FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa

Tesina presentada para obtener el grado académico de
Licenciado en Matemática

ÁLGEBRAS DE DIMENSIÓN FINITA. EXTENSIONES TRIVIALES

Alex Damián Bonivardo

2023

Prefacio

Esta Tesina es presentada como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Licenciado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro títutlo en esta Universidad ni en otra Institución Académica. Se llevó a cabo entre el 2022 y 2023, bajo la dirección de la Dra. María Valeria Hernández.

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a cada una de las personas que formaron parte de este trayecto.
A mi directora María Valeria Hernández por el constante apoyo, por la infinta paciencia, por brindarme su conocimiento y por su gran calidez humana.
A mi compañero Fabio, por su incondicionalidad y su contención de todos los días.
A mis padres Rubén y Claudia, por apoyarme siempre y darme alas para volar, que es el mejor legado que podrían haberme dado.
A mis hermanos Karen y Leo, por estar siempre.
A mis sobrinas Ailin y Pilar, por ser mis cables a tierra cuando todo me sobrepasaba.
A los/as docentes del Departamento de Matemática que siempre se adecuaron a mis horarios para que pudiera cursar.
A mis amigos/as por ser también una parte importante en este recorrido.
Quiero dedicar esta Tesina a mi abuela Nori, por haber confiado siempre en lo que hice, por hacerme saber lo orgullosa que siempre estuvo de mi, por emocionarse cada vez que rendía un final. Donde estés, seguramente andarás contenta por este logro.

Resumen

En esta Tesina se estudian álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo k y su categoría de módulos. Posteriormente, se analizan distintas familias de álgebras de dimensión finita: álgebras schurian, monomiales y gentiles.
El objetivo central de esta Tesina es trabajar con un tipo particular de álgebras: las extensiones triviales de álgebras pertenecientes a las familas previamente mencionadas.
El carcaj de la extensión trivial $T(\Lambda)$ de un álgebra de dimensión finita $\Lambda = kC/I$ fue descripto en [5], por Fernández y Platzeck. En este trabajo analizamos la descripción de las relaciones de $T(\Lambda)$ cuando Λ es un álgebra perteneciente a alguna de las subfamilas mencionadas en el párrafo anterior. Finalmente, se analiza una generalización donde se describen las relaciones de $T(\Lambda)$ para cualquier álgebra de dimensión finita, presentada en [6]. De esta manera, se presenta el isomorfismo existente entre $T(\Lambda)$ y un cociente del álgebra de caminos de un carcaj por un ideal admisible de relaciones.
Además, se analizan y ejemplifican caracterizaciones dadas en [1] y [2]. Dada un álgebra schurian Λ se encuentran todas las álgebras schurian Λ' tales que $T(\Lambda) \cong T(\Lambda')$. De igual manera, a partir de un álgebra gentil Λ, cuyos ciclos cumplen determinadas propiedades, se encuentran todas las álgebras gentiles Λ' tales que $\Lambda \cong T(\Lambda')$.

Abstract

This thesis presents the study of finite-dimension algebras related to a k field and their category of modules. Afterwards, groups of finite-dimension algebras are analyzed: schurian, monomial and gentle.
The main purpose of this thesis is to work with a particular type of algebra: the trivial extensions of algebra belonging to the groups mentioned previously.
The quiver of the trivial extension $T(\Lambda)$ of a finite dimension algebra $\Lambda = kC/I$ was described in [5] by Fernández and Platzeck. In this work, we analyze the description of the relations of $T(\Lambda)$ when Λ is an algebra belonging to one of the subfamilies mentioned in the previous paragraph. Finally, we analyze a generalization where $T(\Lambda)$ relations for any finite-dimension algebras are described, presented in [6]. In this way, it is presented the isomorphism of $T(\Lambda)$ and a quotient of the path algebra of a quiver by an admissible ideal of relations.
Furthermore, characterizations given in [1] and [2] are analyzed and exemplified. Given a Λ schurian algebra, all Λ' schurian algebras are found such that $T(\Lambda) \cong T(\Lambda')$. In the same way, from a Λ gentle algebra, which cycles accomplish certain properties, all Λ' gentle algebras such that $\Lambda \cong T(\Lambda')$ are found.

Índice general

Introducción

El objetivo central de esta tesina es brindar una introducción a la teoría de extensiones triviales, realizando un análisis e interpretación de distintos ejemplos. A su vez analizaremos en detalle y realizaremos comparaciones de demostraciones de resultados relativos a distintas familias de álgebras. Con ese motivo utilizaremos la teoría brindada en [1], por Fernández Elsa, para las álgebras schurian; lo realizado también por Hernández María Valeria, en [2], para la familia de álgebras monomiales y su caso particular de álgebras gentiles y, por último, lo trabajado en [6], por Fernández Elsa, para cualquier álgebra de dimensión finita.

Hemos puesto especial atención en brindar una variada cantidad de ejemplos que visualicen concretamente los resultados presentados. En particular, ejemplificamos exahustivamente la manera de encontrar el ideal de relaciones de la extensión trivial de un álgebra cuando la misma es schurian, monomial, gentil o de dimensión finita. A su vez, se han incorporado algunas demostraciones que fueron profundizadas de la teoría utilizada y, con respecto a los teoremas centrales del Capítulo 3, se han mencionado las herramientas y procedimientos utilizados por las autoras en su demostración.

En el primer capítulo hemos presentado la teoría básica necesaria para el desarrollo de los capítulos posteriores, utilizando como referencia [7]. Trabajamos sobre los conceptos de *álgebras* y *módulos*, como así también algunas propiedades de los mismos. Abordamos y profundizamos las demostraciones realizadas en [4] de algunas propiedades de los conceptos abordados, como así también de resultados de interés.

En el segundo capítulo abordamos en detalle el concepto de *carcaj* (o *quiver* en inglés) como así también sus propiedades, acompañadas de diversos ejemplos. Definimos el concepto de *relación* en un carcaj, llegando así al concepto de *álgebra de caminos* de un carcaj C sobre un cuerpo k, cuya notación es kC. Finalmente y para abordar la teoría central de esta tesina, definimos *ideal admisible*, lo cual nos permitió establecer el isomorfismo existente entre álgebras y cocientes de álgebras de caminos por ideales admisibles.

Por último, en el tercer capítulo, abordamos el concepto de *extensión trivial* de un álgebra, denotada por $T(\Lambda)$. Gracias a un resultado probado en [5], se obtuvo el carcaj de $T(\Lambda)$ para cualquier álgebra de dimensión finita. Posteriormente, nos abocamos a describir las relaciones de la extensión trivial $T(\Lambda)$, cuando Λ posee ciertas caracterícticas. En primer lugar las definimos para un álgebra *schurian*. Aquí centramos nuestro trabajo utilizando los resultados probados por Fernández, Elsa en [1], damos una descripción de las herramientas y procedimientos utilizados en la demostración del Teorema 3.1 y ejemplificamos el resultado mencionado. Luego, presentamos una caracterización de las relaciones de la extensión trivial $T(\Lambda)$, cuando Λ es un álgebra *monomial*; es decir, aquellas que no poseen relaciones de conmutatividad. En este caso, utilizamos lo expuesto por Hernández, María Valeria en [2], damos también una descripción de las herramientas utilizadas en la prueba del Teorema 3.2 y brindamos variados ejemplos. Hernández también trabajó sobre un caso particular de un álgebra monomial, que es el álgebra *gentil*. Para la misma también hicimos un análisis similar, como así también para aquellas álgebras de dimensión finita trabajadas en [6].

Capítulo 1

Álgebras y módulos

1.1. Definiciones y ejemplos

Definición 1.1. Dado un cuerpo k, una k-**álgebra** Λ (o simplemente álgebra) es un anillo con identidad ($1 \in \Lambda$) que posee también estructura de k-espacio vectorial tal que $\alpha(\lambda\mu) = \lambda(\alpha\mu), \forall\alpha \in k$ y $\forall\lambda, \mu \in \Lambda$. Si la dimensión de Λ como espacio vectorial es finita se dice que el álgebra Λ es de **dimensión finita**. En este trabajo, todas las álgebras serán de dimensión finita.

Ejemplo 1.1. Son ejemplos de k-álgebras:

$$T_n(k) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \end{pmatrix} : \alpha_{ij} = 0 \quad si \quad i < j; \forall\, \alpha \in k, 1 \leq i, j \leq n \right\},$$

$$M_n(k) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \ddots & & \alpha \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \end{pmatrix} : \forall\, \alpha \in k \right\}$$

donde $T_n(k)$ es el conjunto de matrices triangulares inferiores y $M_n(k)$ el conjunto matrices cuadradas de tamaño n ($n \in \mathbb{N}$), ambas con coeficientes en un cuerpo k, con la suma y el producto usual de matrices.

Definición 1.2. Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Un Λ**-módulo izquierdo** es un k-espacio vectorial M, junto con una operación binaria externa $\cdot : \Lambda \times M \longrightarrow M$, $(\lambda, m) \mapsto \lambda \cdot m$, que satisface las siguientes propiedades:

1. $\lambda \cdot (n + m) = \lambda \cdot n + \lambda \cdot m$

2. $(\lambda + \mu) \cdot m = \lambda \cdot m + \mu \cdot m$
3. $(\lambda\mu) \cdot m = \lambda \cdot (\mu \cdot m)$
4. $1 \cdot m = m$

$\forall\, m, n \in M$ y $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Un Λ-módulo derecho se define de forma semejante, sólo que el álgebra actúa por la derecha. Si Λ es conmutativa, entonces los Λ-módulos izquierdos coinciden con los Λ-módulos derechos y se llaman simplemente Λ-módulos.

Definición 1.3. Sea M un Λ-módulo izquierdo. Un **submódulo** N de M es un subgrupo de $(M, +)$ tal que $\lambda \cdot n \in N$, $\forall\, \lambda \in \Lambda, n \in N$.

Ejemplo 1.2. Consideremos la k-álgebra $\Lambda = T_2(k) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$ y tomemos $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} : m \in k \right\}$.
Definimos la operación binaria externa $\cdot : \Lambda \times M \longrightarrow M$, como el producto natural de matrices $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_3 m_1 \end{pmatrix} \in M$, para $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \in \Lambda$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix} \in M$.
Probemos ahora que M es un Λ-módulo izquierdo. Sean $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \in M$, $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1' & 0 \\ k_2' & k_3' \end{pmatrix} \in \Lambda$

1.
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_3(m_1 + m_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_3 m_1 + k_3 m_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_3 m_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_3 m_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ k_2 & k_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_1' & 0\\ k_2' & k_3'\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}k_1+k_1' & 0\\ k_2+k_2' & k_3+k_3'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (k_3+k_3')m_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & k_3m_1+k_3'm_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & k_3m_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & k_3'm_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}k_1 & 0\\ k_2 & k_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_1' & 0\\ k_2' & k_3'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ k_2 & k_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1' & 0\\ k_2' & k_3'\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}k_1k_1' & 0\\ k_2k_1'+k_3k_2' & k_3k_3'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (k_3k_3')m_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & k_3(k_3'm_1)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}k_1 & 0\\ k_2 & k_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & k_3'm_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}k_1 & 0\\ k_2 & k_3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}k_1' & 0\\ k_2' & k_3'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\mathbf{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hemos probado que M es un Λ-módulo izquierdo.

