n, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n},\ x_m\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}$ para todo $n > n_0$, entonces

$$d_m\left(x_{m_n},\ x_m\right) < \varepsilon \text{ siempre que } n > n_0.$$

Esto significa que $x_{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_m\,, m \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, por hipótesis, $x_{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_m,\ m \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$ y fijemos $i \in \mathbb{N}$ tal que, por la propiedad arquimedeana, $\frac{1}{2^i} < \varepsilon$.

Como se sabe que $x_{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_m,\ m \in \mathbb{N}$, se considera que esto es cierto para $1 \leq m \leq i$. Luego, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se verifican las siguientes desigualdades

$$d_1\left(x_{1_n},\ x_1\right) < \varepsilon,\ d_2\left(x_{2_n},\ x_2\right) < \varepsilon, \cdots, d_i\left(x_{i_n},\ x_i\right) < \varepsilon,$$

siendo

$$n_0 = \max\ \{n_1, n_2, \cdots, n_i\} = \max_{1\leq m\leq i}\{n_m\}.$$

Por lo tanto, para todo $n > n_0$

$$d(x_n, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n}, x_m\right) = \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n}, x_m\right) +$$

$$+ \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n}, x_m\right) < \sum_{m=1}^{i} \frac{\varepsilon}{2^m} + \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{\delta(X_m)}{2^m} < \varepsilon + \rho\,\varepsilon$$

Luego, para todo $n > n_0$

$$d(x_n, x) < \varepsilon(1+\rho),$$

de donde, sigue que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$

***Nota.*** Se prueban las siguientes desigualdades usadas en la demostración del teorema anterior:

$$\sum_{m=1}^{i} \frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n}, x_m\right) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n}, x_m\right) < \rho\varepsilon$$

En virtud de que existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se verifican las siguientes desigualdades

$$d_1\left(x_{1_n},\ x_1\right) < \varepsilon,\ d_2\left(x_{2_n},\ x_2\right) < \varepsilon, \cdots, d_i\left(x_{i_n},\ x_i\right) < \varepsilon,$$

se tiene que

$$\sum_{m=1}^{i} \frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n}, x_m\right) < \sum_{m=1}^{i} \frac{\varepsilon}{2^m} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}\ 2 = \varepsilon,$$

pues $t_i = \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{2^{m-1}}$ es la $i$-ésima suma parcial de la serie geométrica que tiene suma 2. De donde, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=1}^{i} \frac{1}{2^{m-1}} \leq 2$, ya que la sucesión de sumas parciales $(t_i)$ es creciente, por lo tanto, sus términos no exceden a su límite para cada $i \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, por hipótesis, $\delta(X_m) \leq \rho < \infty$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_m\left(x_{m_n}, x_m\right) \leq \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\ \delta(X_m) \leq \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\ \rho =$$

$$= \rho \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+i}} = \frac{\rho}{2^i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} == \frac{\rho}{2^i}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} - 1\right] <$$

$$< \rho\varepsilon\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right] = \rho\varepsilon.$$

Luego,

$$\sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\, d_m\left(x_{m_n}, x_m\right) < \rho\varepsilon$$

**Teorema 9.** Sea $y = f(x)$ con $x \in \prod_{m\in\mathbb{N}} X_m$, es decir, $x = (x_1,\ x_2, \cdots, x_m, \cdots)$ y $x_m \in X_m, m \in \mathbb{N}$ . Una condición necesaria y suficiente para que la función $f$ sea continua en el punto $x_0 = \left(x_{1_0},\ x_{2_0}, \cdots, x_{m_0}, \cdots\right)$ es que $x_{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_{m_0},\ m \in \mathbb{N}$ implique $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ con $x_n = \left(x_{1_n},\ x_{2_n}, \cdots, x_{m_n}, \cdots\right)$.

*Demostración.* Surge de manera inmediata del teorema 8 y de la definición de continuidad. En efecto, supóngase que $x_{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_{m_0}, m \in \mathbb{N}$. Por el teorema 8, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ y, por ser $f$ continua, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$.

Recíprocamente, sea $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, entonces, por el teorema 8, $x_{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_{m_0}, m \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$. Por lo to, $f$ es continua en $x_0$.

Se considera ahora una función cuyos valores (y no sus variables) pertenecen a un producto cartesiano. Esto es,

$$f: T \longrightarrow X \times Y$$

$$t \longrightarrow (x(t), y(t))$$

donde $x: T \longrightarrow X$ e $y: T \longrightarrow Y$.

**Teorema 10.** Una condición necesaria y suficiente para que la función $f$ sea continua es que las funciones $x$ e $y$ sean continuas.

*Demostración.* Supóngase que $f$ es continua y probemos que $x: T \longrightarrow X$ e $y: T \longrightarrow Y$ son funciones continuas.

Sea $(t_n) \subseteq T$ tal que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$. Entonces, $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$, por ser $f$ continua. Luego, $(x(t_n), y(t_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x(t), y(t))$, de donde, $x(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ e $y(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(t)$. Por lo tanto, $x$ e $y$ son funciones continuas.

Supóngase que $x$ e $y$ son funciones continuas y probemos que $f: T \longrightarrow X \times Y$ es continua. Sea $(t_n) \subseteq T$ tal que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$. Como $x$ e $y$

son funciones continuas, entonces $x(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ e $y(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(t)$. Luego, $(x(t_n), y(t_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x(t), y(t))$. Por lo tanto, $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$, es decir, $f$ es continua.

Sea $f: T \longrightarrow \prod_{m\in\mathbb{N}} X_m$ tal que

$$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t), \cdots)$$

donde para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m: T \longrightarrow X_m$.

**Teorema 11.** Una condición necesaria y suficiente para que la función $f$ sea continua es que las funciones $x_m$ sean continuas, para $m \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Supóngase que $f$ es continua y sea $(t_n) \subseteq T$ tal que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$. Entonces, $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$; esto es,

$$(x_1(t_n), x_2(t_n), \cdots, x_m(t_n), \cdots) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t), \cdots),$$

para $m \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema 8, resulta

$$x_m(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_m(t), \text{ para } m \in \mathbb{N}$$

de donde, las funciones $x_m$, $m \in \mathbb{N}$ son continuas.

Recíprocamente, supóngase que las funciones $x_m$, $m \in \mathbb{N}$ son continuas y sea $(t_n) \subseteq T$ tal que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$. Entonces, $x_m(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_m(t)$, para $m \in \mathbb{N}$.

Luego, por el teorema 8,

$$(x_1(t_n), x_2(t_n), \cdots, x_m(t_n), \cdots) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t), \cdots),$$

de donde, $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$. Esto es, la función $f$ es continua.

## 4.5. Ejercicios propuestos

**1.** Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en un espacio métrico $(E,d)$ continuas en el punto $x_0 \in E$. Pruebe que $f+g$ y $f \cdot g$ son funciones continuas en $x_0$. Además, si $g(x_0) \neq 0$ pruebe que el co-

ciente $f/g$ es continuo en $x_0$ (donde se supone que $g(x) \neq 0$, para todo $x \in E$, pues sino $f/g$ no estaría definido).

Deduzca que las funciones polinomiales y las funciones racionales reales definidas en $\mathbb{R}$ son continuas.

**2.** Considere la función $f: (\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\quad|)$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pruebe que $f$ no es continua en $(0,0)$.

**3.** ***Definición.*** Sea $f: (E,d) \longrightarrow (E',d')$ una función que verifica que:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que la condición $d(x,x') < \delta$ implica $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$, cualesquiera sean $x, x' \in E$. Entonces, se dice que $f$ es *uniformemente continua en* $E$**.**

Pruebe que la composición de funciones uniformemente continuas es una función uniformemente continua.

**4.** Dé un ejemplo de una función continua que no sea uniformemente continua.

**5.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y $A \subseteq E$, $A$ no vacío. Pruebe que la función que aplica $x$ en $d(x,A)$ es uniformemente continua. (Se considera $\mathbb{R}$ con la métrica usual).

**6.** Sean $(E,d)$ y $(E',d')$ dos espacios métricos y sea $f: E \longrightarrow E'$. Pruebe que son equivalentes las siguientes condiciones:

**(a)** $f$ es continua.

**(b)** Para todo abierto $B \subseteq E'$ es $f^{-1}(B)$ un conjunto abierto de $E$.

**(c)** Para todo conjunto $A \subseteq E$ es $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

**(d)** Para todo conjunto $B \subseteq E'$ es $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

**7.** **(a)** Sea $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$. Pruebe que $f$ es continua si y solo si para todo $B \subseteq E'$ se verifica que $f^{-1}(\overset{o}{B}) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^{o}$.

**(b**) Muestre que el correspondiente enunciado dado en el apartado **(a)** para $f$ no es válido, es decir, "$f$ es continua si y solo si $\left(f(A)\right)^{o} \subseteq f(\overset{o}{A})$ para todo subconjunto $A$ de $E$" es falso.

**8.** **(a)** Si $\left(E, d_T\right)$ es el espacio métrico discreto y $(E',d')$ es un espacio métrico arbitrario, pruebe que toda aplicación $f:\left(E, d_T\right) \longrightarrow (E',d')$ es continua.

**(b)** En las condiciones del apartado **(a)**, describa las aplicaciones continuas $f:(E',d') \longrightarrow \left(E, d_T\right)$.

**9.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico, $A \subseteq E$, $A$ no vacío y $r > 0$ un número real. Pruebe que:

**(a)** $\{x \in X : d(x,A) \leq r\}$ es cerrado en $E$.

**(b)** $\{x \in X : d(x,A) < r\}$ es abierto en $E$.

**(c)** $\{x \in X : d(x,A) = r\}$ es cerrado en $E$.

**10.** Sean $f,g : (E,d) \longrightarrow (\mathbb{R},|\ \ |)$ dos aplicaciones continuas. Pruebe que el conjunto $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es un conjunto cerrado en $E$.

Deduzca que si $f$ y $g$ coinciden sobre un denso, entonces $f = g$ en todo el espacio.

***11.** ***Definición.*** Si $A \subseteq E$ y $f$ es una función definida en $E$, la *restricción de $f$ a $A$* es la función cuyo dominio de definición es $A$ tal que:

$$g(p) = f(p) \text{ para todo } p \in A$$

*Notación:* $g = f/A$.

**(a)** Sea $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ una función continua. Pruebe que si $A \subseteq E$ entonces $f/A$ es continua.

**(b)** Si $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ es tal que la restricción a un subespacio $A \subseteq E$ es continua entonces, ¿ $f$ es continua?

***12. (a)** Pruebe que para cada par de conjuntos no vacíos, cerrados y disjuntos $A$ y $B$ de un espacio métrico $(E,d)$ existen conjuntos $V, W$ abiertos y disjuntos tales que $A \subseteq V$, $B \subseteq W$ .

*Sugerencia:* Considere $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = d(x,B) - d(x,A)$. De este modo los pares de conjuntos cerrados y disjuntos pueden ser cubiertos por pares de conjuntos abiertos y disjuntos. Esta propiedad de los espacios métricos se llama *normalidad.*

**(b)** Muestre que es posible reemplazar en **(a)** la hipótesis que los conjuntos $A$ y $B$ sean cerrados y disjuntos por otra más débil, concretamente que $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

**13.** Sea $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ un homeomorfismo. Pruebe que:

**(a)** $f(A)$ es abierto en $E' \Leftrightarrow A$ es abierto en $E$.

**(b)** $f(A)$ es cerrado en $E' \Leftrightarrow A$ es cerrado en $E$.

**(c)** $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq E$.

**(d)** $f\left(\overset{o}{A}\right) = (f(A))^o$ para todo $A \subseteq E$.

**14.** Pruebe que toda isometría es un homeomorfismo. ¿Es válida la recíproca?

**15.** Sea $f:(\mathbb{R},|\quad|) \longrightarrow ((-1,1),|\quad|)$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Pruebe que $f$ es un homeomorfismo. Concluya que cualquier intervalo abierto (con la métrica del subespacio inducida por la usual) es homeomorfo a la recta real.

**16.** Sean $(E,d)$, $(E',d')$ y $(E'',d'')$ espacios métricos. Se consideran las aplicaciones $f: E \longrightarrow E'$, $g: E' \longrightarrow E''$, donde $f$ es continua y sobreyectiva, $g$ es continua y $g \circ f$ es homeomorfismo. Pruebe que $f$ y $g$ son homeomorfismos.

**17.** Analice si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas:

**(a)** Sea $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ un homeomorfismo. $E$ es acotado si y solo si $E'$ lo es.

**(b)** Sea $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ continua en $A \subseteq E$. Si $x$ es un punto clausura de $A$, entonces $f(x)$ es un punto clausura de $f(A)$.

**(c)** Sea $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ un homeomorfismo y $D \subseteq E$ denso en $(E,d)$. Entonces, $f(D)$ es denso en $(E',d')$

**(d)** Sea $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ continua. $U \subseteq E$ es abierto en $(E,d)$ sí y solo si $f(U)$ es abierto en $(E',d')$.

Capítulo 5

# Sucesiones de Cauchy. Espacios Métricos Completos. Espacios Métricos Separables

## 5.1. Sucesiones de Cauchy. Espacios métricos completos

Se introducen las sucesiones de Cauchy que se relacionan con las sucesiones convergentes (Ascheri y Reid, 2008). En el caso de que ambos conceptos sean equivalentes, se trata de un espacio métrico completo. Se estudian algunas interesantes propiedades como el teorema de encaje de Cantor y el teorema de Baire. Se concluye este capítulo definiendo el concepto de espacio métrico separable y demostrando sus propiedades más relevantes.

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $(x_n)$ una sucesión de puntos de $E$. Se dice que $(x_n)$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ es $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, es decir, los términos de la sucesión se aproximan arbitrariamente entre sí a medida que los índices crecen.

**Teorema 1.** Toda sucesión convergente en un espacio métrico $(E, d)$ es una sucesión de Cauchy.

*Demostración.* Sea $(x_n)$ una sucesión de puntos de $E$ convergente a un punto $x_0 \in E$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ se verifica la desigualdad

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon/2.$$

Para cualquier otro punto $x_m$ de la misma sucesión con tal que $m > n_0$ se cumplirá también que

$$d(x_m, x_0) < \varepsilon/2.$$

Luego, usando la desigualdad triangular, resulta que para todo $m, n > n_0$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

lo cual implica que $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy.