En adelante todos nuestros módulos serán Λ-módulos izquierdos, pero por simplicidad hablaremos solamente de Λ-módulos.

Definición 1.4. Un Λ-módulo M no nulo se dice **simple** si no posee submódulos no triviales. M se dirá **semisimple** si es suma directa de Λ-módulos simples.
Para cada Λ-módulo M, el submódulo $socM$ de M generado por todos los submódulos simples de M es un Λ-módulo semisimple y lo llamaremos el **zócalo** de M.

Definición 1.5. Sean M y N dos Λ-módulos y $f : M \to N$ una función. Diremos que f es un **homomorfismo** (o simplemente **morfismo**) de Λ-módulos si verifica:

- $f(m+n) = f(m) + f(n)$
- $f(\lambda \cdot m) = \lambda \cdot f(m)$

$\forall\, m, n \in M, \lambda \in \Lambda$.
Notaremos con $Hom_\Lambda(M, N)$ al conjunto de todos los morfismos de M en N.

Definición 1.6. Un homomorfismo de Λ-módulos $f : M \to N$ es llamado **monomorfismo** (o **epimorfismo**) si es inyectivo (o sobreyectivo, respectivamente). Si el homomorfismo es biyectivo, se llama **isomorfismo**.

Un homomorfismo de Λ-módulos $f : M \to M$ se dice un **endomorfismo** de M. Notaremos con $End_\Lambda(M) = Hom_\Lambda(M, M)$ al conjunto de todos los morfismos de M en M.

Definición 1.7. Sea $f : M \to N$ un morfismo de Λ-módulos. Llamaremos **Núcleo** de f al conjunto $Ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$, **Imagen** de f al conjunto $Im(f) = \{f(m) : m \in M\}$ y **Conúcleo** a $Coker(f) = N/Im(f)$

Definición 1.8. Sean $M_1, M_2, \ldots, , M_s$, Λ-módulos. Definimos la **suma directa** de $M_1, M_2, \ldots, , M_s$ como el k-espacio vectorial $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_s$ cuya estructura de Λ-módulo viene dada por $\alpha(m_1, m_2, \ldots, m_s) = (\alpha m_1, \alpha m_2, \ldots, \alpha m_s)$, para $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, …, $m_s \in M_s$, $\alpha \in \Lambda$.

1.2. Descomposición en inescindibles

Definición 1.9. Un Λ-módulo M, no nulo, se dice **inescindible** si no tiene sumandos directos no triviales. Es decir, si $M \cong U \oplus V$, entonces $U = 0$ o $V = 0$.

Definición 1.10. Un Λ-módulo M se dice que es **generado** por los elementos $m_1, m_2, \ldots, m_s$ de M si cualquier elemento $m \in M$ es de la forma $m = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_s m_s$, para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \Lambda$. En este caso, escribimos $M = \Lambda m_1 + \ldots + \Lambda m_s$. Un Λ-módulo M se dice **finitamente generado** si es generado por un suconjunto finito de elementos de M.

Denotaremos con *mod* Λ a la categoría de todos los Λ-módulos finitamente generados.

Teorema 1.1. (Krull-Schmidt): Todo Λ-módulo finitamente generado es la suma de un número finito de Λ-módulos finitamente generados inescindibles. Tal descomposición es única, salvo isomorfismos.

Definición 1.11. Un Λ-módulo M es **proyectivo** si y solo si es sumando directo de algún Λ-módulo libre (es decir, de un Λ-módulo isomorfo a una suma de copias del Λ-módulo Λ).

Observación 1.1. Notemos que el álgebra Λ puede ser considerada como un Λ-módulo, gracias a la multiplicación del anillo. Entonces, Λ tiene una única descomposición en inescindibles:

$$\Lambda \cong P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$$

Por la Definición 1.11, se puede observar que tales P_i, $i = 1, \ldots, n$, son módulos proyectivos inescindibles.

Proposición 1.1. [4, Proposición 1.2.3] Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita y $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ su descomposición en proyectivos inescindibles. Descompongamos en esta suma directa al uno de Λ: $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Entonces, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es un sistema:

(i) **completo**: $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$

(ii) de **idempotentes**: $e_i^2 = e_i$

(iii) **ortogonales**: $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$

(iv) **primitivos**: si $e_i = f + g$ con f y g idempotentes ortogonales, entonces $f = 0$ o $g = 0$

Demostración

El hecho de que el sistema es completo, es trivial, por hipótesis. Para probar que es un sistema de idempotentes y ortogonales, tenemos que $e_i = e_i \cdot 1$. Luego, por hipótesis, $e_i = e_i e_1 + e_i e_2 + \cdots + e_i e_i + \cdots + e_i e_n$, de donde $e_i = e_i e_i = e_i^2$ y el resto de los términos son ceros (pues la descomposición de uno era en suma directa); es decir, $e_i e_j = 0$, si $i \neq j$.

Ahora vamos a probar que cada e_i es primitivo. Antes veamos que $\Lambda e_i = P_i$. Sabemos que $\Lambda e_i \subseteq P_i$, pues si $x \in \Lambda e_i$, entonces $x \in (P_1 e_i \oplus P_2 e_i \oplus \cdots \oplus P_n e_i)$. Como la descomposición de Λ es en suma directa, se tiene que $P_i \cap P_j = \{0\}$ si $i \neq j$, lo que implica que $x \in P_i e_i$, entonces $x \in P_i$. Luego, $\Lambda e_i \subseteq P_i$.
Sea $x \in P_i$, $x = x \cdot 1 = xe_1 + xe_2 + \cdots + xe_n$. Como la descomposición es en suma directa, entonces: $xe_j = 0$, si $i \neq j$, pues $x \in P_i$, entonces $x = xe_i \in \Lambda e_i$. Luego, $P_i \subseteq \Lambda e_i$. Por lo tanto, $P_i = \Lambda e_i$.

Veamos, ahora sí, que cada e_i es primitivo. Si $e_i = f + g$, con f y g idempotentes y ortogonales, tenemos que $\Lambda e_i = \Lambda f \oplus \Lambda g$, pues $\Lambda f \cap \Lambda g = 0$. En efecto, sea $x \in (\Lambda f \cap \Lambda g)$, entonces $x \in \Lambda f$ y $x \in \Lambda g$. Si $x \in \Lambda f$, se tiene que $x \in (P_1 f \oplus P_2 f \oplus \cdots \oplus P_n f)$, de donde $x \in P_i f$, entonces $x = x_1 f, x_1 \in P_i$.

Si $x \in \Lambda g$, se tiene que $x \in (P_1 g \oplus P_2 g \oplus \cdots \oplus P_n g)$, de donde $x \in P_i g$, entonces $x = x_2 g, x_2 \in P_i$. Luego, $x_1 f = x_2 g$, por lo que $x_1 f^2 = x_2 g f$, de donde $x_1 f = 0$, entonces $x = 0$. Por lo tanto, $\Lambda f \cap \Lambda g = 0$. Finalmente, obtuvimos que $\Lambda e_i = \Lambda f \oplus \Lambda g$.

Como $\Lambda e_i = P_i$ es inescindible, obtenemos que $\Lambda f \oplus \Lambda g$ es inescindible, entonces $\Lambda f = 0$ o bien $\Lambda g = 0$; es decir, $f = 0$ o bien $g = 0$. $\square$

Definición 1.12. Una k-álgebra $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ se dice **básica** si $P_i \simeq P_j$ solo si $i = j$. Es decir, si los proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición "no se repiten".

Ejemplo 1.3. En el Ejemplo 1.2 probamos que $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} : m \in k \right\}$ es un Λ-módulo, para $\Lambda = T_2(k)$. De manera similar se puede probar que $N = \left\{ \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ n_2 & 0 \end{pmatrix} : n_1, n_2 \in k \right\}$ también es un Λ-módulo.
Como $\Lambda = M \oplus N$, con M, N inescindibles y $M \not\simeq N$, entonces $\Lambda = T_2(k)$ es un álgebra básica.

Proposición 1.2. [4, Proposición 1.2.5.] Sea Λ una k-álgebra y M un Λ-módulo. Entonces M es inescindible si y solo si la k-álgebra $End_\Lambda M$ tiene como únicos idempotentes a 0 y 1.

Demostración

Si $e \in End_\Lambda M$ es un idempotente, entonces $M = Im(e) \oplus Im(1-e)$. Como M es inescindible, entonces $Im(e) = 0$ o $Im(1-e) = 0$.

Si $Im(e) = 0$, entonces $e = 0$, pues e es un morfismo. Y si, $Im(1-e) = 0$, entonces $1 - e = 0$, luego $e = 1$.

Recíprocamente, si $M = U \oplus V$, $e : U \oplus V \to M$, definida por $e(u+v) = u$ es un morfismo idempotente, pues $e(e(u+v)) = e(e(u) + e(v)) = e(e(u+0) + e(v+0)) = e(u+v)$.

Si $e = 0$, se tiene que $\mathbf{0}(u+v) = 0, \forall\, u \in U, v \in V$, pero, por definición $\mathbf{0}(u+v) = u$, entonces $u = 0, \forall\, u \in U$. Por lo tanto $U = 0$.

Si $e = 1$, se tiene que $\mathbf{1}(u+v) = u+v, \forall\, u \in U, v \in V$, pero, por definición $\mathbf{1}(u+v) = u$, entonces $u = u+v, \forall\, u \in U$.Luego, $v = 0, \forall v \in V$. Por lo tanto $V = 0$. Finalmente, como $U = 0$ o $V = 0$, M es inescindible. $\square$

1.3. Álgebras indescomponibles. Radical de un álgebra

Definición 1.13. Una k-álgebra Λ es **indescomponible**, si para $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, con Λ_1 y Λ_2 k-álgebras, se tiene que $\Lambda_1 = 0$ o $\Lambda_2 = 0$.

Definición 1.14. Un idempotente $e \in \Lambda$ se dice **central** si $e\alpha = \alpha e$, $\forall \alpha \in \Lambda$.

Proposición 1.3. [4, Proposición 1.3.3.] Una k-álgebra Λ es indescomponible si y solo si los únicos idempotentes centrales son 0 y 1.