*Observación*

En general, la recíproca del teorema anterior no es cierta. En $E = (0,1)$ con la métrica usual inducida por $\mathbb{R}$, considérese la sucesión

$$x_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

La sucesión $(x_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ es de Cauchy en ((0, 1), | |).

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y supóngase que $m > n$. Entonces,

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

Para $\varepsilon > 0$ dado, por la propiedad arquimedeana, se puede elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$ . Luego, si $m > n_0$ y $n > n_0$ se tiene que

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Pero esta sucesión no converge a un punto de $E = (0,1)$, pues $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $0 \notin E = (0,1)$.

***Definición.*** Se dice que un espacio métrico $(E, d)$ es *completo* si toda sucesión de Cauchy $(x_n)$ de puntos de $E$ es convergente en $E$, es decir, existe un punto $x \in E$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

*Ejemplos*

1) $\big((0,1), |\quad|\big)$ no es espacio métrico completo.

2) $(\mathbb{R}, |\quad|)$ es un espacio métrico completo.

Se probará primero que toda sucesión de Cauchy $(x_n)$ de números reales es acotada. En efecto, como la sucesión $(x_n)$ de números reales es una sucesión de Cauchy entonces, para $\varepsilon = 1$ existe $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ se verifica que $|x_n - x_m| < 1$.

Se toma $m = n_0 + 1$. Entonces, $\left|x_n - x_{n_0+1}\right| < 1$ para todo $n > n_0$, de donde, $x_n \in \left(x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1\right)$ para todo $n > n_0$.

Luego, solo resta acotar un número finito de términos de la sucesión $(x_n)$.

Sean

$$\alpha = máx\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, x_{n_0+1} + 1\}$$

y

$$\beta = mín\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, x_{n_0+1} - 1\}.$$

Entonces, $\alpha$ es una cota superior del dominio de valores $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)$ y $\beta$ es una cota inferior. Es decir, $\beta \leq x_n \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(x_n)$ es una sucesión acotada de números reales.

Sea $y_n = sup\{x_m : m \geq n\}$, que existe pues $(x_n)$ es una sucesión de números reales acotada.

Es claro que $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq \cdots$ y además, $(y_n)$ es una sucesión acotada inferiormente, pues $x_m \leq y_n$ para todo $m \geq n$ y $(x_n)$ está acotada inferiormente. Luego, $(y_n)$ es una sucesión decreciente de números reales acotada inferiormente, de donde, $(y_n)$ es convergente en $\mathbb{R}$. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1$ es $|y_n - a| < \varepsilon/3$ y, por ser $(x_n)$ una sucesión de Cauchy, existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_2$ es $|x_n - x_m| < \varepsilon/3$.

Considérese $n_0 = máx\{n_1, n_2\}$. Luego, para todo $n, m > n_0$ se verifican las desigualdades

$$|y_n - a| < \varepsilon/3 \quad \text{y} \quad |x_n - x_m| < \varepsilon/3.$$

Por otro lado, como $y_n = sup\{x_m : m \geq n\}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $m_1 \geq n$ tal que $y_n - \frac{\varepsilon}{3} < x_{m_1} \leq y_n$; esto es, $\left|x_{m_1} - y_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ para algún $m_1 \geq n > n_0$.

Luego, de la desigualdad triangular, se obtiene que para todo $n > n_0$

$$|x_n - a| \leq \left|x_n - x_{m_1}\right| + \left|x_{m_1} - y_n\right| + |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

lo cual implica que $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$.

**Proposición 1.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico completo y sea $F$ un subconjunto no vacío de $E$. Entonces, $(F, d)$ es un espacio métrico completo si y solo si $F$ es un conjunto cerrado en $(E, d)$.

*Demostración.* Supóngase que $(F, d)$ es completo. Se prueba que $F$ es cerrado comprobando que $\overline{F} \subseteq F$.

Sea $x \in \overline{F}$. Entonces, existe $(x_n)$ con $x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Pero como $(x_n)$ converge en $E$, entonces es de Cauchy en $E$, por el teorema 1. Pero la métrica de $F$ es la restricción a $F$ de la métrica de $E$, por lo tanto, $(x_n)$ es también una sucesión de Cauchy en $F$ y como $F$ es completo, entonces, existe $y \in F$ tal que $y = \lim_{n\to\infty} x_n$. Luego, por unicidad del límite de una sucesión, es necesariamente $x = y \in F$.

Recíprocamente, sean $F$ cerrado y $(x_n)$ una sucesión de Cauchy de puntos de $F$. Evidentemente, también es una sucesión de Cauchy en $E$ y, como $(E, d)$ es completo, entonces converge a un punto $x \in E$. Pero entonces, $(x_n)$ es una sucesión en $F$ que converge a $x$, lo cual implica que $x \in \overline{F}$. Como $F$ es cerrado, $x \in F$ y, por lo tanto, $(x_n)$ converge a $x$ en $F$. Esto implica que $(F, d)$ es completo.

A continuación, se caracterizan los espacios métricos completos.

**Teorema 2. (Principio de encaje de Cantor).** Sea $(F_n)$ una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico completo $(E, d)$ tal que:

1) $F_{n+1} \subseteq F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

2) la sucesión de sus diámetros converge a 0, es decir, $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$.

Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

*Demostración.* Como, por hipótesis, cada $F_n$, $n \in \mathbb{N}$, es un conjunto no vacío, se puede entonces elegir un punto $x_n \in F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se probará que esta sucesión $(x_n)$ es de Cauchy en $E$.

Como los diámetros de la sucesión de conjuntos $(F_n)$ tiende a cero, resulta que para cada $\varepsilon > 0$ se puede elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\delta(F_{n_0}) < \varepsilon$, pues, en caso contrario, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ se verificará que $\delta(F_{n_0}) \geq \varepsilon$ y entonces existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(F_n) \geq \varepsilon$, en contradicción con la hipótesis 2.

Como la sucesión de cerrados es decreciente, si $n, m > n_0$ entonces $F_n \subseteq F_{n_0}$ y $F_m \subseteq F_{n_0}$ y esto implica que $x_n$, $x_m \in F_{n_0}$. Entonces,

$d(x_n, x_m) \leq \delta(F_{n_0}) < \varepsilon$ siempre que $n, m > n_0$. Resulta así, que la sucesión $(x_n)$ es de Cauchy en $E$.

Como $E$ es completo, la sucesión $(x_n)$ es convergente a un punto $x \in E$.

Por la hipótesis 1, el conjunto $F_n$ contiene todos los términos de la sucesión $(x_n)$ con excepción a lo sumo de los $n-1$ primeros términos $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$. Resulta, entonces, que $x \in \overline{F_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y como cada conjunto $F_n$ es cerrado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n$. Luego, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y, en consecuencia, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

*Observaciones*

1. Estas intersecciones numerables (ver Ascheri y Reid, 2008, capítulo 1) de familias de cerrados encajados se reducen a un punto. Es decir, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Es claro, a partir de la demostración del teorema de Cantor, que $\{x\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Solo resta probar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \{x\}$.

Sea $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}, y \in F_n$ y como también, $x \in F_n$, entonces $d(x, y) \leq \delta(F_n) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n > n_0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, por la hipótesis 2 del teorema.

Luego, $d(x, y) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Lo que implica que $d(x, y) = 0$. Pero $d$ es una distancia, por lo tanto, $x = y$. En consecuencia, $y \in \{x\}$, completando así la demostración.

2. El teorema de encaje de Cantor necesita de todas las hipótesis.

(a) El espacio métrico ha de ser completo. El espacio $(0, 1)$ con la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$ no es un espacio completo y además, $\{(0, 1/n]\}_{n\geq 2}$ es una sucesión de cerrados del espacio $(0, 1)$ que verifica las hipótesis del teorema cuya intersección es vacía.

(b) Los conjuntos tienen que ser cerrados. En efecto, $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos "no cerrados" en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, que es completo y que verifica el resto de las hipótesis del teorema. Sin embargo, su intersección es vacía.

(c) En $(\mathbb{R}, |\quad|)$, se toma $F_1 = \{x\}$ donde $0 < x < \frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{N}$, $k$ fijo y $F_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Se tiene una sucesión de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ cuya sucesión de diámetros converge a 0, no constituye un encaje pues $F_n \nsubseteq F_1$ para $n \in \mathbb{N}, n > 1$ y tiene intersección vacía.

(d) La sucesión de los diámetros debe ser convergente a 0. En $(\mathbb{R}, |\quad|)$, considérese $F_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ cuya sucesión de diámetros no converge a 0 y tiene intersección vacía.

Se recuerda el **Principio de encaje de Cantor:** toda sucesión en encaje de conjuntos cerrados no vacíos de un espacio $E$ cuyos diámetros tienden a cero, tiene intersección no vacía.

**Teorema 3. (Recíproca del teorema de Cantor).** Si $(E, d)$ es un espacio métrico en donde se verifica el principio de encaje de Cantor, entonces $E$ es completo.

*Demostración*. Sea $(x_n)$ una sucesión de Cauchy de puntos de $E$. Se debe probar que $(x_n)$ converge a $x$ en $E$. Sea $\varepsilon > 0$. Se consideran los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{x_1, x_2, \cdots\}$$
$$A_2 = \{x_2, x_3, \cdots\}$$
$$\vdots$$
$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$$
$$\vdots$$

Entonces, es claro que

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots.$$

Además,

$$\delta(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por ser $(x_n)$ una sucesión de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ se cumple que $d(x_n, x_m) < {}^{\varepsilon}/_{2}$.

Como $n, m > n_0$ entonces $x_n, x_m \in A_{n_0+1}$, de donde,

$$\sup_{x_n, x_m \in A_{n_0+1}} \{d(x_n, x_m)\} \leq {}^{\varepsilon}/_{2} < \varepsilon$$

De modo que

$$\delta\left(A_{n_0+1}\right) < \varepsilon$$

Si $n > n_0$, entonces $A_n \subseteq A_{n_0+1}$. Luego,

$$\delta(A_n) \leq \delta\left(A_{n_0+1}\right) < \varepsilon.$$

Así,

$$\delta(A_n) < \varepsilon \quad \text{siempre que } n > n_0.$$

Además, como $\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right)$ (ver Nota) y también se verifica que $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\overline{A_n} \supseteq \overline{A_{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\left(\overline{A_n}\right)$ es una sucesión en encaje de conjuntos cerrados no vacíos de $E$ cuyos diámetros tienden a cero. Entonces, por hipótesis, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, esto es, $x \in \overline{A_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, se puede afirmar que la sucesión de Cauchy $(x_n)$ converge a $x$ en $E$. En efecto, como $\lim_{n\to\infty} \delta(\overline{A_n}) = 0$ es posible elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\delta\left(\overline{A_{n_0}}\right) < \varepsilon$ y, por lo tanto, $n > n_0$ implica que $x_n, x \in \overline{A_{n_0}}$, pues $A_n \subseteq \overline{A_n} \subseteq \overline{A_{n_0}}$.

Luego, $d(x_n, x) \leq \delta\left(\overline{A_{n_0}}\right) < \varepsilon$ siempre que $n > n_0$, lo cual implica que $(x_n)$ converge a $x$ en $E$.

***Nota.*** Sea $A$ un subconjunto de un espacio métrico $(E, d)$. Entonces, $\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right)$.

En efecto, puesto que $A \subseteq \overline{A}$ entonces $\delta(A) \leq \delta\left(\overline{A}\right)$.

Por otro lado, sea $\varepsilon > 0$. Se toman $x$ e $y$ arbitrarios en $\overline{A}$. Por definición de clausura de un conjunto, $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A \neq \emptyset$ y $B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A \neq \emptyset$, de donde, existen $x', y' \in A$ tales que

$$d(x, x') < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad d(y, y') < \varepsilon/2.$$

De la desigualdad triangular, resulta que para todo $x, y \in \overline{A}$

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < \varepsilon + d(x', y') \leq$$
$$\leq \varepsilon + \delta(A).$$

Es decir, para todo $x, y \in \overline{A}$

$$d(x,y) < \varepsilon + \delta(A).$$

Como $x$ e $y$ son arbitrarios, se sigue que

$$\delta(\overline{A}) \leq \varepsilon + \delta(A)$$

y, puesto que $\varepsilon$ es arbitrario, se deduce que $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$.

## 5.2. Conjuntos ralos o nunca densos

***Definición.*** Sea $(E, d)$ espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subseteq E$ es *ralo o nunca denso* si $\overline{\complement A} = E$; esto es, si $E \subseteq \overline{\complement A}$, pues la otra inclusión es siempre válida.

*Observaciones*

1. Un conjunto $A$ es ralo o nunca denso si y solo si $\overset{o}{A} = \emptyset$.

Supóngase que $A$ es un conjunto ralo. Entonces, $\overline{\complement A} = E$. Luego, $\complement(\overline{\complement A}) = \complement E = \emptyset$, es decir, $\overset{o}{A} = \emptyset$.

Recíprocamente, si $\overset{o}{A} = \emptyset$ entonces $\complement(\overline{\complement A}) = \emptyset$. Así, $\overline{\complement A} = \complement\emptyset = E$, de donde resulta que $A$ es ralo.

2. Todo subconjunto de un conjunto ralo es también un conjunto ralo.

Supóngase que $A$ es un conjunto ralo y sea $B \subseteq A$. Entonces, por propiedad de interior, $\overset{o}{B} \subseteq \overset{o}{A} = \varnothing$. Luego, $\overset{o}{B} = \varnothing$ y, por consiguiente, $B$ es ralo.

3. Un subconjunto $A$ de un espacio métrico $(E, d)$ es un conjunto ralo o nunca denso en el espacio $E$ si y solo si toda bola abierta de $E$ contiene puntos que no pertenecen a $A$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap \complement A \neq \emptyset$ cualquiera sea $x \in E$.

En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $x \in E$. Como $A$ es un conjunto ralo entonces $x \in \overline{\complement A}$, de donde, $B(x,\varepsilon) \cap \complement A \neq \emptyset$.

Recíprocamente, sean $x \in E$ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, $B(x,\varepsilon) \cap \complement A \neq \emptyset$, de donde, $x \in \overline{\complement A}$ y, en consecuencia, $A$ es ralo.

*Ejemplos*

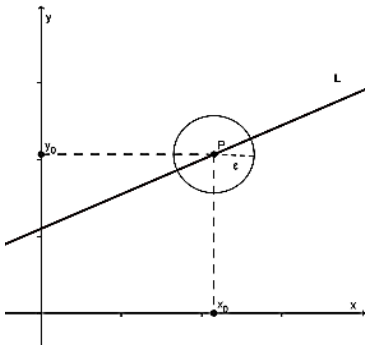
1) En $(\mathbb{R}, |\ \ |)$, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es ralo o nunca denso.

En efecto, se ha probado que $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$ y entonces, $\mathbb{Q}$ es ralo.

2) En $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_2)$, cualquier recta es un conjunto ralo.

Sea $L$ tal que $y = mx + n$ y sea $p = (x_0, mx_0 + n) \in L$.

Sea $\varepsilon > 0$ y considérese $B(p,\varepsilon)$. Entonces, tomando el punto $r \in \mathbb{R}^2$ tal que $r = \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, y_0\right)$, resulta que $r \notin L$ pero $r \in B(p,\varepsilon)$ pues




$$d_2(r,p) = \sqrt{\left[x_0 - \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $B(p,\varepsilon) \nsubseteq L$ para cualquier $\varepsilon > 0$, de donde, $\overset{\circ}{L} = \varnothing$, lo cual implica que $L$ es ralo.

*Observación*

En general, la unión de conjuntos ralos no es un conjunto ralo.

En efecto, en $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ considérense los conjuntos $\mathbb{Q}$ de los números racionales e $\mathbb{I}$ de los números irracionales que son conjuntos ralos. Sin embargo, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$, pero $\mathbb{R}$ no es un conjunto ralo ya que $int(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \neq \emptyset$.

**Proposición 2.** Si $A$ es un conjunto ralo y $B$ es un conjunto cerrado y ralo, entonces $A \cup B$ es un conjunto ralo.

*Demostración.* Por hipótesis, resulta que

$$E = \overline{E - A}\ ,\ E = \overline{E - B}\ \text{ y }\ B = \overline{B}.$$

Entonces,

$$E - B = \overline{E - A} - B = \overline{E - A} - \overline{B} \subseteq \overline{(E - A) - B}$$
$$= \overline{(E - A) \cap (E - B)} = \overline{E - (A \cup B)}$$

Luego, por propiedad de clausura

$$\overline{E - B} \subseteq \overline{\overline{E - (A \cup B)}} = \overline{E - (A \cup B)}$$

y entonces,

$$E \subseteq \overline{E - (A \cup B)},$$

de donde, por definición, $A \cup B$ es un conjunto ralo.

**Proposición 3.** Si $A$ y $B$ son conjuntos ralos, entonces $A \cap B$ es un conjunto ralo.

*Demostración.* Consecuencia inmediata de la definición.

**Proposición 4**. Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $A \subseteq E$ un conjunto cerrado. $A$ es un conjunto ralo si y solo si para toda bola abierta $K$ de $E$ existe una bola abierta $L \subseteq K$ tal que $L \cap A = \emptyset$.

*Demostración.* Supóngase que $A \subseteq E$ es un conjunto cerrado y ralo y sea $K = B(x, \varepsilon)$ para todo $x \in E$ y cualquier $\varepsilon > 0$. Entonces, por ser $A$ ralo, $B(x, \varepsilon) \cap \complement A \neq \emptyset$, de donde, existe $y \in B(x, \varepsilon)$ e $y \in \complement A$.

Como $B(x, \varepsilon)$ es un conjunto abierto, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $B(y, \delta_1) \subseteq B(x, \varepsilon)$. Además, como $\complement A$ es abierto, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que $B(y, \delta_2) \subseteq \complement A$.

Tómese $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$ y $B(y, \delta) \subseteq \complement A$. Luego, designando con $L = B(y, \delta)$, se tiene que $L \subseteq K$ y $L \subseteq \complement A$, obteniéndose el resultado deseado.

Recíprocamente, supóngase que $A \subseteq E$ es un conjunto cerrado y que para toda bola abierta $K$ de $E$ existe $L \subseteq K$ tal que $L \cap A = \emptyset$.

Supóngase que $\overset{o}{A} \neq \emptyset$. Entonces, existe $x \in \overset{o}{A}$, de donde, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Esto significa que existe una bola abierta $K = B(x, \varepsilon)$ tal que para toda bola abierta $L$, $L \subseteq K$, resulta que $L \cap A \neq \emptyset$, pues como $K \subseteq A$ y $L \subseteq K$, entonces $L \subseteq A$.

**Teorema 4. (Teorema de Baire).** En un espacio métrico completo no vacío $E$, la unión de un número numerable de subconjuntos cerrados y ralos no puede llenar todo el espacio $E$; además, esta unión es un conjunto nunca denso.

*Demostración.* Supóngase que $(E, d)$ es un espacio métrico completo no vacío y $A = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n \cup \cdots = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, donde cada subconjunto $F_n$ es ralo y cerrado, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Se probará que $A$ es un conjunto nunca denso. Para ello, es suficiente mostrar que toda bola abierta $B_0$ centrada en un punto arbitrario de $E$ contiene puntos del $\complement A$ (observación 3).

Como $F_1$ es un conjunto cerrado y ralo entonces, por la proposición 4, dada $B_0$ existen $a_1 \in B_0$ y $\delta_1 > 0$ tal que $B_1(a_1, \delta_1) \cap F_1 = \emptyset$ y $B_1(a_1, \delta_1) \subseteq B_0$.

Tómese $\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{2}$. Entonces,

$$\overline{B_1(a_1, \varepsilon_1)} \cap F_1 = \emptyset \quad \text{y} \quad \overline{B_1(a_1, \varepsilon_1)} \subseteq B_0$$

pues $\overline{B_1(a_1, \varepsilon_1)} \subseteq B_1(a_1, \delta_1)$ (ver nota 1)

Puesto que $F_2$ es un conjunto cerrado y ralo entonces, dado que $B_1(a_1, \varepsilon_1)$ es una bola abierta de $E$, existen $a_2 \in B_1(a_1, \varepsilon_1)$ y $\delta_2 > 0$ tal que $B_2(a_2, \delta_2) \cap F_2 = \emptyset$ y $B_2(a_2, \delta_2) \subseteq B_1(a_1, \varepsilon_1) \subseteq \overline{B_1(a_1, \varepsilon_1)}$.

Eligiendo $\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{2} \leq \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{\delta_1}{2^2}$ (ver nota 2), resulta que

$$\overline{B_2(a_2, \varepsilon_2)} \cap F_2 = \emptyset \quad \text{y} \quad \overline{B_2(a_2, \varepsilon_2)} \subseteq B_2(a_2, \delta_2) \subseteq \overline{B_1(a_1, \varepsilon_1)}$$

Continuando con este procedimiento, queda determinada una sucesión $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ en encaje de conjuntos cerrados no vacíos tales que

$$B_0 \supseteq \overline{B_1(a_1, \varepsilon_1)} \supseteq \overline{B_2(a_2, \varepsilon_2)} \supseteq \cdots \supseteq \overline{B_n(a_n, \varepsilon_n)} \supseteq \cdots$$

y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{B_n(a_n, \varepsilon_n)} \cap F_n = \emptyset$ . Además, sus radios $\varepsilon_n$ satisfacen que $0 < \varepsilon_n \leq \frac{\delta_1}{2^n}$. Así, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ y como $0 < \delta(\overline{B_n}) \leq 2\varepsilon_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sigue que $\lim_{n\to\infty} \delta(\overline{B_n}) = 0$.

Luego, por el teorema de Cantor, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n(a_n, \varepsilon_n)} \neq \emptyset$, de donde, existe $x \in \overline{B_n(a_n, \varepsilon_n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{B_n(a_n, \varepsilon_n)} \cap F_n = \emptyset$ entonces $x \notin F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de

donde, $x \in \complement F_n$, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Luego, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \complement F_n$, esto es, $x \in \complement \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \complement A$ y $x \in B_0$.

Por lo tanto, $B_0 \cap \complement A \neq \emptyset$ y así, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es un conjunto ralo o nunca denso.

Por otro lado, si esta unión llenara todo el espacio $E$, entonces $E$ sería un conjunto ralo, de donde, $\overset{o}{E} = \emptyset$ y, por lo tanto, $E = \emptyset$, en contradicción con la hipótesis de que $E \neq \emptyset$.

***Notas***

1) Se ha usado que si dada una bola abierta $B_1(a_1, \delta_1)$ entonces, tomando $\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{2}$, resulta que $\overline{B_1(a_1, \varepsilon_1)} \subseteq B_1(a_1, \delta_1)$.

En efecto, sea $x \in \overline{B_1(a_1, \varepsilon_1)}$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap B_1(a_1, \varepsilon_1) \neq \emptyset$, de donde, para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in B(x, \varepsilon)$ e $y \in B_1(a_1, \varepsilon_1)$ .

Luego, para cualquier $\varepsilon > 0$ $d(y, x) < \varepsilon$ y $d(y, a_1) < \varepsilon_1$. Como esto se verifica para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular, para $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{2}$ se tiene que $d(y, x) < \varepsilon_1$ y $d(y, a_1) < \varepsilon_1$. Luego, por la desigualdad triangular, $d(x, a_1) < \delta_1$. Por consiguiente, $x \in B_1(a_1, \delta_1)$.

2) Se sabe que todo bola abierta es un conjunto abierto. De aquí, dado $a_2 \in B_1(a_1, \varepsilon_1)$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $B_2(a_2, \delta_2) \subseteq B_1(a_1, \varepsilon_1)$. Para ello, basta tomar

$$\delta_2 = \varepsilon_1 - d(a_1, a_2) \leq \varepsilon_1, \text{ de donde, } \delta_2 \leq \varepsilon_1.$$

*Observaciones*

1. Sea $(E, d)$ un espacio métrico. Se dice que $A \subseteq E$ es un *conjunto de primera categoría* si se puede expresar como una unión numerable de conjuntos cerrados y nunca densos. Es decir, $A = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n \cup \cdots$ en donde $F_n$, $n \in \mathbb{N}$, es un conjunto cerrado y ralo.

2. Como todo subconjunto de un conjunto nunca denso es también nunca denso, el teorema de Baire se puede enunciar del siguiente modo:

"En un espacio métrico completo $E$, todo conjunto de primera categoría es un espacio ralo o nunca denso".

3. Del teorema de Baire se deduce que todo espacio $E$ no vacío, completo y denso en sí es no numerable.

En efecto, si el espacio $E$ fuese numerable, $E = \{x_1, x_2, \cdots\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. Entonces, $E$ sería la unión de conjuntos unitarios. Pero cada uno de estos conjuntos es un conjunto cerrado y nunca denso ya que cada uno de los puntos $x_n$ es de acumulación de $E$, pues $E$ es denso en sí por hipótesis, de donde, toda bola $B(x_n, \varepsilon)$ contiene infinitos puntos de $E$ distintos de $x_n$; esto es, para todo $\varepsilon > 0$ $B(x_n, \varepsilon) \nsubseteq \{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, de donde, $\{x_n\}^\circ = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Luego, $E$ sería la unión de conjuntos cerrados nunca densos, lo cual es absurdo, por el teorema de Baire. Por lo tanto, $E$ es no numerable.

Para el estudio del siguiente tema se recomienda, previamente, la lectura del libro de Ascheri y Reid, 2008, capítulo 1.

## 5.3. Espacios métricos separables

*Definición.* Se dice que un espacio métrico $(E, d)$ es *separable* si contiene un subconjunto denso a lo sumo numerable.

*Observación*

En la definición anterior, se expresa que $E$ es *separable* si contiene un subconjunto $A$ que sea denso y a lo sumo numerable. Ahora bien, si $A$ es a lo sumo numerable entonces sus elementos pueden ser ordenados en un sucesión infinita (en la que puede haber repeticiones). Además, si $A$ es denso entonces $\overline{A} = E$. De aquí, $E$ es *separable* si contiene una sucesión densa, esto es, si contiene elementos $x_1, x_2, \cdots$ tal que para todo $x \in E$, $x \in \overline{A} = \overline{\{x_1, x_2, \cdots\}}$; o sea que, para todo $x \in E$ existe una sucesión de puntos de $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ que converge a $x$; esto

es, para todo $x \in E$ existe una subsucesión $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\}$ tal que converge a $x$.

Así, $E$ es *separable*, si contiene una sucesión densa, esto es, si contiene una sucesión de puntos $x_1, x_2, \cdots$ tal que todo $x \in E$ es de la forma $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

### *Ejemplos*

1) La recta real $\mathbb{R}$ con la distancia usual es separable.

En efecto, $\mathbb{R}$ contiene un subconjunto denso a lo sumo numerable. Precisamente, tal subconjunto es $\mathbb{Q}$, puesto que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ es numerable, de donde $\mathbb{Q}$ es denso y a lo sumo numerable.

2) $\mathbb{R}$ con la métrica discreta no es un espacio separable.

En efecto, supóngase que $(\mathbb{R}, d_T)$ fuese separable. Entonces, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A$ es denso y a lo sumo numerable. Por ser $A$ denso, entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$ y como en la métrica discreta $\overline{A} = A$, resulta que $A = \mathbb{R}$. Entonces, $\mathbb{R}$ es a lo sumo numerable, lo cual es absurdo. Luego, $\mathbb{R}$ no es separable.

***Definición.*** Se dice que una familia a lo sumo numerable $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \cdots\} = \{G_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de abiertos no vacíos es una *base* del espacio métrico $(E, d)$ si para todo $x \in E$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un índice $\lambda$ tal que $x \in G_\lambda$ y $\delta(G_\lambda) < \varepsilon$.

### *Ejemplo*

En $(\mathbb{R}, |\quad|)$, el conjunto $\mathcal{B} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}\}$ es una base de $\mathbb{R}$.

$\mathcal{B}$ es una familia numerable, pues se puede poner en correspondencia con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una familia a lo sumo numerable. Además, cada intervalo $(p, q)$, con $p, q \in \mathbb{Q}$ es un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$.