Ejemplo 1.4. Para $\Lambda = T_2(k)$ encontremos sus elementos idempotentes. Sea $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in \Lambda$. Luego:
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, de donde $a = a^2$, $b = b(a + c)$ y $c = c^2$. Luego a y c pueden tomar los valores 0 y 1. Por la proposición 1.3 (tomando $a = c = 1$ y $a = c = 0$) tendremos dos idempotentes centrales: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ahora tomemos $a = 1$ y $c = 0$, tenemos el idempotente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
Veamos si el idempotente encontrado es central. Sea $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in \Lambda$, luego:
$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y + zb & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ bx & 0 \end{pmatrix}$, de donde $b = \frac{y}{x-z}$. Para $x = z$, el valor de b no estará definido, además la condición debe cumplirse para cualquier elemento $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$, particularmente para $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$. Por lo tanto, el idempotente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ no es central.
Realizando un procedimiento similar se verifica que, para los demás valores de a y c, el resto de los idempotentes tampoco son centrales. Luego, por la Proposición 1.3, la k-álgebra $\Lambda = T_2(k)$ es indescomponible.

Definición 1.15. Sea Λ una k-álgebra e I un subconjunto no vacío de Λ. Diremos que:

I es un **ideal izquierdo** de Λ si:

- $x, y \in I$, entonces $x - y \in I$

- $\alpha \in \Lambda$, $x \in I$, entonces $\alpha x \in I$

I es un **ideal derecho** si:

- $x, y \in I$, entonces $x - y \in I$
- $\alpha \in \Lambda$, $x \in I$, entonces $x\alpha \in I$

I es llamado **ideal bilateral** (o simplemente **ideal**) si es ideal izquierdo y derecho.

Definición 1.16. Dada una k-álgebra Λ e I, J ideales izquierdos de Λ, se definen los ideales izquierdos **producto** y **suma**, respectivamente, como sigue:

$$IJ = \{\sum x_i y_i : x_i \in I, y_i \in J\}$$

$$I + J = \{x + y : x \in I, y \in J\}$$

Definición 1.17. Un ideal izquierdo I es **nilpotente** si $I^n = \mathbf{0}$, para algún número natural n, donde **0** es el conjunto cuyo único elemento es el neutro del anillo.

Ejemplo 1.5. Consideremos el álgebra $\Lambda = T_2(k) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$
Un ideal izquierdo para Λ es $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$.
En efecto, para $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix} \in I$ y $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \in \Lambda$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i_1 - i_2 & 0 \end{pmatrix} \in I$$
$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_3 i_1 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

Además, I es nilpotente, pues $I^2 = I \cdot I = \{\sum x_i x_j : x_i, x_j \in I\}$.
Como $x_i, x_j \in I$, entonces $x_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $x_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix}$
Luego, $I^2 = I \cdot I = \left\{ \sum_{i,j} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Lema 1.1. Si I, J son ideales izquierdos nilpotentes, $I + J$ también lo es.

Proposición 1.4. [4, Proposición 1.4.1.] Toda k-álgebra de dimensión finita posee un ideal izquierdo nilpotente que contiene a todos los ideales izquierdos nilpotentes. Este ideal es único y se denomina **radical** de Λ. Se denota $rad\,\Lambda$. Además, $rad\,\Lambda$ es un ideal bilateral.

Proposición 1.5. [4, Proposición 1.4.4.] Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Entonces $rad\,\Lambda$ coincide con la intersección de todos los ideales izquierdos maximales (o todos los derechos).

Ejemplo 1.6. Consideremos el álgebra del Ejemplo 1.5, $\Lambda = T_2(k)$. Afirmamos que $J = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$ y $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$ son ideales izquierdos maximales. En efecto, para $\begin{pmatrix} j_1 & 0 \\ j_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_3 & 0 \\ j_4 & 0 \end{pmatrix} \in J$ y $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \in \Lambda$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} j_1 & 0 \\ j_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} j_3 & 0 \\ j_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 - j_3 & 0 \\ j_2 - j_4 & 0 \end{pmatrix} \in J$$
$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_1 & 0 \\ j_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 j_1 & 0 \\ k_1 j_1 + k_3 j_2 & 0 \end{pmatrix} \in J$$

Para ver que I es un ideal, la cuenta es similar.
Ahora, como el único ideal que contiene a J y L es el propio Λ, entonces J y L son maximales. Además, son los únicos con dicha condición, pues el resto de los ideales son subconjuntos propios de J o de L.
Luego, por el Teorema 1.5, $rad\,T_2(k) = J \cap L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$.

Ejemplo 1.7. Sea la k-álgebra $\Lambda = M_2(k) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$
$I = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$ y $J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$ son ideales izquierdos de Λ.
En efecto, para $\begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_3 & 0 \\ i_4 & 0 \end{pmatrix} \in I$ y $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \in \Lambda$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i_3 & 0 \\ i_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 - i_3 & 0 \\ i_2 - i_4 & 0 \end{pmatrix} \in I$$
$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 & 0 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 i_1 + k_2 i_2 & 0 \\ k_3 i_1 + k_4 i_2 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

De manera similar, se verifica que J es ideal izquierdo de Λ.
Supongamos que existe otro ideal izquierdo propio S, tal que $I \subset S$, entonces:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\} \text{ o } S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in k \right\}$$

En el primer caso, para $\begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix} \in S$, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 s_1 + k_2 s_2 & k_1 s_3 \\ k_3 s_1 + k_4 s_2 & k_3 s_3 \end{pmatrix} \notin S, \text{ si } k_3 s_3 \neq 0$$

En el segundo caso, para $\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix} \in S$, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 s_1 + k_2 s_2 & k_2 s_3 \\ k_3 s_1 + k_4 s_2 & k_4 s_3 \end{pmatrix} \notin S, \text{ si } k_2 s_3 \neq 0$$

Luego, S no es ideal izquierdo de Λ, entonces I es maximal. De manera similar, se puede probar que J también es maximal.
Como $I \cap J = \mathbf{0}$, entonces por el Teorema 1.5, se tiene que $rad\, M_2(k) = \mathbf{0}$.

Capítulo 2

Álgebras de caminos

2.1. Carcajes. Conceptos básicos y ejemplos.

Definición 2.1. Un **carcaj**, o quiver en inglés, consiste en un conjunto de cuatro datos $C = (C_0, C_1, s, t)$ donde C_0 es el conjunto de vértices y C_1 es el conjunto de flechas entre los vértices de C. Si $\alpha : i \to j$ es una flecha del vértice inicial *i* al vértice final *j*, definimos un par de funciones $s, t : C_1 \to C_0$ como $s(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$.

Pediremos que los conjuntos C_0 y C_1 sean finitos.

Ejemplo 2.1. Considerar $C = (\{1, 2\}; \{\alpha\}; s; t)$. Es un carcaj con dos vértices, una flecha y $s(\alpha) = 1$; $t(\alpha) = 2$. Gráficamente:

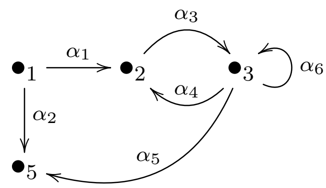
$$\bullet_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet_2$$

Presentamos a continuación una serie de definiciones, que luego mostraremos en un ejemplo.

Definición 2.2. Un **lazo** es aquella flecha que empieza y termina en el mismo vértice. Diremos que un vértice es un **pozo** (o sumidero) cuando de él no sale ninguna flecha. Mientras que aquel vértice al cual no llega ninguna flecha lo llamaremos **fuente**.

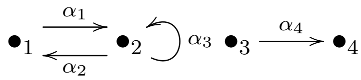
Observemos que, en la definición de carcaj, no se excluyen los casos donde se tienen flechas múltiples; es decir, dos o más flechas entre dos vértices.

Ejemplo 2.2. Dado el siguiente carcaj:



Tenemos que $C_0 = \{1, 2, 3, 5\}$ y $C_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$. Por otro lado, $s(\alpha_1) = s(\alpha_2) = 1$ y $t(\alpha_3) = s(\alpha_4) = s(\alpha_5) = s(\alpha_6) = t(\alpha_6) = 3$, entre otros. Además, α_6 es un lazo, ya que empieza y termina en el vértice 3. Notemos que el vértice 5 es un pozo o sumidero y el vértice 1 es fuente.
Para el carcaj del Ejemplo 2.1, el vértice 1 es un pozo y el vértice 2 es una fuente. Además, dicho carcaj no tiene lazos.

Ejemplo 2.3. Otro ejemplo de carcaj:



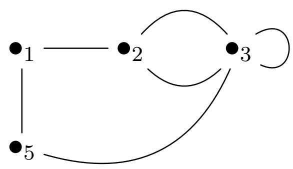
Para este carcaj $\{1, 2, 3, 4\}$ forman el conjunto de vértices, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ forman el conjunto de flechas y, por ejemplo, $s(\alpha_1) = t(\alpha_2) = 1$ y $t(\alpha_1) = s(\alpha_2) = 2$. Además, 4 es un pozo, 3 es una fuente y α_3 es un lazo. También $s(\alpha_3) = t(\alpha_3) = 2$.

Definición 2.3. Un **camino** en C es una secuencia de flechas $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ tal que $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para $1 \leq k \leq n - 1$. Denotaremos con $l(p) = n$ a la **longitud** del camino p. Un **camino trivial** es aquel que tiene longitud 0. Además, si $s(p)$ y $t(p)$ coinciden, entonces p se denomina **ciclo orientado**.

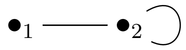
A los caminos triviales los denotaremos por ϵ_i, para cada vértice $i \in C_0$ tal que $s(\epsilon_i) = t(\epsilon_i) = i$. Para cualquier camino no trivial $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, $s(p) = s(\alpha_1)$ y $t(p) = t(\alpha_n)$.
La notación $p = (i|\alpha_1 \cdots \alpha_n|j)$ se utilizará para denotar un camino $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, entendiendo que $s(p) = i$ y $t(p) = j$.
Observemos que, en el Ejemplo 2.2, los caminos $(1|\alpha_1\alpha_3\alpha_4|2)$ y $(3|\alpha_4\alpha_3\alpha_5|5)$ tienen longitud 3, mientras que $(2|\alpha_3\alpha_4|3)$ tiene longitud 2. En el Ejemplo 2.3, $(1|\alpha_1\alpha_2|1)$ y $(1|\alpha_1\alpha_3\alpha_2|1)$ son ciclos orientados.

Definición 2.4. Un carcaj C se dice **conexo** si $\overline{C}$ es un grafo conexo, donde $\overline{C}$ es el grafo subyacente de C; es decir, el grafo asociado al carcaj C que se obtiene quitando la orientación a las flechas del carcaj.