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces,

$$x - \frac{\varepsilon}{4} < x < x + \frac{\varepsilon}{4}$$

y se sabe que existen $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que

$$x - \frac{\varepsilon}{4} < p < x < q < x + \frac{\varepsilon}{4}$$

de donde,

$$x \in (p,q) \text{ y } \delta\big((p,q)\big) < \varepsilon.$$

Se caracterizan los espacios métricos separables.

**Teorema 5**. Todo espacio métrico $E$ es separable si y solo si tiene una base.

*Demostración.* Supóngase que $E$ es separable y sea $(x_n)$ una sucesión densa en el espacio $E$. Se considera la familia de bolas abiertas

$$\mathcal{B} = \{B(x_n, r) : r \in \mathbb{Q}^+\}$$

Se probará que $\mathcal{B}$ es una base de $E$.

En efecto, se designa con

$$A = \{(x_n, r) : x_n \in \{x_1, x_2, \cdots\} \text{ y } r \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Entonces, la aplicación que a cada $(x_n, r) \longrightarrow (n, r)$ definida de $A$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+$ es inyectiva. Por lo tanto, $A$ es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+$, que es a lo sumo numerable, de donde, $A$ es a lo sumo numerable. Y como se puede establecer una aplicación biyectiva entre $A$ y $\mathcal{B}$, entonces hay en $\mathcal{B}$ tantos elementos como en $A$, o sea, una cantidad a lo sumo numerable de bolas abiertas. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{B}$ es a lo sumo numerable.

Además, cada $B(x_n, r)$, con $r \in \mathbb{Q}^+$, es un conjunto abierto y no vacío de $E$. Luego, $\mathcal{B}$ es una familia a lo sumo numerable de conjuntos abiertos no vacíos de $E$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in E$. Entonces, como $(x_n)$ es una sucesión densa de $E$ se tiene que $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, de donde, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$ es $d\big(x, x_{n_k}\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto significa que existirá un punto $x_n$ tal que $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Luego, existe $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $d(x, x_n) < r < \frac{\varepsilon}{2}$, esto es, $x \in B(x_n, r)$, con $r \in \mathbb{Q}^+$.

Además, $\delta\big(B(x_n, r)\big) \leq 2r < \varepsilon$.

Así, queda demostrado que $\mathcal{B}$ es una base de $E$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \cdots\}$ una base de $E$. Como para cada $n$, $G_n$ es no vacío, se puede elegir un punto $x_n \in G_n$, para cada $n$.

Se designa con $\mathcal{C}$ el conjunto formado por todos estos puntos, es decir, $\mathcal{C} = \{x_1 , x_2, \cdots\}$.

Se demostrará que $\mathcal{C}$ es una familia a lo sumo numerable y denso en $E$.

En efecto, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es a lo sumo numerable, por lo tanto, $\mathcal{C}$ es a lo sumo numerable.

Se debe probar que $\mathcal{C}$ es denso en $E$, o sea, $E \subseteq \overline{\mathcal{C}}$. Sean $x \in E$ y $\varepsilon > 0$. Por ser $\mathcal{B}$ una base de $E$ existe un índice $n$ tal que $x \in G_n$ y $\delta(G_n) < \varepsilon$. Como $x_n \in G_n$, entonces

$$d(x_n, x) \leq \delta(G_n) < \varepsilon,$$

de donde, $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para algún índice $n$. Luego, $B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, esto es, $x \in \overline{\mathcal{C}}$.

Por lo tanto, $E$ es separable.

**Teorema 6.** Si $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \cdots\}$ es una base de un espacio métrico $E$, entonces todo conjunto abierto $H$ es la unión de un cierto número de conjuntos pertenecientes a dicha base.

*Demostración.* Supóngase que $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \cdots\}$ es una base de $E$ y sea $H$ un conjunto abierto. Sea $h \in H$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(h, \varepsilon) \subseteq H$. Por ser $\mathcal{B}$ una base, dados $h \in H \subseteq E$ y $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $G_n$ tal que $h \in G_n$ y $\delta(G_n) < \varepsilon$. Por lo tanto, $G_n \subseteq B(h, \varepsilon)$.

Así, para todo $h \in H$ existe un índice $n_h$ tal que $h \in G_{n_h} \subseteq$ $\subseteq B(h, \varepsilon) \subseteq H$. Por lo tanto, para todo $h \in H$, $\{h\} \subseteq G_{n_h} \subseteq H$, de donde,

$$\bigcup_{h \in H} \{h\} \subseteq \bigcup_{h \in H} G_{n_h} \subseteq H.$$

Por consiguiente, $H = \bigcup_{h \in H} G_{n_h}$.

*Observación*

Del teorema 6 surge que:

Si $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \cdots\}$ es una base de $E$ y $H$ es un conjunto abierto de $E$, entonces para $h \in H$ existe un índice $\alpha$ tal que $h \in G_\alpha \subseteq H$.

***Definición.*** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. Una familia $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de conjuntos se llama *cubrimiento del conjunto* $A$, cuando $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha$.

Un cubrimiento formado por una colección de conjuntos abiertos (cerrados) se llama *cubrimiento abierto* (*cerrado*).

Si una parte $\mathcal{K}'$ del cubrimiento $\mathcal{K}$ constituye también un cubrimiento del conjunto $A$, se dice que $\mathcal{K}'$ es un subcubrimiento del cubrimiento $\mathcal{K}$ o que $\mathcal{K}$ contiene un subcubrimiento $\mathcal{K}'$.

**Teorema 7. (Teorema de Lindëlof).** En un espacio métrico separable $E$, toda familia $\mathcal{H} = \{H_t\}_{t \in T}$ de conjuntos abiertos de $E$ contiene una sucesión $t_1, t_2, \cdots$ (finita o no) tal que

$$\bigcup_n H_{t_n} = \bigcup_{t \in T} H_t.$$

En otras palabras: En un espacio métrico separable, todo cubrimiento compuesto por conjuntos abiertos contiene un subcubrimiento a lo sumo numerable.

*Demostración.* Sea $E$ separable. Entonces. $E$ tiene una base $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \cdots\} = \{G_i\}_{i \in I}$. Sea $\mathcal{H} = \{H_t\}_{t \in T}$ una familia de abiertos de $E$. Como cada conjunto $H_t$, $t \in T$, es un abierto entonces, por el teorema 6, es unión de un cierto número de conjuntos pertenecientes a la base, de donde, cada conjunto $H_t$, $t \in T$, contiene a cada uno de esos conjuntos que forman esa unión.

Sea $k_1, k_2, \cdots$ la sucesión que consiste en números $i$ tales que $G_i \subseteq H_t$, para algún $t \in T$. A cada $k_n$ le corresponderá un cierto subíndice $t_n$ (obtenidos a partir de $t \in T$; $n$ pertenece a un conjunto de índices a lo sumo numerable, pues $\mathcal{B}$ es a lo sumo numerable) tal que

$$G_{k_n} \subseteq H_{t_n}$$

de donde,

$$\bigcup_n G_{k_n} \subseteq \bigcup_n H_{t_n} \subseteq \bigcup_{t \in T} H_t$$

Resta probar, entonces, que

$$\bigcup_{t \in T} H_t \subseteq \bigcup_n H_{t_n}$$

Sea $p \in \bigcup_{t \in T} H_t$. Entonces, $p \in H_t$ para algún $t \in T$, de donde, existe un índice $i$ tal que $p \in G_i \subseteq H_t$ para algún $t \in T$, pero entonces el número $i$ pertenece a la sucesión $k_1, k_2, \cdots$, de donde,

$$p \in \bigcup_n G_{k_n} \subseteq \bigcup_n H_{t_n}$$

Luego, $p \in \bigcup_n H_{t_n}$.

## Propiedades de los espacios métricos separables

1) Todo subespacio $S$ de un espacio métrico separable $E$ es un espacio métrico separable.

En efecto, sea $S$ un subespacio de un espacio métrico separable $E$ y supóngase que $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \cdots\}$ es una base de $E$. Se considera la sucesión de subconjuntos no vacíos $G_n \cap S$ que son abiertos en $S$.

Se designa $\mathcal{B}' = \{G_n \cap S\}_n$ ($n$ indica a lo sumo numerable, pues $\mathcal{B}'$ es una subfamilia de subconjuntos de $\mathcal{B}$ que es a lo sumo numerable). Se probará que $\mathcal{B}'$ es una base de $S$.

En efecto, sean $x \in S \subseteq E$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, como $\mathcal{B}$ es una base existe un índice $n_0$ tal que $x \in G_{n_0}$ y $\delta(G_{n_0}) < \varepsilon$. Luego, $x \in G_{n_0} \cap S$ y $\delta(G_{n_0} \cap S) < \varepsilon$ para algún índice $n_0$, pues $G_{n_0} \cap S \subseteq G_{n_0}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}'$ es una base de $S$, lo que demuestra que $S$ es separable.

2) El producto cartesiano de dos o, más generalmente, un número finito de espacios métricos separables es un espacio métrico separable.

Supóngase que $E$ y $E'$ son espacios métricos separables y sea $(x, y) \in E \times E'$. Entonces, $x \in E$ e $y \in E'$. Como $E$ es separable, entonces contiene una sucesión de puntos $x_1, x_2, \cdots$ tal que $x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$, y como $E'$ es separable, entonces contiene una sucesión de puntos $y_1, y_2, \cdots$ tal que $y = \lim_{k \to \infty} y_{n_k}$. Luego, $(x, y) = \lim_{k \to \infty} (x_{n_k}, y_{n_k})$. Por lo tanto, $E \times E'$ contiene una sucesión densa, o sea $E \times E'$ es un espacio métrico separable.

La generalización de la demostración a un número finito de conjuntos es inmediata.

Se deduce de aquí que $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es un espacio métrico separable.

## 5.4. Ejercicios propuestos

**1.** Pruebe que toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico $(E, d)$ está acotada.

**2.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico. Si $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy tal que existe una subsucesión $(x_{n_k})$ que converge a $x \in E$, demuestre que la sucesión $(x_n)$ también converge a *x*.

**3.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión de Cauchy y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera de $E$ tal que $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

**(a)** La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

**(b)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $a \in E$ si y solo si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a dicho punto.

**4.** Demuestre las siguientes afirmaciones cuando sean ciertas y, cuando no lo sean encuentre un contraejemplo.

**(a)** $\mathbb{Z}$ es completo con la métrica usual.

**(b)** Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{Z}$ con la métrica discreta es convergente.

**(c)** $\mathbb{Q}$ no es completo con la métrica usual.

**(d)** Un intervalo cualquiera con la métrica usual es completo.

**(e)** El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, xy \geq 1\}$ con la métrica euclídea no es completo.

**5.** Pruebe que los siguientes espacios métricos son completos:

**(a)** $(\mathbb{R}^n, d_2)$ **(b)** $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$

***(c)** $(C[a,b], d_A)$ ***(d)** $(S(\mathbb{R}), d)$

**6.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

Pruebe que:

**(a)** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de $(E, d)$ si y solo si lo es en $(E, d')$.

**(b)** Si $(E, d)$ es completo, entonces $(E, d')$ también lo es.

**7.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico arbitrario. Pruebe que:

**(a)** La unión de un número finito de subespacios completos es un espacio métrico completo.

**(b)** La intersección de un número arbitrario de subespacios completos es un espacio métrico completo.

**8.** Si $(E, d)$ y $(E', d')$ son espacios métricos isométricos y $E$ es completo, pruebe que $E'$ es completo.

***9.** Sea $\{(E_i, d_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos completos uniformemente acotados, esto es, existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que si $\sup_{i\in\mathbb{N}}\{\delta(E_i)\} < k$. Entonces, se define para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i d_i(x_i, y_i)$$

Pruebe que $d$ es una distancia y que $(E, d)$ es un espacio métrico completo.

***10.** Sean $(E, d)$ y $(E', d')$ espacios métricos, con $(E', d')$ completo. Sea $A$ el conjunto formado por todas las aplicaciones acotadas de $E$ en $E'$. Se define en $A$ la siguiente métrica:

$$d^*(f, g) = \sup_{x\in E}\{d'(f(x), g(x))\} \text{ para } f, g \in A$$

Pruebe que $(A, d^*)$ es un espacio métrico completo.

($f: E \longrightarrow E'$ es acotada si su imagen lo es; esto es, $\delta(f(E)) < \infty$)

**11.** Pruebe que si $R_1, R_2, \cdots$ forman una base del espacio $E$ y los subconjuntos $S_1, S_2, \cdots$ forman una base del espacio $E'$, entonces los conjuntos $R_m \times S_n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ forman una base del espacio $E \times E'$.

**12.** Pruebe que $E_1 \times E_2$ es separable si y solo si $E_1$ y $E_2$ son separables.

*Sugerencia:* Demuestre que:

**(a)** Para cada $a_2 \in E_2$ $(a_1 \in E_1)$ la aplicación $x_1 \longrightarrow (x_1, a_2)$ (respectivamente $x_2 \longrightarrow (a_1, x_2)$) es una isometría de $E_1$ (respectivamente $E_2$) sobre el subespacio cerrado $E_1 \times \{a_2\}$ (respectivamente $\{a_1\} \times E_2$).

**(b)** Sea $f: (E, d) \longrightarrow (E', d')$ una isometría, entonces $f$ es un homeomorfismo.

**(c)** Si $(E, d)$ es separable y $\Phi: (E, d) \longrightarrow (E', d')$ es una isometría, entonces $(E', d')$ es separable.

**13.** Sea $f: (E, d) \longrightarrow (E', d')$ continua y $(E, d)$ completo. Pruebe que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(E, d)$, entonces $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(E', d')$. Dé un contraejemplo en el caso en que $(E, d)$ no sea completo.

**14.** Sea $(E, d_T)$ el espacio métrico discreto. Pruebe que $E$ es separable si y solo si es a lo sumo numerable.

# Capítulo 6

# Espacios Métricos Compactos

## 6.1. Espacios métricos compactos

En este capítulo se introduce el concepto de espacio métrico compacto. Se estudian importantes propiedades de los conjuntos compactos. Además, se analiza la relación entre compacidad y funciones continuas, y el producto cartesiano de espacios compactos. Finalmente, se define un conjunto de números reales con importantes propiedades.

***Definición.*** Se dice que un espacio métrico $E$ es *compacto* si satisface la propiedad de Bolzano-Weierstrass; esto es, si se puede seleccionar de cada sucesión de puntos $(x_n)$ de este espacio una subsucesión convergente hacia algún punto $x$ de $E$, o sea, si existen una sucesión de índices

$$n_1 < n_2 < \cdots$$

y un punto $x$ de $E$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

Cuando se dice que un conjunto $A$ es *compacto*, se entiende que el conjunto $A$ tratado como un espacio forma un espacio compacto; hablando estrictamente, que toda sucesión de puntos pertenecientes al conjunto $A$ contiene una subsucesión que converge hacia un punto que también pertenece a $A$; esto es, para toda $(a_n) \subseteq A$ existen $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$ y $a \in A$ tal que $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$; es decir, $A$ es *compacto* si satisface la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Luego, *$A$ no es compacto* cuando existe una sucesión de puntos de $A$ tal que no contiene ninguna subsucesión que converja hacia un punto de $A$.

*Ejemplos*

1) $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ con la métrica usual es compacto.

A partir del teorema de Bolzano-Weierstrass visto en Análisis I, se sabe que toda sucesión acotada de números reales $(x_n)$ contiene una subsucesión convergente (ver apéndice al final de este capítulo).

Esta propiedad permite probar que $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ con la métrica usual es un espacio compacto, ya que toda sucesión de puntos del conjunto $[a, b]$ está acotada y, por lo tanto, contiene una subsucesión convergente. Como este conjunto es cerrado, el punto al cual converge pertenece a él.

De manera análoga se puede probar que todo conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ con la métrica usual es compacto.

2) Sea $(\mathbb{R}, |\quad|)$ y considérese $A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, $A$ no es compacto.

En efecto, se considera la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ de puntos de $A$ que converge a cero, y, por lo tanto, toda subsucesión suya también converge a cero; pero $0 \notin A$. Luego, la sucesión $(a_n)$ de puntos de $A$ no contiene ninguna subsucesión que converja a un punto de $A$, de donde, $A = (0,1)$ no es compacto.

3) Sea $(E, d)$ un espacio métrico arbitrario y sea $A \subseteq E$ tal que $A$ es un conjunto finito. Entonces, $A$ es necesariamente compacto.

En efecto, por ser A un conjunto finito toda sucesión $(a_n)$ de puntos de $A$ es tal que al menos uno de los elementos de $A$, por ejemplo $b$, aparece un número infinito de veces en la sucesión. Luego $(b, b, \cdots)$ es una subsucesión de $(a_n)$ que converge al punto $b$ que pertenece a $A$.

4) $(\mathbb{R}, |\quad|)$ no es un espacio métrico compacto.

En efecto, si se considera la sucesión de números reales $(a_n) = (2n)$ se tiene que converge a infinito y, por lo tanto, cualquier subsucesión de ella converge a infinito.

## Propiedades de los espacios métricos compactos

**Teorema 1.** Un espacio métrico compacto $(E, d)$ es completo.

*Demostración.* Sea $(x_n)$ una sucesión de Cauchy de puntos de $E$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)$ es de Cauchy, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ $d(x_n, x_m) < {}^{\varepsilon}/_{2}$.

Además, por hipótesis, $E$ es compacto, de donde, existe una subsucesión convergente $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in E$ . De aquí, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$ $d(x_{n_k}, x) < {}^{\varepsilon}/_{2}$.

Se observa que $k_0 \in \mathbb{N}$ puede elegirse de modo tal que $n_{k_0} > n_0$. Pues si $n_{k_0} \leq n_0$ para todo $k_0 \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\{n_k\}$ sería finito y, por lo tanto, la aplicación que a cada $k \longrightarrow n_k$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ no sería inyectiva y entonces, no sería estrictamente creciente, lo que contradice la definición de subsucesión. Luego, como $k > k_0$ implica $n_k > n_{k_0} > n_0$, resulta que $n_k > n_0$ y como también $n > n_0$, entonces $d(x_n, x_{n_k}) < {}^{\varepsilon}/_{2}$.

Luego, aplicando la desigualdad triangular surge que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$$

para todo $n > n_0$.

Es decir, se ha probado que existe $x \in E$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, esto es, $E$ es completo.

*Observaciones*

1. Si se aplica el teorema 1 al espacio métrico $([a, b], |\quad|)$ se tiene el siguiente resultado: Como $([a, b], |\quad|)$ es un espacio métrico compacto, entonces $([a, b], |\quad|)$ es un espacio métrico completo.

2. Del teorema 1, se deduce: "Si $E$ no es un espacio métrico completo, entonces $E$ no es un espacio compacto".

Por ejemplo, se ha visto que el espacio métrico $((0,1), |\quad|)$ no es un espacio métrico completo, de donde, se deduce que $((0,1), |\quad|)$ no es un espacio métrico compacto.

3. En general, la recíproca de este teorema no es cierta, esto es, si $E$ es un espacio métrico completo, entonces $E$ no es necesariamente compacto.

Por ejemplo, $(\mathbb{R}, |\quad|)$ es completo y no es compacto.

**Teorema 2**. Todo espacio métrico compacto $(E, d)$ es separable. Además, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos cuyo conjunto $A_\varepsilon = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ es tal que $d(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$, para todo $x \in E$, es decir que todo punto $x$ del espacio $E$ se encuentra a una distancia menor que $\varepsilon$ de algún punto del conjunto $A_\varepsilon$.

*Demostración.* Se define inductivamente el conjunto $A_\varepsilon$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $p_1$ un punto arbitrario de $E$ y $p_2$ otro punto de $E$ tal que $d(p_1, p_2) \geq \varepsilon$, suponiendo que tal punto existiese; en caso contrario, se tomaría $A_\varepsilon = \{p_1\}$.

Sea $p_3$ un punto arbitrario de $E$ tal que $d(p_3, p_1) \geq \varepsilon$ y $d(p_3, p_2) \geq \varepsilon$, suponiendo que tal punto existiese; si no existiese, se tomaría $A_\varepsilon = \{p_1, p_2\}$.

Repitiendo este razonamiento, sea $p_n$ un punto arbitrario de $E$ tal que $d(p_n, p_m) \geq \varepsilon$, para todo $m < n$, suponiendo que exista tal punto $p_n$; si no existiese, se tomaría $A_\varepsilon = \{p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}\}$.

Este razonamiento puede realizarse solo un número finito de veces, pues en caso contrario, la sucesión $(p_n)$ de puntos de $E$ tendría que contener una subsucesión convergente hacia un punto de $E$, en virtud de la hipótesis de compacidad de $E$, lo cual es imposible pues ninguna subsucesión de $(p_n)$ es de Cauchy por la forma en que se obtuvo $(p_n)$ y, por lo tanto, no puede ser convergente.

Así, se ha definido el conjunto $A_\varepsilon$, y es claro que todo punto de $E$ dista de $A_\varepsilon$ en menos que $\varepsilon$. En efecto, si $x$ es un punto cualquiera de $E$ tal que $x \notin A_\varepsilon$, entonces

$$d(x, p_j) < \varepsilon \text{ para todo } j = 1,2, \cdots, k$$

de donde,

$$d(x, A_\varepsilon) = \inf_{\substack{1 \leq j \leq k \\ p_j \in A_\varepsilon}} \{d(x, p_j)\} \leq d(x, p_j) < \varepsilon$$

para todo $j = 1,2, \cdots, k$.

Por otro lado, si $x \in A_\varepsilon$, entonces $x = p_j$ para algún $j = 1,2,\cdots,k$, de donde,

$$d(x, A_\varepsilon) = 0 < \varepsilon.$$

Resta demostrar que el espacio $E$ es separable. Considérese

$$B = A_1 \cup A_{1/2} \cup \cdots \cup A_{1/n} \cup \cdots = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{1/n}.$$

Este conjunto, por ser unión a lo sumo numerable de conjuntos a lo sumo numerables, es a lo sumo numerable (Ascheri y Reid, 2008, capítulo 1).

Además, es denso en $E$, pues para todo $x \in E$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$d(x, B) \leq d\left(x, A_{1/n}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{pues } A_{1/n} \subseteq B \text{ (ver Nota 1)}$$

Luego, existe un punto $b \in B$ tal que $d(x, b) < \frac{1}{n}$ (ver Nota 2). Por la propiedad arquimedeana, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. De donde, para todo $n > n_0$

$$d(x, b) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, existe $b \in B$ tal que $b \in B(x, \varepsilon)$, de donde, $x \in \overline{B}$. De este modo $E \subseteq \overline{B}$, lo que implica que $B$ es denso en $E$. Por tanto, $E$ es separable.

***Notas***

1. Sea $(E, d)$ un espacio métrico, $A$ y $B$ subconjuntos no vacíos de $E$ tales que $A \subseteq B \subseteq E$. Entonces, $d(x, B) \leq d(x, A)$ para todo $x \in E$.

Sea $a \in A$. Como $A \subseteq B$, entonces $a \in B$, de donde

$$d(x, B) \leq d(x, a)$$

Luego, cualquiera sea $a \in A$, $d(x, B) \leq d(x, a)$, de donde, $d(x, B) \leq d(x, A)$.

2. Sea $(E, d)$ un espacio métrico, $B$ un subconjunto no vacío de $E$ y $x \in E$ tal que $d(x, B) < \frac{1}{n}$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $b \in B$ tal que $d(x, b) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es inmediato, a partir de la definición de ínfimo.

*Observación*

Este teorema se puede enunciar también como sigue: "Todo espacio métrico compacto $(E, d)$ es separable y totalmente acotado".

En efecto, se ha probado que para todo $x \in E$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $p_1, p_2, \cdots, p_k$ de $E$ tales que $d(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$, siendo $A_\varepsilon = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$.

Luego, existe $p_j \in A_\varepsilon$, $j = 1,2, \cdots, k$, digamos $p_{j_0}$ tal que $d(x, p_{j_0}) < \varepsilon$, de donde $x \in B(p_{j_0}, \varepsilon) \subseteq B_C(p_{j_0}, \varepsilon)$ para algún $p_{j_0} \in A_\varepsilon$; por lo tanto, $x \in \bigcup_{j=1}^{k} B_C(p_j, \varepsilon)$, lo que implica que $E$ es un conjunto totalmente acotado.

**Teorema 3.** Todo espacio métrico compacto es acotado.

*Demostración 1.* Sea $(E, d)$ un espacio métrico compacto y considérese $\varepsilon = 1$. Se debe probar que $E$ es acotado. Esto es inmediato de la definición inductiva del conjunto finito $A_\varepsilon$ del teorema 2. En efecto, como

$$E = A_1 \cup (E - A_1)$$

resulta que

$$\delta(E) = \delta\big(A_1 \cup (E - A_1)\big) \leq \delta(A_1) + \delta(E - A_1) + d(A_1, E - A_1) <$$
$$< \delta(A_1) + 2,$$

debido a que $d(A_1, E - A_1) \leq d(p_j, x) < 1$ cualesquiera sean $p_j \in A_1$ y $x \in E - A_1$ y a que $\delta(E - A_1) \leq 1$. Además, como $A_1$ un conjunto finito, entonces es acotado

Por lo tanto, $E$ es acotado.

*Demostración 2.* Como $E$ es compacto entonces, por el teorema 2, $E$ es totalmente acotado, de donde, $E$ es acotado.

**Teorema 4.** Un subconjunto compacto $A$ de un espacio métrico arbitrario $E$ es un conjunto cerrado.

*Demostración.* Sea $x \in \overline{A}$. Entonces, existe $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ en $E$. Como $A$ es compacto, por hipótesis, existen $(x_{n_k})$ subsucesión de $(x_n)$ y un punto $a \in A$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. Pero además, como $(x_{n_k})$ es una subsucesión de $(x_n)$, entonces $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Luego, por unicidad del límite de una sucesión, $x = a \in A$. Por lo tanto, $\overline{A} \subseteq A$.

*Observación*

De los teoremas 3 y 4 resulta que: Un subconjunto compacto $A$ de un espacio métrico arbitrario $E$ es un conjunto cerrado y acotado.

**Teorema 5**. Todo subconjunto cerrado $F$ de un espacio métrico compacto $E$ es compacto.

*Demostración.* Sea $(x_n)$ una sucesión arbitraria de puntos de $F \subseteq E$. Como, por hipótesis, $E$ es compacto, existe $(x_{n_k})$ subsucesión de $(x_n)$ que converge a un punto $x \in E$. Luego, $x \in \overline{F}$ y, como $F$ es cerrado, $x \in F$. Esto demuestra la compacidad de $F$.

**Teorema 6. (Cantor).** En un espacio métrico compacto $E$, toda sucesión $(F_n)$ de conjuntos cerrados no vacíos encajados de $E$ (es decir, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$) satisface

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

*Demostración.* Como cada conjunto $F_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se puede elegir un punto $x_n \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Queda así determinada una sucesión $(x_n)$ de puntos del espacio compacto $E$. Luego, existen $(x_{n_k})$ subsucesión de $(x_n)$ y $x \in E$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Cada uno de los conjuntos $F_n$ contiene a casi todos los términos de la sucesión $(x_n)$, excepto a lo sumo un número finito y, por lo tanto, a casi todos los términos de la subsucesión $(x_{n_k})$. Luego, $x \in \overline{F_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Y como los conjuntos $F_n$ son cerrados, se concluye que $x \in F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y así, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

**Teorema 7. (Borel).** Si $E$ es un espacio métrico compacto tal que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, siendo $G_n$ conjuntos abiertos, entonces existe un índice $m$ tal que $E = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_m = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$.

En otras palabras: todo cubrimiento numerable de un espacio métrico compacto $E$ compuesto por conjuntos abiertos contiene un subcubrimiento finito.

*Demostración.* Supóngase que $E$ es un espacio métrico compacto tal que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, siendo $G_n$ conjuntos abiertos. Supóngase, además, que no existe un índice $m$ tal que $E = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ y considérense los siguientes conjuntos:

$$F_1 = E - G_1$$

$$F_2 = E - (G_1 \cup G_2)$$

$$\vdots$$

$$F_n = E - (G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n)$$

$$\vdots$$

Por lo tanto, $F_n$ es un cerrado de $E$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por ser el complemento de un conjunto abierto. Además, $F_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pues si algún $F_n$ fuera vacío, entonces $E = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, lo cual sería una contradicción. Claramente, también se satisface la condición $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$.