Para el carcaj del Ejemplo 2.2, su grafo subyacente resulta:



Notemos que, en este caso, su grafo subyacente es conexo pues para cada par de vértices podemos encontrar un camino entre ellos. A su vez, el carcaj del Ejemplo 2.3 no es conexo pues su grafo subyacente es el siguiente:

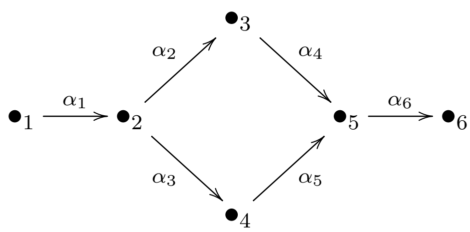


Es decir, no es posible encontrar un camino, por ejemplo, entre los vértices 2 y 3.

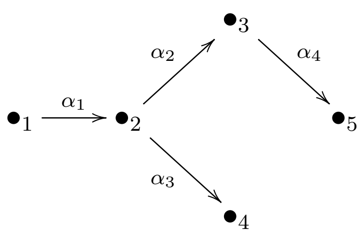
Definición 2.5. Un **subcarcaj** del carcaj C es un carcaj $C^{'}$, donde $C_0^{'} \subset C_0$, $C_1^{'} \subset C_1$ y las restricciones de s y t a $C_1^{'}$ son iguales respectivamente a $s^{'}$ y $t^{'}$. Es decir, si $\alpha : i \to j$ es una flecha en C_1 tal que $\alpha \in C_1'$ y, además, $i, j \in C_0'$, entonces $s(\alpha) = s'(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = t'(\alpha) = j$.

Un subcarcaj se llama **pleno** si para cada flecha $\alpha : i \to j$ de C_1 con vértices $i, j \in C_0^{'}$ tenemos que $\alpha \in C_1^{'}$.

Ejemplo 2.4. Dado el siguiente carcaj C:



podemos considerar, por ejemplo, el siguiente subcarcaj C' del mismo:



pues $C_0' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset C_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C_1' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \subset C_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$. Y, además, $s'(\alpha_i) = s(\alpha_i)$ y $t'(\alpha_i) = t(\alpha_i)$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$. A su vez C' no es pleno, pues $\alpha_5 \in C_1$ y $\{4, 5\} \subset C_0'$ pero $\alpha_5 \notin C_1'$.

Podemos observar fácilmente, que C y C' son conexos.

Definición 2.6. Una **relación** σ en un carcaj C, sobre un cuerpo k, es una combinación lineal de caminos:

$$\sigma = a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n$$

con $a_i \in k$, para $i = 1, \ldots, n$; $s(p_1) = \ldots = s(p_n)$ y $t(p_1) = \ldots = t(p_n)$.

La longitud de p_i es al menos 2, para cada $p_i, 1 \leq i \leq n$.
Si $\rho = \{\sigma_t\}_{t \in C}$ es un conjunto de relaciones en C sobre k, el par (C, ρ) se denomina **carcaj con relaciones** sobre k.

Ejemplo 2.5. Observemos el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \bullet \arrow[dr, "\alpha_4"] & \\
& \bullet \arrow[ur, "\alpha_3"] \arrow[dr, "\alpha_5"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\alpha_2"] & & \bullet \arrow[ur, "\alpha_6"] &
\end{tikzcd}$$

Una de las relaciones que podemos mencionar en él es: $\alpha_3\alpha_4 - \alpha_5\alpha_6$, pues $t(\alpha_3\alpha_4) = t(\alpha_5\alpha_6)$ y $s(\alpha_3\alpha_4) = s(\alpha_5\alpha_6)$. De igual manera, otra relación es $\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2\alpha_5\alpha_6$. Además, $\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5$ no es una relación pues $t(\alpha_1\alpha_5) = t(\alpha_2\alpha_5)$ pero $s(\alpha_1\alpha_5) \neq s(\alpha_2\alpha_5)$.

2.2. Álgebras de caminos

Definición 2.7. Sean k un cuerpo y C un carcaj finito, es decir, los conjuntos C_0 y C_1 son finitos. El **álgebra de caminos** de C sobre k, que denotaremos **kC**, es la k-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de todos los caminos de C, incluidos los triviales. Dados dos caminos $p = (i|\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n|j)$ y $q = (l|\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m|r)$ de la base, definiremos su producto como sigue:

$$p \cdot q = \begin{cases} (i|\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \beta_1\beta_2 \ldots \beta_m|r), \text{si j=l} \\ 0, \text{en otro caso} \end{cases}$$

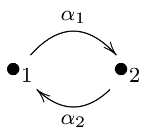
Consideremos el carcaj del Ejemplo 2.1. Como espacio vectorial kC tiene base $B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha\}$ y por tanto $dim_k kC = 3$. La multiplicación de los elementos de B es $\epsilon_1\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_i\epsilon_i = \epsilon_i$ para $i = 1, 2$, $\epsilon_1\alpha = \alpha\epsilon_2 = \alpha$, $\alpha\epsilon_1 = \epsilon_2\alpha = 0$ y $\alpha\alpha = 0$.

Ejemplo 2.6. Observemos que, para el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd}
\bullet_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & \bullet_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & \bullet_3 \arrow[loop right, "\alpha_3"]
\end{tikzcd}$$

$dim_k kC = \infty$, pues $B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_3^2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_3^3, \ldots\}$ es una base con infinitos caminos.

Ejemplo 2.7. Para el siguiente carcaj:



$B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2, \ldots\}$ es una base de kC y la multiplicación está dada por la siguiente tabla:

	ϵ_1	ϵ_2	α_1	α_2
ϵ_1	ϵ_1	0	α_1	0
ϵ_2	0	ϵ_2	0	α_2
α_1	0	α_1	0	$\alpha_1\alpha_2$
α_2	α_2	0	$\alpha_2\alpha_1$	0

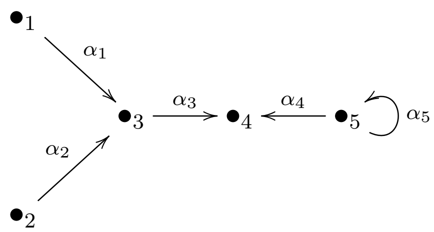
Teorema 2.1. Sea C un carcaj y kC su álgebra de caminos. Entonces, kC tiene un elemento identidad si y solo si C_0 es finito. En particular, el elemento identidad es $\sum_{i \in C_0} \epsilon_i$.

Demostración Supongamos que C_0 es infinito y que kC tiene un elemento identidad $1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i$ (con λ_i escalares no nulos y α_i caminos en C). Observemos que el conjunto $\{t(\alpha_i)\}_{i=1}^{m}$ tiene como máximo m elementos; es decir, es finito.
Como C_0 es infinito, podemos considerar $a \in C_0 - \{t(\alpha_i)\}_{i=1}^{m}$. Luego

$$\begin{aligned}
\epsilon_a \cdot 1 &= \epsilon_a \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i \\
&= \lambda_1 \epsilon_a \alpha_1 + \lambda_2 \epsilon_a \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \epsilon_a \alpha_m \\
&= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_m \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción.
Si suponemos que C_0 es finito, $\sum_{a \in C_0} \epsilon_a$ claramente es una identidad para kC. $\square$

Ejemplo 2.8. Consideremos el siguiente carcaj C:



Se puede verificar que, tal como se probó en el Teorema 2.1, la suma de los caminos triviales es el 1:

$$\begin{aligned}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5)\cdot\alpha_1 &= \epsilon_1\cdot\alpha_1+\epsilon_2\cdot\alpha_1+\epsilon_3\cdot\alpha_1+\epsilon_4\cdot\alpha_1+\epsilon_5\cdot\alpha_1\\ &= \alpha_1+0+0+0+0\\ &= \alpha_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5)\cdot\alpha_4 &= \epsilon_1\cdot\alpha_4+\epsilon_2\cdot\alpha_4+\epsilon_3\cdot\alpha_4+\epsilon_4\cdot\alpha_4+\epsilon_5\cdot\alpha_4\\ &= 0+0+0+0+\alpha_4\\ &= \alpha_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3\cdot(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5) &= \alpha_3\cdot\epsilon_1+\alpha_3\cdot\epsilon_2+\alpha_3\cdot\epsilon_3+\alpha_3\cdot\epsilon_4+\alpha_3\cdot\epsilon_5\\ &= 0+0+0+\alpha_3+0\\ &= \alpha_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_5\cdot(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5) &= \alpha_5\cdot\epsilon_1+\alpha_5\cdot\epsilon_2+\alpha_5\cdot\epsilon_3+\alpha_5\cdot\epsilon_4+\alpha_5\cdot\epsilon_5\\ &= 0+0+0+0+\alpha_5\\ &= \alpha_5\end{aligned}$$

De manera similar se resuelven el resto de los productos.

En lo que resta de este trabajo todo carcaj C será conexo y finito.

Proposición 2.1. El conjunto de todos los caminos triviales de C $\{\epsilon_i, i \in C_0\}$, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de kC.

Proposición 2.2. kC es una k-álgebra indescomponible.

2.3. Ideales admisibles y cocientes de álgebras de carcaj

Notaremos con F al ideal izquierdo de kC generado por los caminos de longitud 1 (flechas) de C.

Definición 2.8. Un ideal bilateral R del álgebra de carcaj kC es **admisible** si cumple con:

1 R está contenido en F^2

2 R contiene a alguna potencia de F

Ejemplo 2.9. En el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[r, "\alpha"] & \bullet_2 \arrow[loop right, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

tenemos que $I =< \lambda^3, \alpha\lambda >$ es admisible, pues:

1. $I \subseteq F^2$, ya que $\alpha\lambda \in F^2$ y $\lambda^3 = \lambda\lambda^2 \in F^2$.

2. $F^3 \subseteq I$, ya que todos los caminos de longitud 3 pertenecen a I:

    - $\alpha\lambda^2 = \alpha\lambda\lambda \in I$, pues $\alpha\lambda \in I$
    - $\lambda^3 \in I$

Sin embargo, se observa que el ideal $J =< \alpha\lambda >$ no es admisible pues ninguna potencia de F está contenida en J.

En [4], los autores mencionan y demuestran propiedades de una k-álgebra $\Lambda = kC/R$, donde C es un carcaj y R un ideal admisible de kC. Las mismas permitirán establecer un isomorfismo entre este cociente y álgebras con tales propiedades.
Si $\Lambda = kC/R$ donde C es un carcaj y R un ideal admisible de kC, entonces se cumple:

(i) $\{\tau_i : i \in C_0\}$ es un sistema completo de idempotentes primitivos y ortogonales de Λ.

(ii) Λ es una k-álgebra básica.

(iii) Λ es una k-álgebra indescomponible.

(iv) Λ es de dimensión finita.

Teorema 2.2. Si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible (y k es algebraicamente cerrado), entonces Λ es isomorfa al cociente de un álgebra de carcaj (el álgebra de su carcaj) por un ideal admisible.