Entonces, como $E$ es compacto, por el teorema de Cantor, se concluye que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

En virtud de las leyes de De Morgan, se deduce que

$$E \neq E - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E - F_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n).$$

Por otro lado, por hipótesis, se tiene que

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n) \subseteq E$$

entonces,

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n).$$

Luego, se ha llegado a una contradicción. Por lo tanto, existe un índice $m$ tal que $E = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$.

La siguiente caracterización de la noción de compacidad es muy importante. De hecho, a veces se toma como definición de espacio métrico compacto.

**Teorema 8. (Borel-Lebesgue).** Si $E$ es un espacio métrico compacto tal que $E = \bigcup_t G_t$, siendo $G_t$ conjuntos abiertos, entonces existe un sistema finito de índices $t_1, t_2, \cdots, t_m$ tal que $E = \bigcup_{i=1}^{m} G_{t_i}$.

En otras palabras: todo cubrimiento de un espacio métrico compacto $E$ compuesto por conjuntos abiertos contiene un subcubrimiento finito.

*Demostración.* Supóngase que $E$ es un espacio métrico compacto tal que $E = \bigcup_t G_t$, siendo $G_t$ conjuntos abiertos. Por ser $E$ compacto, entonces $E$ es separable (por el teorema 2) y, por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Lindelöf en virtud del cual todo cubrimiento del espacio separable $E$ compuesto por conjuntos abiertos $G_t$ contiene un subcubrimiento a lo sumo numerable.

Así, si el subcubrimiento es numerable, entonces $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{t_n}$, siendo $G_{t_n}$ conjuntos abiertos. Por el teorema de Borel (teorema 7), este subcubrimiento contiene un subcubrimiento finito $G_{t_1}, G_{t_2}, \cdots, G_{t_m}$ tal que

$$E = G_{t_1} \cup G_{t_2} \cup \cdots \cup G_{t_m} = \bigcup_{i=1}^{m} G_{t_i},$$

y el teorema queda demostrado.

Si el subcubrimiento es finito, entonces el teorema es inmediato.

*Observaciones*

1. Un espacio $E$ tiene la propiedad de Borel-Lebesgue si: todo cubrimiento de $E$ compuesto por conjuntos abiertos contiene un subcubrimiento finito; más explícitamente, para todo cubrimiento $\{G_t\}_{t\in T}$ de $E$ compuesto por conjuntos abiertos existe un sistema finito de índices $t_1, t_2, \cdots, t_m$ tal que $E = \bigcup_{i=1}^{m} G_{t_i}$.

2. En virtud de la observación 1, el teorema de Borel-Lebesgue se puede enunciar como sigue: Si $E$ es un espacio métrico compacto, entonces $E$ posee la propiedad de Borel- Lebesgue.

3. El teorema de Borel-Lebesgue puede enunciarse de forma más general como sigue:

Sea $A$ un espacio compacto y sea $\{G_t\}_{t\in T}$ una familia dada de conjuntos abiertos tal que $A \subseteq \bigcup_{t\in T} G_t$ en un espacio métrico arbitrario $E$. Entonces, existe un sistema finito de índices $t_1, t_2, \cdots, t_m$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} G_{t_i}$. Esto es, si $A$ es un espacio compacto en un espacio métrico arbitrario $E$, entonces $A$ tiene la propiedad de Borel-Lebesgue.

En efecto, sea $A \subseteq \bigcup_{t\in T} G_t$. Como $A$ es separable, ya que es compacto, se puede aplicar el teorema de Lindelöf, en virtud del cual todo cubrimiento de $A$ compuesto por conjuntos abiertos $G_t$ contiene un subcubrimiento a lo sumo numerable.

Si el subcubrimiento es finito, entonces resulta inmediato. Si el subcubrimiento es numerable, entonces $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{t_n}$. Aplicando el teorema de Borel a este cubrimiento, se puede elegir un subcubrimiento finito $G_{t_1}, G_{t_2}, \cdots, G_{t_m}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} G_{t_i},$$

quedando así demostrado que $A$ tiene la propiedad de Borel-Lebesgue.

El siguiente resultado puede verse como un refinamiento del teorema de Cantor.

**Teorema 9. (Riesz).** Si $E$ es un espacio métrico compacto y $\{F_t\}_{t\in T}$ es una familia de conjuntos cerrados de $E$ tal que $F_{t_1} \cap F_{t_2} \cap \cdots \cap F_{t_m} \neq \emptyset$ para todo sistema finito de índices, entonces toda la familia tiene una intersección no vacía, es decir, $\bigcap_{t\in T} F_t \neq \emptyset$.

*Demostración.* Supóngase que $\bigcap_{t\in T} F_t = \emptyset$. Entonces, $\{E - F_t\}_{t\in T}$ sería una familia de abiertos de $E$ tal que

$$E = E - \bigcap_{t\in T} F_t = \bigcup_{t\in T} (E - F_t).$$

Luego, esta familia es un cubrimiento abierto del espacio compacto $E$ y, entonces, por el teorema de Borel-Lebesgue (teorema 8), este

cubrimiento contiene un subcubrimiento finito $E - F_{t_1}, E - F_{t_2}, \ldots, E - F_{t_m}$ tal que

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} (\mathrm{E} - \mathrm{F}_{t_i}).$$

De aquí, en virtud de las leyes de De Morgan, se obtiene

$$\emptyset = E - \bigcup_{i=1}^{m} (E - F_{t_i}) = \bigcap_{i=1}^{m} F_{t_i}$$

lo cual es absurdo, pues contradice la hipótesis. Luego, $\bigcap_{t \in T} F_t \neq \emptyset$.

*Observaciones*

1. Se dice que una familia $\{F_t\}_{t \in T}$ de conjuntos tiene *la propiedad de la intersección finita (P.I.F.)*, si toda subfamilia finita $\{F_{t_1}, F_{t_2}, \cdots, F_{t_m}\}$ posee una intersección no vacía; esto es, si $F_{t_1} \cap F_{t_2} \cap \cdots \cap F_{t_m} \neq \emptyset$ para todo sistema finito de índices.

2. Se dice que un espacio $E$ tiene *la propiedad de Riesz*, si una familia $\{F_t\}_{t \in T}$ de conjuntos cerrados de este espacio $E$ que verifique la P.I.F. tiene, ella misma, una intersección no vacía, es decir, $\bigcap_{t \in T} F_t \neq \emptyset$.

3. En virtud de las observaciones anteriores, el teorema de Riesz (Teorema 9) se puede enunciar del siguiente modo:

Si $E$ es un espacio métrico compacto, entonces $E$ posee la propiedad de Riesz, esto es, si $E$ es un espacio métrico compacto y $\{F_t\}_{t \in T}$ es una familia de conjuntos cerrados de $E$ tal que verifique la P.I.F., entonces toda la familia tiene una intersección no vacía, es decir, $\bigcap_{t \in T} F_t \neq \emptyset$.

***Definición.*** Se dice que un espacio métrico $E$ es *contablemente compacto*, si todo conjunto infinito de $E$ contiene un punto de acumulación que pertenece al espacio $E$.

Cuando se dice que un conjunto $A$ de $E$ es *contablemente compacto*, se entiende que el conjunto $A$ tratado como un espacio forma un espacio contablemente compacto, hablando estrictamente, si todo con-

junto infinito $B$ de $A$ contiene un punto de acumulación que pertenece al espacio $A$.

**Teorema 10.** Sea $E$ un espacio métrico arbitrario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $E$ es compacto, o sea, $E$ posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass.
2) $E$ posee la propiedad de Borel-Lebesgue.
3) $E$ es contablemente compacto.

*Demostración.*

1) $\Longrightarrow$ 2) Ya fue probado en el teorema 8 de Borel-Lebesgue.

2) $\Longrightarrow$ 3) Supóngase que $A$ es un subconjunto de $E$ con la propiedad de Borel- Lebesgue que no posee puntos de acumulación en $E$.

Como ningún punto de $E$ es punto de acumulación de $A$, entonces para cada $x \in E$ existe una bola $B(x, \varepsilon)$ que no corta a $A$ o bien solo lo corta en el propio punto $x$. **(1)**

Se observa que la familia $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in E}$ es un cubrimiento abierto de $E$, pues para cada punto $x \in E$, se tiene que $x \in B(x, \varepsilon)$, cualquiera sea $\varepsilon > 0$ y, por lo tanto, $\bigcup_{x \in E}\{x\} \subseteq \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$, cualquiera sea $\varepsilon > 0$. Se tiene así la igualdad $E = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$, cualquiera sea $\varepsilon > 0$.

Se toma, entonces, la familia $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in E}$ siempre que $\varepsilon > 0$ verifique la condición **(1)** como un cubrimiento abierto de $E$.

Como $E$ posee la propiedad de Borel-Lebesgue, este cubrimiento admite un subcubrimiento finito, es decir, es posible elegir un subcubrimiento finito $\{B(x_i, \varepsilon_i): i = 1, 2, \cdots, n\}$ de modo tal que

$$A \subseteq E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_i).$$

Como $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_i)$ contiene un máximo de $n$ puntos de $A$, ya que cada bola tiene uno o ningún punto de $A$, entonces se concluye que $A$ es un conjunto finito. En consecuencia, se ha probado que si $A$ es un subconjunto de $E$ con la propiedad de Borel-Lebesgue que no posee puntos de acumulación en $E$, entonces $A$ es un conjunto finito. Por lo tanto, todo subconjunto infinito de $E$ con la propiedad de Borel-Lebesgue contiene un punto de acumulación en $E$.

3) $\Longrightarrow$ 1) Sea $(x_n)$ una sucesión de puntos de $E$ y se designa con $B$ el conjunto formado con los términos de la sucesión $(x_n)$; esto es,

$$B = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

Si $B$ es un conjunto finito, entonces la sucesión $(x_n)$ es tal que al menos uno de los puntos de $E$, por ejemplo $b$, se repite un número infinito de veces en la sucesión $(x_n)$. Luego, $(b, b, \cdots)$ es una subsucesión de $(x_n)$ que converge al punto $b \in E$. Por lo tanto, $E$ es compacto.

Por otra parte, si $B$ es infinito, entonces por ser $E$ contablemente compacto, $B$ tiene un punto de acumulación $x \in E$. Pero entonces, cada una de las bolas $B\left(x, \frac{1}{k}\right)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, contiene un número infinito de puntos de $B$ y, por lo tanto, un número infinito de términos de la sucesión $(x_n)$. Se construye la subsucesión $\left(x_{n_k}\right)$ de $(x_n)$ del siguiente modo:

Se toma $x_{n_1} \in B(x, 1)$

Se escoge $x_{n_2} \in B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ de modo tal que $n_2 > n_1$.

Se elige $x_{n_3} \in B\left(x, \frac{1}{3}\right)$ tal que $n_3 > n_2$.

Se continúa la construcción de manera análoga. Obsérvese que es posible continuar escogiendo un término para la sucesión $\left(x_{n_k}\right)$ porque en cada bola hay infinitos términos de la sucesión $(x_n)$. La sucesión $\left(x_{n_k}\right)$ se ha elegido de modo tal que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que $\left(x_{n_k}\right)$ es una subsucesión de $(x_n)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimedeana, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$, de donde, para todo $k > k_0$ se verifica que

$$x_{n_k} \in B\left(x, \frac{1}{k}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{k_0}\right) \subseteq B(x, \varepsilon).$$

Es decir, $d\left(x_{n_k}, x\right) < \varepsilon$ para todo $k > k_0$.

Y esto implica que

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x, \text{ con } x \in E.$$

Luego, $E$ es compacto.

*Observación*

El teorema 10 se puede enunciar de forma más general como sigue:

Sea $(E, d)$ un espacio métrico arbitrario y sea $A \subseteq E$. Entonces, son equivalentes:

1) $A$ es compacto o sea, $A$ posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

2) $A$ posee la propiedad de Borel-Lebesgue.

3) $A$ es contablemente compacto.

**Teorema 11.** En un espacio métrico compacto $E$, la familia de conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados es a lo sumo numerable.

*Demostración.* Como un espacio métrico compacto es separable (teorema 3), entonces $E$ tiene una base. Se designa con $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, \cdots\}$ la base de $E$. Pero entonces, todo conjunto abierto $H$ es la unión de un cierto número de estos conjuntos. Si además, el conjunto $H$ es cerrado (y por lo tanto, es compacto, por el teorema 5), se puede suponer que este número es finito (en virtud del teorema de Borel-Lebesgue). Por lo tanto, se puede asignar a todo conjunto abierto-cerrado de $H$ un sistema finito de números naturales $k_1$, $k_2, \cdots, k_n$ de forma que

$$H = G_{k_1} \cup G_{k_2} \cup \cdots \cup G_{k_n}.$$

Evidentemente, a conjuntos distintos $H$ corresponden distintos sistemas de números naturales. Por lo tanto, a lo sumo hay tantos conjuntos abiertos-cerrados como sistemas finitos de números naturales, y el número de estos es a lo sumo numerable (pues estos son obtenidos a partir de $\mathcal{B}$ que es a lo sumo numerable). Luego, hay una cantidad a lo sumo numerable de conjuntos abiertos y cerrados.

A continuación, se estudia el comportamiento de los conjuntos compactos bajo funciones continuas.

## 6.2. Aplicaciones continuas de espacios compactos

**Teorema 12.** Sean $(E, d)$ y $(E', d')$ espacios métricos, $E$ compacto y $f : E \longrightarrow E'$ continua. Entonces, $f(E)$ es compacto. Es decir, la

imagen continua de un espacio compacto es un espacio compacto; esto es, la compacidad es invariante por aplicaciones continuas.

*Demostración.* Sea $(y_n)$ una sucesión de puntos de $f(E)$, es decir, $y_n = f(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo $(x_n)$ una sucesión de puntos de $E$. Como, por hipótesis, $E$ es un espacio métrico compacto, la sión $(x_n)$ de puntos de $E$ contiene una subsucesión $(x_{n_k})$ convergente a $x \in E$. Por la continuidad de $f$, se deduce que $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$, es decir, $y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x) \in f(E)$, lo que demuestra que el espacio $f(E)$ es compacto.

**Teorema 13.** Si $(E, d)$ es un espacio compacto, $F$ es un subconjunto cerrado de $E$ y $f$ es una función continua definida en $E$, entonces $f(F)$ es un subconjunto cerrado del espacio $f(E)$.

*Demostración.* Como $F$ es un subconjunto cerrado del espacio compacto $E$ entonces, en virtud del teorema 5, $F$ es compacto. Luego, por el teorema 12, como $f$ es una función continua, entonces $f(F)$ es un subconjunto compacto del espacio $f(E)$ y, por lo tanto, por el teorema 4, $f(F)$ es un subconjunto cerrado del espacio $f(E)$.

**Teorema 14.** Si la función $f$ continua e inyectiva aplica el espacio compacto $(E, d)$ sobre un espacio métrico $(E', d')$, entonces $f$ es un homeomorfismo.

*Demostración.* La función $f$ es continua y biyectiva, por hipótesis. Solo resta probar que la función inversa $g = f^{-1}$ es continua.

Sea $F$ un subconjunto cerrado del espacio $E$. Entonces,

$$g^{-1}(F) = (f^{-1})^{-1}(F) = f(F), \text{ pues } f \text{ es biyectiva.}$$

Por el teorema 13, $f(F)$ es un cerrado del espacio $f(E) = E'$, pues $f$ es sobreyectiva; esto es, $(f^{-1})^{-1}(F) = g^{-1}(F)$ es un cerrado del espacio $E'$, lo cual demuestra que $g = f^{-1}$ es continua.

Merece la pena destacar una consecuencia importante que se obtiene tomando $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ como espacio métrico de llegada de la función $f$.

**Teorema 15. (Generalización del Teorema de Weierstrass)**. Toda función real continua $f$ definida en un espacio compacto $E$ está

acotada y alcanza efectivamente su supremo y su ínfimo en $E$. Esto es, $f$ tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en puntos de $E$.

*Demostración.* Como $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $E$ es un espacio métrico compacto entonces, por el teorema 12, $f(E)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, es un conjunto cerrado y acotado (por los teoremas 3 y 4).

Como el conjunto $f(E)$ es acotado, existen $s = \sup_{x\in E}\{f(x)\}$ e $i = \inf_{x\in E}\{f(x)\}$. Y por ser un conjunto cerrado, el supremo $s$ y el ínfimo $i$ pertenecen a $f(E)$. Por lo tanto, existen $x_1, x_2 \in E$ tales que $f(x_1) = s$ y $f(x_2) = i$, o sea, existen $x_1, x_2 \in E$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in E$. Por lo tanto, $f$ alcanza su supremo y su ínfimo en $E$.

La versión que se conoce del siguiente teorema afirma que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado, con valores reales, es uniformemente continua. En realidad, la demostración no utiliza que el conjunto de definición sea un intervalo, sino solamente que es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, es decir, compacto. Por lo tanto, el siguiente resultado generaliza la versión conocida de Análisis.

**Teorema 16. (Generalización del Teorema de Heine sobre continuidad uniforme).** Una función continua $f$ definida en un espacio métrico compacto $E$ es uniformemente continua.

*Demostración.* Supóngase que $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ es una función continua definida en un espacio métrico compacto $(E, d)$.

Por reducción al absurdo, supóngase que $f$ no es uniformemente continua. Entonces, existirá un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existirán puntos $x, x' \in E$ que satisfagan las condiciones

$$d(x, x') < \delta \quad \text{y} \quad d'\big(f(x), f(x')\big) \geq \varepsilon.$$

De aquí sigue, en particular, para $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, que existen $x_n, x'_n$ en el espacio $E$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ y $d'\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \geq \varepsilon$.

Quedan así determinadas dos sucesiones $(x_n)$ y $(x'_n)$ de puntos del espacio compacto $E$. Se puede seleccionar una subsucesión $\left(x_{n_k}\right)$ de

$(x_n)$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} p$, con $p \in E$. Puesto que $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, se deduce que también $x'_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} p$.

Como $f$ es continua, se tiene que $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(p)$ y $f(x'_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(p)$.

Luego, $d'\left(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, lo cual es una contradicción, ya que $d'(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se concluye que $f$ es uniformemente continua.

## 6.3. Producto cartesiano de espacios compactos

**Teorema 17.** El producto cartesiano $E \times E'$ de los espacios compactos $(E, d)$ y $(E', d')$ es un espacio compacto.

*Demostración.* Sea $z_n = (x_n, y_n) \in E \times E'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $x_n \in E$, $y_n \in E'$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ser el espacio $E$ compacto, se puede elegir una subsucesión $(x_{n_k})$ de la sucesión $(x_n)$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in E$.

Considérese la subsucesión $(y_{n_k})$ de la sucesión $(y_n)$ (se escogen los mismos subíndices que los de la subsucesión de $(x_n)$). Como $(y_{n_k})$ es una sucesión de puntos de $E'$ y $E'$ es un espacio compacto, se puede elegir una subsucesión $\left(y_{n_{k_r}}\right)$ tal que $\lim_{r\to\infty} y_{n_{k_r}} = y \in E'$.

Si se toma ahora la subsucesión $\left(x_{n_{k_r}}\right)$ de $(x_{n_k})$, se sabe que satisface que

$$\lim_{r\to\infty} x_{n_{k_r}} = x \in E.$$

Resulta así que se ha seleccionado la subsucesión $\left(z_{n_{k_r}}\right) = \left((x_{n_{k_r}}, y_{n_{k_r}})\right)$ de la sucesión $(z_n)$ que converge hacia el punto $(x, y) \in E \times E'$. Por lo tanto, $E \times E'$ es un espacio compacto.

*Observaciones*

1. El producto cartesiano de un número finito de espacios compactos es un espacio compacto.

Este caso se puede reducir, por inducción, al producto de dos espacios compactos (teorema 17).

2. $I^n = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ cubo $n$-dimensional o hipercubo (subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la métrica $d_2$) es un espacio compacto.

En efecto, como cada uno de los conjuntos $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$ de $\mathbb{R}$ con la métrica usual es un espacio compacto, por la observación 1, resulta que $I^n$ es un espacio compacto.

3. De la observación anterior surge que para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con la métrica $d_2$, el concepto de compacto es equivalente al concepto de cerrado y acotado.

En efecto, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un espacio compacto entonces, por los teoremas 3 y 4, $A$ es un conjunto cerrado y acotado.

Recíprocamente, supóngase que $A$ es un conjunto cerrado y acotado. Por ser $A$ un conjunto acotado, existe un hipercubo $H$ tal que $A \subseteq H$. Como $H$ es un espacio compacto, por la observación 2, y $A$ es un subconjunto cerrado del compacto $H$, entonces $A$ es un espacio compacto (por el teorema 5).

4. En general, un conjunto puede ser cerrado y acotado pero esto no implica necesariamente que sea compacto. Por ejemplo, en $(E, d_T)$ considérese un conjunto $A \subseteq E$ tal que $A$ es infinito. Se sabe que $A$ es un conjunto cerrado y acotado, pero no es compacto.

Finalmente, se definirá un conjunto de números reales con importantes propiedades.

## 6.4. El conjunto de Cantor

Sea $T_0$ el intervalo cerrado [0, 1]. Se divide al intervalo en tres partes iguales y se sustrae el tercio medio, o sea $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Se designa mediante $T_1$ el conjunto cerrado resultante, que es unión de dos intervalos cerrados de longitud $1/3$, es decir

$$T_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Se divide cada uno de estos intervalos cerrados que han quedado en tres partes iguales y se eliminan los intervalos abiertos centrales, es decir, $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

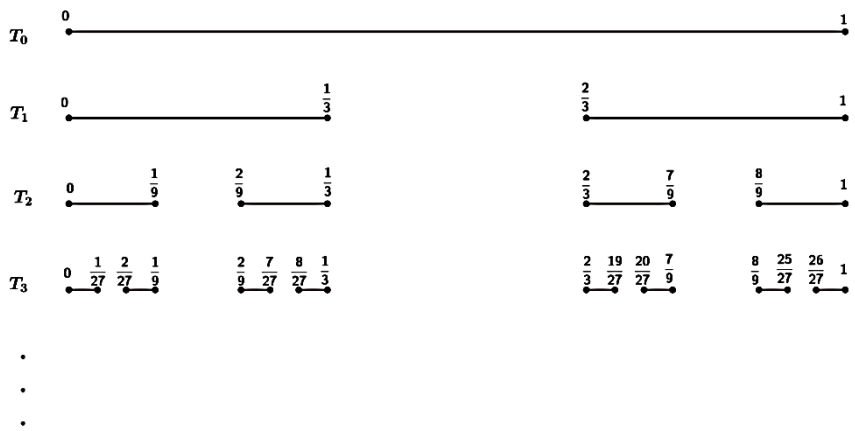
El conjunto obtenido $T_2$ es un conjunto cerrado, pues es la unión de cuatro intervalos cerrados cada uno de longitud $1/3^2$, es decir

$$T_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Continuando con este procedimiento, se obtiene una sucesión decreciente

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq \cdots \supseteq T_n \supseteq \cdots$$

de conjuntos cerrados no vacíos.




Obsérvese que $T_n$ es la unión de $2^n$ intervalos cerrados disjuntos, cada uno de longitud $1/3^n$. Se deduce, entonces, que la longitud de $T_n$ es $\left(2/3\right)^n$, pues

$$\text{longitud}(T_n) \underbrace{=}_{Not} long(T_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \delta(I_k) = \underbrace{\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{3^n}}_{2^n \text{ veces}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

siendo $I_k$ las componentes de $T_n$.

Por lo tanto, $long(T_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ tiende a cero cuando $n \longrightarrow \infty$.

Considérese el siguiente conjunto, que se denota con $C$,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Este conjunto se denomina *conjunto de Cantor* y tiene las siguientes importantes propiedades:

1) $C \neq \emptyset$.

Se deduce a partir del teorema de Cantor y teniendo en cuenta que $T_0 = [0, 1]$ es un espacio compacto.

2) $C$ es un conjunto cerrado.

Debido a que $T_n$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$, porque es unión finita de conjuntos cerrados. Entonces, como $C$ es intersección de conjuntos cerrados resulta que $C$ es un conjunto cerrado.

3) $C$ es un espacio compacto.

En efecto, por ser un subconjunto cerrado del espacio compacto $T_0 = [0, 1]$ (por el teorema 5).

4) $C$ es un espacio completo, separable y totalmente acotado.

Sigue inmediatamente a partir de los teoremas 1 y 2.

5) $C$ es un conjunto ralo o nunca denso, esto es, $C$ tiene interior vacío.

En efecto, sea $x \in C$ y sea $\varepsilon > 0$. Es posible elegir $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 2\varepsilon = \delta\big((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\big)$, pues, en caso contrario, si para todo $n \in \mathbb{N}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 2\varepsilon > \varepsilon$, entonces se contradice el hecho de que la longitud de $T_n$, que es $\left({}^{2}/_{3}\right)^n$, tiende a cero. Luego, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq T_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y, por lo tanto,

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n = C.$$

Es decir, $C$ tiene interior vacío.

6) $C$ es un conjunto denso en sí, esto es, $C \subseteq C^d$.

En efecto, sea $x \in C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$. Entonces, $x \in T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. Se puede elegir $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$long(T_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \delta(I_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$$

lo que implica que $\delta(I_k) < \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots, 2^n$, siendo $I_k$ las componentes de ese $T_n$.

Si se designa $I_1$ a la componente de $T_n$ que contiene a $x$, entonces $x \in I_1$, $I_1 \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Pero como $I_1 = [a, b]$ y $x \in [a, b]$, entonces, o $x \neq a$ o $x \neq b$. Supóngase que $x \neq a$ (análogamente se trata el caso $x \neq b$). Entonces, $a \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) - \{x\}$ y $a \in C$. Luego,

$$\big((x - \varepsilon, x + \varepsilon) - \{x\}\big) \cap C \neq \emptyset, \text{ válido para todo } \varepsilon > 0$$

y, por lo tanto, $x \in C^d$.

7) $C$ es un conjunto perfecto.

Inmediato, por ser $C$ un conjunto cerrado y denso en sí.

*Observación*

Los puntos que representan los extremos de los intervalos omitidos

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \cdots$$

pertenecen a $C$. Pero también pertenecen a $C$ otros puntos. Se puede comprobar que al conjunto $C$ pertenecen aquellos números $x$, $0 \leq x \leq 1$, que pueden representarse al menos mediante una fracción ternaria

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

donde los números $a_n$ pueden tomar los valores 0 ó 2.

## 6.5. Ejercicios propuestos

**1.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

**(a)** $E$ es compacto, esto es, $E$ satisface la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

**(b)** Todo conjunto infinito $E$ tiene derivado no vacío.

*Observación:* Con lo anterior se probó que:

$E$ es compacto $\Leftrightarrow$ $E$ es contablemente compacto.

**2.** Demuestre que un subconjunto cerrado $F$ de un espacio $(E,d)$ contablemente compacto es contablemente compacto.

***3.** Sea $A$ un subconjunto compacto de un espacio métrico $(E,d)$. Demuestre que para todo $B \subseteq E$ existe un punto $p \in A$ tal que $d(p,B) = d(A,B)$.

***4.** Sea $A$ un subconjunto compacto de un espacio métrico $(E,d)$ y sea $B$ un subconjunto cerrado de $E$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que $d(A,B) > 0$.

**5.** Encuentre un cubrimiento abierto del intervalo $(0,1)$ de $\mathbb{R}$ con la métrica usual del cual no se pueda extraer ningún subcubrimiento finito.

*Conclusión:* Cada intervalo abierto de la recta $\mathbb{R}$ con la métrica usual no es compacto.

**6.** Analice cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio métrico $(\mathbb{R}, |\quad|)$ son compactos:

**(a)** Un subconjunto formado por un número finito de puntos.

**(b)** Cada intervalo cerrado $[a,b]$.

**(c)** $A = \{x_0\} \cup \mathcal{Z}$, donde $\mathcal{Z}$ es el conjunto de términos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es una sucesión convergente a $x_0$.

**(d)** Los enteros.

**7.** Pruebe que en el espacio métrico $(E, d_T)$, todo subconjunto $A$ de $E$ es compacto si y solo si es finito.

**8.** Considere el espacio métrico $(\mathbb{Q}, |\quad|)$. Pruebe que el conjunto $F = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3, x \geq 0\}$ es cerrado y acotado, pero no es compacto.