Conclusión
Es equivalente estudiar álgebras indescomponibles básicas de k-dimensión finita, con k algebraicamente cerrado, a estudiar cocientes de álgebras de carcaj por ideales admisibles.

Ejemplo 2.10. Sea $\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in k \right\}$. Se puede verificar que Λ es básica, indescomponible y de dimensión finita. Por el Teorema 2.2, es posible encontrar un carcaj C y un ideal admisible I tal que $\Lambda \cong kC/I$.

A partir de una base de Λ, realicemos las siguientes identificaciones:

- $e_i \leftrightarrow E_{ii}$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Es decir, por ejemplo, $e_1 \leftrightarrow E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde e_1 representa el camino trivial en el vértice 1. Análogamente, e_i representa el camino trivial en el vértice i, para $i = 2, 3, 4$. La matriz E_{ii} es aquella que posee un 1 en la posición ii y el resto de sus elementos son 0.

- $\gamma \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces γ será la flecha que va desde el vértice 1 al vértice 2 (pues la matriz tiene un 1 en el lugar "fila 2, columna 1").

- $\delta \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces δ será la flecha que va desde el vértice 1 al vértice 3.

- $\beta \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces β será la flecha que va desde el vértice 3 al vértice 4.

- $\alpha \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces β será la flecha que va desde el vértice 2 al vértice 4.

- $\epsilon \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces ϵ será la flecha que va desde el vértice 1 al vértice 4.

Ahora realicemos los productos correspondientes:

- $\delta\gamma = 0$ pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $t(\delta) \neq s(\gamma)$.

- $\alpha\beta = 0$ pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $t(\alpha) \neq s(\beta)$.

- $\gamma\alpha \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $t(\gamma) = s(\alpha)$, $s(\gamma\alpha) = 1$ y $t(\gamma\alpha) = 4$.

- $\delta\beta \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $t(\delta) = s(\beta)$, $s(\delta\beta) = 1$ y $t(\delta\beta) = 4$.

De los últimos dos ítems podemos concluir que $\epsilon = \gamma\alpha = \delta\beta \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El resto de los productos se realiza de manera similar. Luego, la multiplicación en kC está dada por la siguiente tabla:

El carcaj C será:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet_4 & \\
\bullet_2 \arrow[ur, "\alpha"] & & \bullet_3 \arrow[ul, "\beta"'] \\
 & \bullet_1 \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	α	γ	β	δ
e_1	e_1	0	0	0	0	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0	0	γ	0	0
e_3	0	0	e_3	0	0	0	0	δ
e_4	0	0	0	e_4	α	0	β	0
α	0	α	0	0	0	$\alpha\gamma$	0	0
γ	γ	0	0	0	0	0	0	0
β	0	0	β	0	0	0	0	$\beta\delta$
δ	δ	0	0	0	0	0	0	0

Luego, como sabemos, I estará formado por aquellos caminos nulos o iguales. Dado que $\alpha\gamma = \beta\delta$, entonces $I =< \gamma\alpha - \delta\beta >$.
Notemos que, efectivamente, I es admisible pues: $I \subseteq F^2$, ya que $\gamma\alpha = \delta\beta$ es una combinación lineal de caminos de longitud 2. Además, $F^2 \subseteq I$, ya que los únicos caminos de longitud 2 son iguales y su combinación lineal pertenece a I.

Capítulo 3

Extensiones triviales

Sea Λ una k-álgebra y $D(\Lambda) = Hom_k(\Lambda, k)$ el espacio dual de Λ. Entonces $(D(\Lambda), +, \odot)$ posee estructura de $\Lambda-$módulo izquierdo con $\odot : \Lambda \times D(\Lambda) \longrightarrow D(\Lambda)$, definida como $(\lambda \odot f)(\mu) = f(\mu\lambda)$, $\forall\, \lambda, \mu \in \Lambda$ y $f \in D(\Lambda)$. En efecto, sean $\lambda, \mu, \gamma \in \Lambda$ y $f, g \in D(\Lambda)$:

- $(\lambda \odot (f+g))(\mu) = (f+g)(\mu\lambda) = f(\mu\lambda) + g(\mu\lambda) = (\lambda \odot f)(\mu) + (\lambda \odot g)(\mu)$
  $\therefore \lambda \odot (f+g) = \lambda \odot f + \lambda \odot g$

- $((\lambda + \mu) \odot f)(\gamma) = f(\gamma(\lambda + \mu)) = f(\gamma\lambda + \gamma\mu) = f(\gamma\lambda) + f(\gamma\mu) = (\lambda \odot f)(\gamma) + (\mu \odot f)(\gamma) \qquad \therefore (\lambda + \mu) \odot f = (\lambda \odot f) + (\mu \odot f)$

- $((\lambda\mu) \odot f)(\gamma) = f(\gamma(\lambda\mu)) = f((\gamma\lambda)\mu) = (\mu \odot f)(\gamma\lambda) = (\lambda \odot (\mu \odot f))(\gamma)$
  $\therefore (\lambda\mu) \odot f = \lambda \odot (\mu \odot f)$

- $(1 \odot f)(\gamma) = f(\gamma 1) = f(\gamma) \qquad \therefore 1 \odot f = f$

Análogamente, $(D(\Lambda), +, \odot)$ posee estructura de $\Lambda-$módulo a derecha con $\odot : D(\Lambda) \times \Lambda \longrightarrow D(\Lambda)$, definida como $(f \odot \lambda)(\mu) = f(\lambda\mu)$, $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ y $f \in D(\Lambda)$.

Definición 3.1. Dada una k-álgebra Λ, su **extensión trivial** $T(\Lambda) = \Lambda \times D(\Lambda)$ es el álgebra cuya estructura de k-espacio vectorial es la de $\Lambda \oplus D(\Lambda)$ y donde la multiplicación $\cdot : T(\Lambda) \times T(\Lambda) \to T(\Lambda)$ se define como:

$$(\lambda, f) \cdot (\mu, g) = (\lambda\mu, \lambda g + f\mu), \forall \lambda, \mu \in \Lambda \text{ y } f, g \in D(\Lambda)$$

Es inmediato probar que $(T(\Lambda), +, \cdot)$ tiene estructura de anillo y que $(T(\Lambda), +, *)$ tiene estructura de k-espacio vectorial.

Probaremos que $k * ((\lambda, f) \cdot (\mu, g)) = (\lambda, f) \cdot (k * (\mu, g))$. En efecto,

$$\begin{aligned} k * ((\lambda, f) \cdot (\mu, g)) &= k * (\lambda\mu, \lambda g + f\mu) \\ &= (k * (\lambda\mu), k * (\lambda g + f\mu)) \\ &= (\lambda(k * \mu), k * (\lambda g) + k * (f\mu)) \\ &= (\lambda(k * \mu), \lambda(k * g) + f(k * \mu)) \\ &= (\lambda, f) \cdot (k * \mu, k * g) \\ &= (\lambda, f) \cdot (k * (\mu, g)) \end{aligned}$$

3.1. Carcaj de la extensión trivial T(Λ)

Consideremos una k-álgebra de dimensión finita Λ con su carcaj ordinario C_Λ. Describiremos el carcaj de la extensión trivial $T(\Lambda)$. En lo que sigue, si p es un elemento de kC_Λ, entonces notaremos $\overline{p}$ al elemento correspondiente en $\Lambda \cong kC/I$.

Definición 3.2. Sea p un camino en C_Λ. Diremos que p es **maximal**, si $\overline{p} \neq 0$ y $\overline{pq} = \overline{qp} = 0$, para cada q en C_Λ.

El siguiente resultado describe el carcaj $C_{T(\Lambda)}$ de la extensión trivial $T(\Lambda)$ de una k-álgebra de dimensión finita.

Proposición 3.1. [5, Proposición 2.2.] Sea Λ un álgebra de dimensión finita con su carcaj C_Λ, entonces el carcaj de $T(\Lambda)$ está dado por:

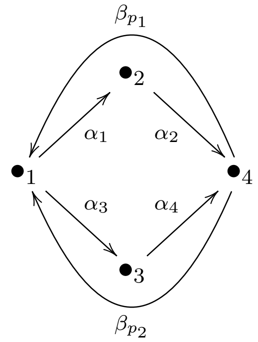
(i) $(C_{T(\Lambda)})_0 = (C_\Lambda)_0$

(ii) $(C_{T(\Lambda)})_1 = (C_\Lambda)_1 \cup \{\beta_{p_1}, \ldots, \beta_{p_t}\}$, donde $\{\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_t}\}$ es una k-base para $soc\,\Lambda$ y, para cada i, β_{p_i} es una flecha de $t(p_i)$ a $s(p_i)$.

Ejemplo 3.1. Sea Λ el álgebra dada por el carcaj C_Λ:

$$\begin{tikzcd} & \bullet_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ \bullet_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_3"'] & & \bullet_4 \\ & \bullet_3 \arrow[ur, "\alpha_4"'] & \end{tikzcd}$$

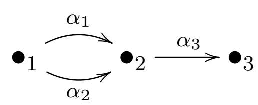
Una base de $soc\,\Lambda$ es $\{\overline{p_1} = \overline{\alpha_1\alpha_2}, \overline{p_2} = \overline{\alpha_3\alpha_4}\}$. Luego, tenemos $\beta_{p_1} : 4 \to 1$ y $\beta_{p_2} : 4 \to 1$, pues $s(\beta_{p_i}) = t(p_i) = 4$, $t(\beta_{p_i}) = s(p_i) = 1$, para $i = 1, 2$. Entonces, obtenemos $C_{T(\Lambda)}$:



De aquí en adelante, llamaremos $M = \{p_1, \dots, p_t\}$ al conjunto de elementos en kC_Λ tal que $\{\overline{p_1}, \dots, \overline{p_t}\}$ es una base para $soc\,\Lambda$.
Extendemos la base fijada para $soc\,\Lambda$ a una base $\beta = \{\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}\}$ de Λ y notaremos a su base dual en $D(\Lambda)$ con $\beta^* = \{\overline{p_1}^*, \dots, \overline{p_n}^*\}$.

Definición 3.3. Diremos que un ciclo orientado C de $kC_{T(\Lambda)}$ es **elemental** si $C = \alpha_1 \dots \alpha_j \beta_p \alpha_{j+1} \dots \alpha_n$, con $p \in M$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (C_\Lambda)_1$ y $\overline{p}^*(\overline{\alpha_1 \dots \alpha_n}) \neq 0$. En este caso, el **peso** de C es $\omega(C) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_1 \dots \alpha_n}) \in k^*$.