**9.** Demuestre las siguientes afirmaciones cuando sean ciertas y, cuando no lo sean, encuentre un contraejemplo.

**(a)** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. Si $A$ es compacto, entonces es acotado.

**(b)** Sea $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ continua y $(E, d)$ compacto. Si $K$ es cerrado en $(E, d)$, entonces $f(K)$ es cerrado en $(E', d')$.

**(c)** Sean $(E, d)$, $(E', d')$ dos espacios métricos compactos y $f : E \longrightarrow E'$ una biyección continua. Entonces $f^{-1} : E' \longrightarrow E$ es continua.

**(d)** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. Si $\overline{A}$ es compacto, entonces $A$ es compacto.

**10.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sean $K \subseteq E$, $F \subseteq E$ tal que $K$ es compacto y $F$ es cerrado. Entonces, pruebe que $K \cap F$ es compacto.

*Observación.* Demuestre, previamente, usando $K$ es compacto si y solo si $K$ tiene la propiedad de Borel-Lebesgue, lo siguiente:

**(a)** Si $K$ es un subconjunto cerrado y $K \subseteq K' \subseteq E$ con $K'$ compacto, entonces $K$ es compacto.

**(b)** Si $K$ es un subconjunto compacto de un espacio métrico arbitrario, entonces $K$ es cerrado.

**11.** Pruebe que la unión finita y la intersección arbitraria de compactos son conjuntos compactos. ¿Es la unión infinita de compactos necesariamente un conjunto compacto?

***12.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico arbitrario y $K \subseteq E$. Demuestre que son equivalentes:

**(a)** $K$ tiene la propiedad de Borel-Lebesgue.

**(b)** $K$ es cerrado y tiene la propiedad de Riesz.

***13.** Para que un espacio métrico $E$ sea compacto, es decir verifique la propiedad de Bolzano-Weierstrass es necesario y suficiente que sea completo y totalmente acotado.

***14.** Un subconjunto $A$ de un espacio métrico $E$ completo es compacto si y solo si es cerrado y totalmente acotado.

***15.** Si $E$ tiene la propiedad de Riesz, entonces pruebe que $E$ tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass (o sea que es válida la recíproca del Teorema de Riesz).

***16.** Sean $(E, d)$ un espacio métrico. Pruebe que son equivalentes:

**(a)** $E$ es totalmente acotado y completo.

**(b)** $E$ tiene la propiedad de Borel-Lebesgue.

***17.** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ dos espacios métricos, $X$ compacto, $C_Y(X) = \{ f : X \to Y, \text{continuas} \}$ y $D(f, g) = \sup_{x \in X} \{ d'(f(x), g(x)) \}$.

Pruebe que:

**(a)** $(C_Y(X), D)$ es un espacio métrico.

**(b)** $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ en $C_Y(X)$ si y solo si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ en $Y$ uniformemente.

**(c)** Si $Y$ es completo, entonces $C_Y(X)$ es completo.

# Apéndice

El resultado más notable con respecto a los puntos de acumulación es, sin duda, el teorema de Bolzano-Weierstrass. Afirma que todo subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$, infinito y acotado, tiene al menos un punto de acumulación (que puede o no pertencer a $A$).

**Teorema1. (Bolzano-Weierstrass).** Sea $A$ un conjunto infinito acotado de números reales. Entonces, $A$ tiene al menos un punto de acumulación.

*Demostración.* Como $A$ es un conjunto acotado entonces, $A$ es un subconjunto de un intervalo $I_1 = [a_1, b_1] = [a - r, a + r]$, $a \in A$, $r > 0$ de longitud $2r$.

Se divide el intervalo $I_1$ en dos partes iguales; al menos uno de estos subintervalos contiene un subconjunto infinito de puntos de $A$. Se designa a este subintervalo $I_2 = [a_2, b_2]$ que contiene un número infinito de puntos de $A$ y tiene longitud $r$.

Se divide de nuevo $I_2$ en dos partes iguales. Como antes, uno de los intervalos cerrados $\left[a_2, \frac{1}{2}(a_2 + b_2)\right]$ o $\left[\frac{1}{2}(a_2 + b_2), b_2\right]$ tiene que contener un número infinito de puntos de $A$. Se designa mediante $I_3$ a dicho intervalo de longitud $r/2$.

Continuando con este procedimiento, se obtiene una sucesión de intervalos cerrados en encaje

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

tal que el $n$-ésimo, $I_n = [a_n, b_n]$ contiene un número infinito de puntos de $A$ y evidentemente

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0,$$

donde $|I_n|$ denota la longitud del intervalo $I_n$ pues por el procedimiento de la bisección, se obtiene que

$$|I_n| = |b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \frac{1}{2^{n-1}}|b_1 - a_1| = \frac{r}{2^{n-2}}, n \in \mathbb{N}.$$

Por la propiedad de encaje de los intervalos de los números reales existe un punto $p \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se probará que $p$ es un punto de acumulación del conjunto $A$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y considérese $B(p, \varepsilon) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Cuando $n$ es suficientemente grande, es decir, cuando $\frac{r}{2^{n-2}} < \varepsilon$, el intervalo $I_n$ que contiene a $p$ debe, en efecto, estar contenido en $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$; esto es, para $n$ suficientemente grande, $p \in I_n,\ I_n \subseteq (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$.

Puesto que $I_n$ contiene una infinidad de puntos de $A$, también los contiene $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$; o sea que, $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ que contiene a $p$, contiene a otros puntos de $A$ diferentes de $p$, esto es,

$$\big((p - \varepsilon, p + \varepsilon) - \{p\}\big) \cap A \neq \emptyset,$$

resultado válido cualquiera sea $\varepsilon > 0$, de donde, $p$ es un punto de acumulación de $A$.

De este teorema surge el siguiente resultado.

**Teorema 2.** Toda sucesión acotada de números reales $(a_n)$ contiene una subsucesión convergente.

*Demostración.* Considérese el dominio de valores de la sucesión $(a_n)$: $\{a_n\}$.

Si el dominio de valores es finito, entonces uno de sus puntos imágenes, por ejemplo $b$, aparece un número infinito de veces en la sucesión; por lo tanto, $(b, b, b, \cdots)$ es una subsucesión de la sucesión $(a_n)$ y además, convergente a $b$.

Por otra parte, si el dominio de valores es infinito entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, el conjunto infinito acotado $\{a_n\}$ tiene un punto de acumulación, digamos $p$. Pero entonces, cada una de las bolas abiertas

$$B_1 = (p - 1, p + 1), B_2 = \left(p - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right), B_3 = \left(p - \frac{1}{3}, p + \frac{1}{3}\right), \cdots$$

contiene un número infinito de términos de la sucesión $(a_n)$.

Se construye la sucesión $\left(a_{n_k}\right)$ de la siguiente manera:

Se elige $a_{n_1}$ de los puntos de $B_1$.

Se escoge $a_{n_2}$ de los puntos de $B_2$ de modo tal que $n_2 > n_1$; es decir, tal que $a_{n_2}$ aparezca después de $a_{n_1}$ en la sucesión $(a_n)$.

Se selecciona $a_{n_3}$ de los puntos de $B_3$ de modo tal que $n_3 > n_2$.

Se continúa la construcción de manera análoga. Se observa que siempre es posible continuar eligiendo un siguiente término para la sucesión $\left(a_{n_k}\right)$, porque en cada bola $B_n$ hay un número infinito de términos de la sucesión original $(a_n)$.

Como los términos de la sucesión $\left(a_{n_k}\right)$ se han elegido de modo tal que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\left(a_{n_k}\right)$ es una subsucesión de $(a_n)$. Se probará que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = p$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y considérese $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$. Dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimedeana, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$. En consecuencia, para todo $k > k_0$,

$$a_{n_k} \in \left(p - \frac{1}{k}, p + \frac{1}{k}\right) \subseteq \left(p - \frac{1}{k_0}, p + \frac{1}{k_0}\right) \subseteq (p-\varepsilon, p+\varepsilon).$$

Así, $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ contiene a casi todos los términos de la sucesión $\left(a_{n_k}\right)$, esto es, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = p$.

**Teorema 3.** Toda sucesión de Cauchy $(a_n)$ de números reales es acotada.

*Demostración.* Como la sucesión $(a_n)$ de números reales es una sucesión de Cauchy, entonces para $\varepsilon = 1$ existe $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ $|a_n - a_m| < 1$.

En particular, para $m = n_0 + 1$ se verifica que $\left|a_n - a_{n_0+1}\right| < 1$ para todo $n > n_0$, de donde, $a_n \in \left(a_{n_0+1} - 1, a_{n_0+1} + 1\right)$ para todo $n > n_0$. Luego, solo resta acotar un número finito de puntos de la sucesión $(a_n)$.

Sean

$$\alpha = \text{máx}\{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, a_{n_0+1} + 1\}$$

y

$$\beta = \text{mín}\{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, a_{n_0+1} - 1\}.$$

Entonces, $\alpha$ es una cota superior del dominio de valores $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(a_n)$ y $\beta$ es una cota inferior. Es decir, $\beta \leq x_n \leq \alpha$ para

todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(a_n)$ es una sucesión acotada de números reales.

**Teorema 4.** Sea $(a_n)$ una sucesión de Cauchy de números reales. Si una subsucesión $(a_{n_k})$ de $(a_n)$ converge a un punto $b$ entonces, la sucesión de Cauchy original converge también a $b$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Es necesario encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implique $|a_n - b| < \varepsilon$.

Como $(a_n)$ es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ se verifica que $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora, como la subsucesión $(a_{n_k})$ converge a $b$, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$ se verifica que $|a_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Obsérvese que se puede escoger un $n_{k_0} > n_0$. Así, $k > k_0$ implica $n_k > n_{k_0} > n_0$ y, entonces

$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n > n_0.$$

En consecuencia, cualquiera sea $n > n_0$ se tiene

$$|a_n - b| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $(a_n)$ converge a $b$.

**Teorema 5.** Toda sucesión de Cauchy $(a_n)$ de números reales converge a un número real; esto es, $\mathbb{R}$ es completo.

*Demostración.* Según el teorema 3, la sucesión de Cauchy $(a_n)$ es acotada. Entonces, por el teorema 2, la sucesión acotada $(a_n)$ contiene una subsucesión $(a_{n_k})$ convergente a un número real. De acuerdo al teorema 4, la sucesión de Cauchy $(a_n)$ converge al mismo límite que su subsucesión $(a_{n_k})$. De donde, se concluye, que la sucesión de Cauchy $(a_n)$ converge a un número real.

# Bibliografía

**[1] Apóstol, T.** (1979). *Análisis Matemático*. Barcelona: Ed. Reverté, S. A.

**[2] Apóstol, T. (**1976). *Calculus*. Volumen 1. Barcelona: Ed. Reverté, S. A.

**[3] (*) Ascheri, M. E. y Reid, M.** (2008). *Nociones Previas a la Topología Métrica*. Santa Rosa: EdUNLPam.

**[4] Copson, E. T.** (1988). *Metric Spaces*. New York: Cambridge University Press.

**[5] De Figueiredo, D.** (1970). *Funções Reais, Serie de Matemática, Monografía Nº 10*. Washington, D. C.: The Pan American Union.

**[6] (*) Dieudonné, J.** (1976). *Fundamentos del Análisis Moderno*. Barcelona: Ed. Reverté, S. A.

**[7] Dugundji, J.** (1970). *Topology*. Boston: Allyn and Bacon.

**[8] Flory, G.** (1978). *Ejercicios de Topología y Análisis*. *Tomo 1*. Barcelona: Reverte.

**[9] Friedman, A**. (1971). *Advanced Calculus*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

**[10] Giles, J. R.** (1987). *Introduction to the Analysis of Metric Spaces.* New York: Cambridge University Press.

**[11] Hocking, J. y Young, J.** (1966). *Topología*. México: Ed. Reverté, S. A.

**[12] Horváth, J.** (1975). *Introducción a la Topología General, Serie de Matemática, Monografía Nº 9.* Washington, D. C.: The Pan American Union.

**[13] (*) Iribarren, I. L.** (1973). *Topología de Espacios Métricos*. México: Limusa Wiley.

**[14] Kaplansky, I**. (1977). *Set Theory and Metric Spaces.* New York: Chelsea Publishing Company.

**[15] Kelley, J.** (1962). *Topología General*. Buenos Aires: EUDEBA.
**[16] (*) Kolmogorov, A. y Fomin, S.** (1975). *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Moscú: Ed. Mir.
**[17] Kumaresan, S.** (2005). *Topology of Metric Spaces.* Harrow: Alpha Science International.
**[18] (*) Kuratowski, K.** (1973). *Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología.* Barcelona: Ed. Vicens – Vives.
**[19] (*) Lima, E. L.** (1977). *Espaços Métricos.* Río de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA.
**[20] Lima, E. L.** (1982). *Curso de Análise*. *Volumen 1*. Río de Janeiro: Projecto Euclides, IMPA.
**[21] Lipschutz, S.** (1970). *Topología General*. México: Ed. Mc Graw – Hill.
**[22] (*) Michavila, F.** (1981). *Espacios métricos. Espacios vectoriales normados*. Madrid: Editorial AC.
**[23] Munkres, J. E.** (2002). *Topología.* Madrid: Prentice Hall.
**[24] Pitts, C.G.C.** (1972). *Introduction to Metric Spaces*. Edinburgh: Oliver and Boyd.
**[25] Reisel, R. B.** (1982). *Elementary Theory of Metric Spaces*. New York: Springer Verlag.
**[26] Rudin, W.** (1977). *Principios del Análisis Matemático*. México: Ed. Mc Graw – Hill.
**[27] (*) Searcóid, M. O**. (2007). *Metric Spaces*. London: Springer-Verlag.
**[28] Shirali, S. y Vasudeva, H.L.** (2006). *Metric Spaces*. London: Springer-Verlag.
**[29] Sierpinski, W.** (2000). *General Topology.* New York: Dover Publications, Inc.
**[30] Sutherland, W.A.** (1975). *Introduction to metric and topological spaces*. Oxford: Clarendon Press.

Se terminaron de imprimir 1000 ejemplares en la Imprenta
de la Universidad Nacional de La Pampa, dependiente de la Secretaría
de Cultura y Extensión Universitaria

Santa Rosa, Diciembre de 2016