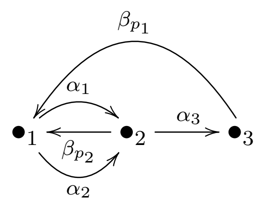
Ejemplo 3.2. Consideremos Λ el álgebra dada por C_Λ como sigue:



con $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_3$.
Una base de $soc\,\Lambda$ es $\{\overline{p_1} = \overline{\alpha_1\alpha_3}, \overline{p_2} = \overline{\alpha_1 - \alpha_2}\}$ pues $\alpha_1\alpha_3$ es un camino maximal y $(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 = 0$.
Extendemos la base del zócalo a una base de Λ:

$$\beta = \{\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_3}, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$$

Luego, $C_{T(\Lambda)}$ es el siguiente:



Ahora veamos cuáles de los ciclos orientados de $kC_{T(\Lambda)}$ son elementales:

- $\alpha_1\alpha_3\beta_{p_1}$ es elemental pues $\overline{p_1^*}(\overline{\alpha_1\alpha_3}) = 1$
- $\alpha_2\alpha_3\beta_{p_1}$ es elemental pues, por el hecho de que $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_3$ se tiene $\overline{p_1^*}(\overline{\alpha_2\alpha_3}) = 1$

- $\alpha_1\beta_{p_2}$ no es elemental pues $\overline{p_2^*}(\overline{\alpha_1}) = 0$

- $\alpha_2\beta_{p_2}$ es elemental pues $\overline{p_2^*}(\overline{\alpha_2}) = \overline{p_2^*}(\overline{-p_2+\alpha_1}) = \overline{p_2^*}(\overline{-p_2}) + \overline{p_2^*}(\overline{\alpha_1}) = -1+0 = -1$

Entonces, los ciclos elementales en $C_{T(\Lambda)}$ son $C_1 = \alpha_1\alpha_3\beta_{p_1}$, $C_2 = \alpha_2\alpha_3\beta_{p_1}$, $C_3 = \alpha_2\beta_{p_2}$ y sus permutaciones.

Definición 3.4. Diremos que un camino q de kC_Λ está **contenido** en un camino q' si se verifica que $q' = \gamma_1 q \gamma_2$, donde γ_1 y γ_2 son caminos y $t(\gamma_1) = s(q)$ y $s(\gamma_2) = t(q)$.

Ejemplo 3.3. En el carcaj del Ejemplo 2.1, podemos decir que $q = \alpha_3\alpha_6$ está contenido en $q' = \alpha_1\alpha_3\alpha_6\alpha_4$, donde $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_4$, $t(\gamma_1) = s(q) = 2$ y $t(q) = s(\gamma_2) = 3$.

Definición 3.5. Consideremos el camino q contenido en un ciclo elemental C, por lo que $l(q) \leq l(C)$. Si $q = C$ (es decir, si $s(q) = t(q)$) llamaremos **suplemento** de q al camino trivial $e_{s(q)}$; caso contrario, el suplemento estará formado por las flechas restantes de C.

Ejemplo 3.4. Consideremos el álgebra Λ dada por el carcaj del Ejemplo 2.6, con la relación $\alpha_3^2 = 0$. De esta manera, la base de $soc\,\Lambda$ está formada por el único camino maximal en Λ, $p = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Entonces, asociada a dicho camino tenemos $\beta_p : 3 \to 1$ y se concluye que $C_{T(\Lambda)}$ es:

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & \bullet_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & \bullet_3 \arrow[ll, bend left, "\beta_p"] \arrow[loop right, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

En este caso, $C = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_p$ es el único ciclo elemental de $C_{T(\Lambda)}$, además de sus permutaciones.
El suplemento de $\alpha_3\beta_p$ en el ciclo elemental C es $\alpha_1\alpha_2$.
El camino $q = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_p$ tiene como suplemento al camino trivial e_1, pues $q = C$ y $s(q) = t(q) = 1$.

Ejemplo 3.5. Consideremos el Ejemplo 3.1. Recordemos que la base de $soc\,\Lambda$ es $\{\overline{p_1} = \overline{\alpha_1\alpha_2}, \overline{p_2} = \overline{\alpha_3\alpha_4}\}$.
Extendemos a una base de Λ, $\beta = \{\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}, \overline{\alpha_4}, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}\}$. Analicemos cuales de los ciclos son elementales.

- $\alpha_1\alpha_2\beta_{p_1} \to \overline{p_1}^*(\overline{\alpha_1\alpha_2})$=1.

- $\alpha_1\alpha_2\beta_{p_2} \to \overline{p_2}^*(\overline{\alpha_1\alpha_2})$=0.

- $\alpha_3\alpha_4\beta_{p_1} \to \overline{p_1}^*(\overline{\alpha_3\alpha_4})$=0.
- $\alpha_3\alpha_4\beta_{p_2} \to \overline{p_2}^*(\overline{\alpha_3\alpha_4})$=1.

Luego, los ciclos elementales son $C_1 = \alpha_1\alpha_2\beta_{p_1}$ y $C_2 = \alpha_3\alpha_4\beta_{p_2}$ y sus permutaciones.
El suplemento de β_{p_1} en C_1 es $\alpha_1\alpha_2$, mientras que el suplemento de $q = \alpha_4\beta_{p_2}\alpha_3$ en el ciclo C_2 es el camino trivial e_3.

3.2. Descripción de las relaciones de T(Λ)

En esta sección describiremos las relaciones de la extensión trivial $T(\Lambda)$ de un álgebra de dimensión finita. En particular, comenzaremos haciéndolo cuando Λ es un álgebra schurian. Previamente definiremos ese álgebra y daremos algunos ejemplos. Analizaremos resultados probados en [1], que nos permiten encontrar todas las álgebras schurian Λ', a partir de un álgebra schurian Λ, tales que sus extensiones triviales son isomorfas.

Posteriormente, realizamos un análisis similar cuándo Λ pertenece a la familia de álgebras monomiales. Y, finalmente, lo generalizamos para cualquier álgebra Λ de dimensión finita.

3.2.1. Relaciones de la extensión trivial T(Λ) de un álgebra schurian

Definición 3.6. Un álgebra Λ se dice **schurian** si $dim_k(Hom_\Lambda(P, Q)) \leq 1$, cualesquiera sean P y Q Λ-módulos proyectivos inescindibles. En otras palabras, un álgebra Λ **schurian** es aquella en la cual su carcaj tiene como máximo un camino no nulo (morfismo) entre cada par de vértices (Λ-módulos) y, si hay dos o más que no son nulos, deben ser iguales.

Ejemplo 3.6.

- Un álgebra que no es schurian es la siguiente:

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] \arrow[r, bend right, "\alpha_2"'] & \bullet_2 \arrow[r, "\alpha_3"] & \bullet_3 \end{tikzcd}$$

  pues existen dos flechas, α_1 y α_2, que van del vértice 1 al vértice 2 y son distintas en Λ; es decir, $dim_k(Hom_\Lambda(P_1, P_2)) = 2$.

- El álgebra Λ del Ejemplo 3.1 no es shurian, pues los caminos $(1|\alpha_1\alpha_2|4)$ y $(1|\alpha_3\alpha_4|4)$ que unen los vértices 1 y 4 son distintos en Λ.

En [1] se muestra que, cuando Λ es schurian, puede tomarse como k-base de $soc\,\Lambda$ al conjunto de todos los $\overline{q} \in \Lambda$, con q un camino maximal en Λ.
Por lo tanto, la descripción del carcaj $C_{T(\Lambda)}$ de la extensión trivial $T(\Lambda)$ de una k-álgebra schurian, resulta de la siguiente manera:

Proposición 3.2. [1, Teorema 1.2.2.] Si Λ un álgebra schurian, entonces el carcaj de $T(\Lambda)$ está dado por:

(i) $(C_{T(\Lambda)})_0 = (C_\Lambda)_0$

(ii) $(C_{T(\Lambda)})_1 = (C_\Lambda)_1 \cup \{\beta_{p_1}, \ldots, \beta_{p_t}\}$, donde $\{\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_t}\}$ es un conjunto formado por caminos maximales, linealmente independiente maximal en Λ. Y, para cada i, β_{p_i} es una flecha tal que $s(\beta_{p_i}) = t(p_i)$ y $t(\beta_{p_i}) = s(p_i)$.

Ejemplo 3.7. Sea Λ el álgebra dada por el carcaj C_Λ:

$$\begin{tikzcd}
\bullet_1 \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & & \\
& \bullet_3 \arrow[r, "\alpha_3"'] & \bullet_4 \arrow[r, "\alpha_4"'] & \bullet_5 \\
\bullet_2 \arrow[ur, "\alpha_2"] & & &
\end{tikzcd}$$

Se observa que se trata de un álgebra schurian. Los caminos maximales en Λ son $p_1 = \alpha_1\alpha_3\alpha_4$ y $p_2 = \alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Asociadas a dichos caminos, tenemos las flechas $\beta_{p_1} : 5 \to 1$ y $\beta_{p_2} : 5 \to 2$, respectivamente. Observemos que $s(\beta_{p_1}) = t(p_1) = 5$, $t(\beta_{p_1}) = s(p_1) = 1$, $s(\beta_{p_2}) = t(p_2) = 5$ y $t(\beta_{p_2}) = s(p_2) = 2$. Luego, $C_{T(\Lambda)}$ es:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] & \\
\bullet_3 \arrow[r, "\alpha_3"'] & \bullet_4 \arrow[r, "\alpha_4"'] & \bullet_5 \arrow[ul, "\beta_{p_1}"'] \arrow[dl, "\beta_{p_2}"] \\
& \bullet_2 \arrow[ul, "\alpha_2"] &
\end{tikzcd}$$

A continuación presentamos la caracterización que se hizo en [1] sobre el ideal $I_{T(\Lambda)}$ de relaciones de la extensión trivial $T(\Lambda) = kC_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$ del álgebra de dimensión finita $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$ donde Λ es un álgebra schurian.

Teorema 3.1. [1, Teorema 1.3.4.] Sea $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$ un álgebra schurian, donde I_Λ es un ideal admisible de kC_Λ. Sea $I_{T(\Lambda)}$ el ideal de $kC_{T(\Lambda)}$ generado por:

(i) Los caminos formados por $n + 1$ flechas de un ciclo elemental de longitud n.

(ii) Los caminos cuyas flechas no pertenecen a un mismo ciclo elemental.

(iii) Los elementos $q - bq'$ donde q y q' son caminos con el mismo origen y el mismo vértice final que verifican una de las siguientes condiciones:

(a) $\overline{q} = b\overline{q'}$, con $0 \neq b \in k$, si q y q' son caminos en kC_Λ, o bien:

(b) q y q' admiten el mismo suplemento γ en ciclos elementales

$$C = \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_{p_i} \text{ y } C' = \alpha'_1 \dots \alpha'_m \beta_{p_j}$$

respectivamente, donde γ es un camino de kC_Λ, $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_n} = a\overline{p_i}$ y $\overline{\alpha'_1 \dots \alpha'_m} = a'\overline{p_j}$, con $0 \neq a, a' \in k$ y $b = \frac{a}{a'}$.

Entonces, $I_{T(\Lambda)}$ es admisible y $T(\Lambda) \simeq kC_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$.

La prueba del Teorema 3.1 se encuentra en [1]. Daremos aquí una breve descripción de las herramientas y resultados utilizados en la misma. Para la prueba del Teorema se consideró el morfismo de k-álgebras $\phi : kC_{T(\Lambda)} \to T(\Lambda)$ definido sobre los caminos triviales y los caminos de longitud uno como sigue:

$$\phi(e_i) = (\overline{e_i}, 0)$$

$$\phi(\alpha) = (\overline{\alpha}, 0)$$

$$\phi(\beta_{p_i}) = (0, \overline{p_i}^*)$$

También se probaron los siguientes resultados sobre el morfismo mencionado anteriormente, que luego fueron utilizados en la prueba del Teorema.

(i) $\phi(q) = 0$ si q es un camino entre cuyas flechas aparecen por lo menos dos de la forma β_{p_i}.

(ii) Sea $C = \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_{p_i}$ un ciclo elemental, donde $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_n} = a\overline{p_i}$, con $0 \neq a \in k$. Entonces, $\phi(C) \neq 0$. Más aún, si $C_j = \alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \beta_{p_i} \alpha_j \dots \alpha_n$, para $2 < j \leq n$, se tiene que $\phi(C_j) \neq 0$.

(iii) Si un camino q admite suplemento, entonces $\phi(q) \neq 0$.

(iv) Sea γ el suplemento del camino q en un ciclo elemental C y $\overline{\gamma'} = b\overline{\gamma}$, con $0 \neq b \in k$. Entonces γ' es suplemento de q.

Fernández probó que $ker(\phi) = I_{T(\Lambda)}$. Primero verificó que los generadores de $I_{T(\Lambda)}$ pertenecieran a $ker(\phi)$.

- En primer lugar, consideró un camino q de longitud $n + 1$ en un ciclo elemental C, de longitud n. Teniendo en cuenta que el álgebra es schurian y de la observación (i) obtuvo que $\phi(q) = 0$.

- En segundo lugar se consideró un camino cuyas flechas no pertenecían a un mismo ciclo elemental. Aquí se analizaron los casos donde $q = \alpha_1 \dots \alpha_n$ (sin flechas β_p), q es un camino con dos o más flechas de la forma β_p y q posee una única flecha de la forma β_p. Observemos que en el segundo caso, $\phi(q) = 0$ es consecuencia inmediata de la observación (i).

- Por último, se consideró un elemento de la forma $q - bq'$, con q y q' caminos en $kC_{T(\Lambda)}$, $s(q) = s(q')$, $e(q) = e(q')$, $\overline{q} = b\overline{q'}$, con $0 \neq b \in k$. Rápidamente de la definición de ϕ se concluyó que $q - bq' \in ker(\phi)$. A su vez, para aquellos caminos q y q' que admiten el mismo suplemento γ en ciclos elementales C y C', se recurrió a un trabajo algebraico más exhaustivo, utilizando nuevamente el hecho de que el álgebra es schurian y, por tal motivo, $\overline{u} = c\overline{\gamma}$, con $0 \neq c \in k$, donde u es un camino arbitrario en kC_Λ.

De esta manera se pudo concluir que $I_{T(\Lambda)} \subset ker(\phi)$.
Para demostrar que $ker(\phi) \subset I_{T(\Lambda)}$, Fernández consideró un elemento genérico $x = \sum_{i=1}^{n} k_i q_i \in ker(\phi)$, donde $k_i \in k$, $s(q_1) = \dots = s(q_n)$ y $e(q_1) = \dots = e(q_n)$. Se consideró, sin pérdida de generalidad, que cada q_i tiene suplemento y se analizaron dos casos, diferenciando si los caminos q_i estaban todos en kC_Λ o si existe un r, $1 \leq r < n$ tal que $q_i \notin kC_\Lambda$, para $r < i \leq n$. En ambos casos, el hecho de que el álgebra es schurian y la observación (iv) llevaron a concluir que $x \in I_{T(\Lambda)}$.
De esta manera, la autora pudo probar que $ker(\phi) = I_{T(\Lambda)}$. Y, finalmente, como $\phi : kC_{T(\Lambda)} \to T(\Lambda)$ es sobreyectiva y $ker(\phi) = I_{T(\Lambda)}$, por el teorema de correspondencia, se obtiene que $T(\Lambda) \simeq kC_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$.
Ejemplificamos a continuación la descripción de las relaciones de $C_{T(\Lambda)}$.

Ejemplo 3.8. Consideremos el álgebra schurian Λ dada en el Ejemplo 3.7, donde vimos que los caminos maximales son $p_1 = \alpha_1\alpha_3\alpha_4$ y $p_2 = \alpha_2\alpha_3\alpha_4$ y, por lo tanto, $C_{T(\Lambda)}$ es:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] & \\
\bullet_3 \arrow[r, "\alpha_3"'] & \bullet_4 \arrow[r, "\alpha_4"'] & \bullet_5 \arrow[ul, "\beta_{p_1}"'] \arrow[dl, "\beta_{p_2}"] \\
 & \bullet_2 \arrow[ul, "\alpha_2"] &
\end{tikzcd}$$

Los ciclos elementales para $C_{T(\Lambda)}$ son $C_1 = \alpha_1\alpha_3\alpha_4\beta_{p_1}$, $C_2 = \alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_{p_2}$ y todas sus permutaciones.
Del Teorema 3.1, obtenemos $I_{T(\Lambda)}$ de la siguiente manera:

- $\alpha_1\alpha_3\alpha_4\beta_{p_1}\alpha_1 = \alpha_3\alpha_4\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_3 = \alpha_4\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_3\alpha_4 = \beta_{p_1}\alpha_1\alpha_3\alpha_4\beta_{p_1} = 0$, pues son los caminos formados por 5 flechas del ciclo elemental $C_1 = \alpha_1\alpha_3\alpha_4\beta_{p_1}$ de longitud 4.

- $\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_{p_2}\alpha_2 = \alpha_3\alpha_4\beta_{p_2}\alpha_2\alpha_3 = \alpha_4\beta_{p_2}\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \beta_{p_2}\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_{p_2} = 0$, pues son los caminos formados por 5 flechas del ciclo elemental $C_2 = \alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_{p_2}$ de longitud 4.

- $\alpha_1\alpha_3\alpha_4\beta_{p_2} = \alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_{p_1} = 0$, pues α_1 es una flecha del ciclo elemental C_1, mientras que β_{p_2} pertenece a C_2. A su vez, α_2 es una flecha de C_2, pero β_{p_1} está en C_1.

- $\beta_{p_1}\alpha_1 - \beta_{p_2}\alpha_2 = 0$, pues, tomando $q = \beta_{p_1}\alpha_1$ y $q' = \beta_{p_2}\alpha_2$, tenemos que $s(q) = s(q') = 5$, $t(q) = t(q') = 3$ y $\alpha_3\alpha_4$ es el suplemento de q y q' en C_1 y C_2, respectivamente.

Ejemplo 3.9. Sea Λ el álgebra dada por el carcaj C_Λ:

$$\begin{tikzcd}
\bullet_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & \bullet_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & \bullet_3 \arrow[d, "\alpha_4"] & \\
\bullet_4 \arrow[r, "\alpha_5"'] & \bullet_5 \arrow[r, "\alpha_6"'] & \bullet_6 \arrow[r, "\alpha_7"'] & \bullet_7
\end{tikzcd}$$

con las relaciones $\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = \alpha_3\alpha_5\alpha_6$, $\alpha_4\alpha_7 = 0$ y $\alpha_6\alpha_7 = 0$. Entonces, tenemos que $p_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_4$, $p_2 = \alpha_3\alpha_5\alpha_6$ y $p_3 = \alpha_7$ son los caminos maximales en Λ. Como $\overline{p_1} = \overline{p_2}$, el diagrama de $T(\Lambda)$ se obtiene agregando las flechas $\beta_{p_1} : 6 \to 1$ y $\beta_{p_3} : 7 \to 6$. Luego, $C_{T(\Lambda)}$ es:

$$\begin{tikzcd}
\bullet_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & \bullet_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & \bullet_3 \arrow[d, "\alpha_4"] & \\
\bullet_4 \arrow[r, "\alpha_5"'] & \bullet_5 \arrow[r, "\alpha_6"'] & \bullet_6 \arrow[r, shift left, "\alpha_7"] \arrow[ull, "\beta_{p_1}"'] & \bullet_7 \arrow[l, shift left, "\beta_{p_3}"]
\end{tikzcd}$$

$C_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_4\beta_{p_1}$, $C_2 = \alpha_3\alpha_5\alpha_6\beta_{p_1}$, $C_3 = \alpha_7\beta_{p_3}$ y todas sus permutaciones, son los ciclos elementales. Luego, del Teorema 3.1, tenemos que $T(\Lambda)$ es el álgebra dada por el diagrama $C_{T(\Lambda)}$ con las siguientes relaciones:

- $\alpha_1\alpha_2\alpha_4\beta_{p_1}\alpha_1 = \alpha_2\alpha_4\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2 = \alpha_4\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = \beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2\alpha_4\beta_{p_1} = 0$

- $\alpha_3\alpha_5\alpha_6\beta_{p_1}\alpha_3 = \alpha_5\alpha_6\beta_{p_1}\alpha_3\alpha_5 = \alpha_6\beta_{p_1}\alpha_3\alpha_5\alpha_6 = \beta_{p_1}\alpha_3\alpha_5\alpha_6\beta_{p_1} = 0$

- $\alpha_7\beta_{p_3}\alpha_7 = \beta_{p_3}\alpha_7\beta_{p_3} = 0$.

- $\alpha_4\alpha_7 = 0$.

- $\alpha_6\alpha_7 = 0.$
- $\beta_{p_2}\beta_{p_1} = 0.$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3\alpha_5\alpha_6 = 0.$
- $\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2\alpha_4 - \alpha_7\beta_{p_3} = 0.$
- $\beta_{p_1}\alpha_3\alpha_5\alpha_6 - \alpha_7\beta_{p_3} = 0.$

En [1] se probó que es posible encontrar a partir de un álgebra schurian triangular Λ, todas las álgebras cuyas extensiones triviales son isomorfas a $T(\Lambda)$. En particular, las álgebras encontradas también son schurian.

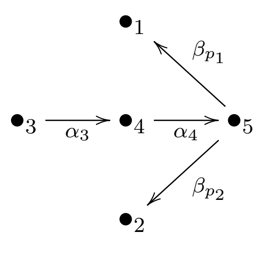
Proposición 3.3. Sea Λ un álgebra schurian y su extensión trivial $T(\Lambda)$. Sea Λ' el álgebra que se obtiene eliminando exactamente una flecha por cada ciclo elemental de $C_{T(\Lambda)}$, con las relaciones inducidas. Si Λ' es schurian, entonces $T(\Lambda') \simeq T(\Lambda)$, como k-álgebras.

Definición 3.7. Sea $\Lambda = kC/I$ una k-ágebra. Diremos que Λ es **triangular** si C no tiene ciclos orientados.

Proposición 3.4. Sea Λ un álgebra schurian triangular y supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son los ciclos elementales de $C_{T(\Lambda)}$. Si Λ' se obtiene de $T(\Lambda)$, eliminando exactamente una flecha por cada ciclo elemental C_i, $i = 1, \ldots, m$; entonces Λ' es schurian.

Ejemplo 3.10. Consideremos Λ el álgebra del Ejemplo 3.7. Recordemos que los ciclos elementales para $C_{T(\Lambda)}$ eran $C_1 = \alpha_1\alpha_3\alpha_4\beta_{p_1}$ y $C_2 = \alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_{p_2}$.

1. Eliminando α_1 de C_1 y α_2 de C_2 obtenemos el álgebra Λ'_1 dada por:



2. Si eliminamos α_1 de C_1 y β_{p_2} de C_2 se obtiene $\Lambda'_2 = kC_{T(\Lambda'_2)}/I_{T(\Lambda'_2)}$ siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet_1 & \\
\bullet_3 \arrow[r, "\alpha_3"'] & \bullet_4 \arrow[r, "\alpha_4"'] & \bullet_5 \arrow[ul, "\beta_{p_1}"'] \\
 & \bullet_2 \arrow[ul, "\alpha_2"] &
\end{tikzcd}$$

donde $I_{T(\Lambda'_2)} = \langle \alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_{p_1} \rangle$.

3. Si eliminamos β_{p_1} de C_1 y α_2 de C_2 obtenemos $\Lambda'_3 = kC_{T(\Lambda'_3)}/I_{T(\Lambda'_3)}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] & \\
\bullet_3 \arrow[r, "\alpha_3"'] & \bullet_4 \arrow[r, "\alpha_4"'] & \bullet_5 \arrow[dl, "\beta_{p_2}"] \\
 & \bullet_2 &
\end{tikzcd}$$

donde $I_{T(\Lambda'_3)} = \langle \alpha_1\alpha_3\alpha_4\beta_{p_2} \rangle$.

4. Si elegimos eliminar α_3, será la única, pues la misma pertenece a ambos ciclos C_1 y C_2. En ese caso, obtenemos $\Lambda'_4 = kC_{T(\Lambda'_4)}/I_{T(\Lambda'_4)}$ dada por:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] & \\
\bullet_3 & \bullet_4 \arrow[r, "\alpha_4"'] & \bullet_5 \arrow[ul, "\beta_{p_1}"'] \arrow[dl, "\beta_{p_2}"] \\
 & \bullet_2 \arrow[ul, "\alpha_2"] &
\end{tikzcd}$$

con $I_{T(\Lambda'_4)} = \langle \beta_{p_1}\alpha_1 - \beta_{p_2}\alpha_2 \rangle$.

5. Del mismo modo que para hicimos el punto anterior, eliminando α_4, se obtiene $\Lambda'_5 = kC_{T(\Lambda'_5)}/I_{T(\Lambda'_5)}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] & \\
\bullet_3 \arrow[r, "\alpha_3"'] & \bullet_4 & \bullet_5 \arrow[ul, "\beta_{p_1}"'] \arrow[dl, "\beta_{p_2}"] \\
 & \bullet_2 \arrow[ul, "\alpha_2"] &
\end{tikzcd}$$

con $I_{T(\Lambda_5')} = \langle \beta_{p_1}\alpha_1 - \beta_{p_2}\alpha_2 \rangle$.

Notemos que si eliminamos β_{p_1} y β_{p_2} de $C_{T(\Lambda)}$ obtenemos el álgebra original Λ.

Las álgebras Λ_1', Λ_2', Λ_3', Λ_4' y Λ_5' son schurian. Por la Proposición 3.3, sus extensiones triviales son isomorfas a $T(\Lambda)$, como k-álgebras.

Por la Proposición 3.4 y el hecho de que Λ es triangular, ya sabíamos de antemano que las álgebras Λ_i', $i = 1, \ldots, 5$ eran schurian. Además, son todas las que cumplen dicha condición. Éste hecho se observa en el siguiente corolario.

Corolario 3.1. Sea Λ un álgebra schurian triangular. Las álgebras cuyas extensiones triviales son isomorfas a $T(\Lambda)$ son, precisamente, las que se obtienen eliminando exactamente una flecha de cada ciclo elemental de $C_{T(\Lambda)}$, con las relaciones inducidas.

3.2.2. Relaciones de la extensión trivial T(Λ) de un álgebra monomial

En su tesis de maestría (2017), Hernández decidió centrar su análisis en álgebras monomiales, cambiando el contexto de [1]. En esta sección haremos un análisis similar al realizado para álgebras schurian, esta vez para álgebras monomiales. Definiremos dichas álgebras, las ejemplificaremos y analizaremos la prueba de algunos resultados demostrados en [2].

Definición 3.8. Un álgebra Λ se denomina **monomial** si puede representarse de la forma $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$, donde I_Λ es un ideal admisible generado por caminos.

En otras palabras, en C_Λ, cuando Λ es un álgebra monomial, no se aceptan relaciones de conmutatividad; esto es, relaciones de igualdad de caminos o combinación lineal de caminos.

Ejemplo 3.11. El álgebra dada por el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
\bullet_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_3"'] & & \bullet_4 \\
& \bullet_3 \arrow[ur, "\alpha_4"'] &
\end{tikzcd}$$

con $I = < \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4 >$, no es un álgebra monomial, ya que I está generado por una combinación lineal de caminos.

En [2] se demostraron propiedades de esta clase de álgebras. Se probó, utilizando propiedades específicas de esta familia de álgebras, que es posible encontrar una base de $soc\,\Lambda$ formada por clases de caminos maximales en Λ. Este resultado permitió caracterizar el ideal $I_{T(\Lambda)}$ de relaciones de la extensión trivial $T(\Lambda) = kC_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$ cuando Λ es un álgebra monomial.

Teorema 3.2. [2, Teorema 5.17] Sea $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$ un álgebra de dimensión finita, donde I_Λ está generado por caminos. Sea $I_{T(\Lambda)}$ el ideal de $kC_{T(\Lambda)}$ generado por:

(i) Los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental.

(ii) Los elementos de la forma $\mu - \mu'$, donde μ y μ' son caminos diferentes de $kC_{T(\Lambda)}$ con un suplemento común γ en ciclos elementales C y C', respectivamente.

Entonces, $I_{T(\Lambda)}$ es un ideal admisible. Luego $T(\Lambda) \simeq kC_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$.

La prueba del Teorema 3.2 se encuentra en [2]. Al igual que lo hicimos para las algebras schurian, daremos una breve descripción de las herramientas utilizadas en la misma.
Para demostrar el Teorema precedente también se definió el morfismo $\phi : kC_{T(\Lambda)} \to T(\Lambda)$ sobre los caminos triviales y los caminos de longitud uno como sigue:

$$\phi(e_i) = (\overline{e_i}, 0)$$

$$\phi(\alpha) = (\overline{\alpha}, 0)$$

$$\phi(\beta_p) = (0, \overline{p}^*),\ \forall\, p \in \mathbf{M}$$

A su vez, se definieron los morfismos asociados $\varphi_1 = \pi_1 \circ \phi : kC_{T(\Lambda)} \to \Lambda$ y $\varphi_2 = \pi_2 \circ \phi : kC_{T(\Lambda)} \to D(\Lambda)$, donde π_1 y π_2 son las proyecciones inducidas por la descomposición $T(\Lambda) = \Lambda \oplus D(\Lambda)$.
En [2], antes de comenzar con la demostración, se presentan una serie de propiedades y resultados que se verifican para las álgebras monomiales, utilizados luego en la demostración del teorema. Entre ellos:

(i) Cualquier camino no nulo de Λ está contenido en un ciclo elemental.

(ii) Si $\varphi_2(q)(\overline{u}) \neq 0$, entonces u es un suplemento de q.

(iii) Sea $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$ una k-álgebra de dimensión finita, donde I_Λ está generado por caminos. Para cada $j \in (C_{T(\Lambda)})_0$, sea Y_j el ideal en $kC_{T(\Lambda)}$ generado por:

  - los ciclos orientados de j a j que no están contenidos en un ciclo elemental

- los elementos $C - C'$, donde C y C' son ciclos elementales con origen j.
  Entonces, $Y_j \subseteq ker(\phi) \cap e_j kC_{T(\Lambda)} e_j$.

(iv) Si $\mu - \mu'$ es un generador de I' de tipo (ii) en Teorema 3.2, entonces $\mu, \mu' \in (\beta_p)_{p \in \mathbf{M}}$ por poseer un suplemento común γ, y se tiene que $\gamma \in kC_\Lambda$.

(v) Si un camino q en $kC_{T(\Lambda)}$ no está en I', entonces q posee un suplemento en algún ciclo elemental.

En esta demostración, al igual que en [1], se prueba que $I' = ker(\phi)$. En primer lugar, se demuestra que $I' \subseteq ker(\phi)$. Para ello se verifica que los generadores de I' pertenecen a $ker(\phi)$. Se analizan dos casos:

- En primer lugar, si el generador es un camino q que no está contenido en ningún ciclo elemental, entonces:
  - Si $q \in kC_\Lambda$ entonces, por (i) se tiene que $\overline{q} = 0$. Luego, $\phi(q) = (0, 0)$ y $q \in ker(\phi)$.
  - Si $q \in (\beta_p)_{p \in \mathbf{M}}$, entonces $\phi(q) = (0, \varphi_2(q))$. Se prueba entonces, utilizando (ii), que $\varphi_2(q) = 0$ lo que muestra que $q \in ker(\phi)$.
- En segundo lugar, se considera un generador de la forma $v = \mu - \mu'$, donde μ y μ' son caminos de i a j en $kC_{T(\Lambda)}$ con un suplemento común. Por (iv), se tiene que $\phi(v) = (0, \varphi_2(v))$. Luego, utilizando (ii) y (iii), Hernández prueba que $\varphi_2(v) = 0$, lo que implica que $v \in ker(\phi)$.

Hasta aquí, la autora ha probado que $I' \subseteq ker(\phi)$.
Para probar que se verifica la igualdad, se demostró que $dim_k kC_{T(\Lambda)}/I' = dim_k T(\Lambda) = 2\, dim_k \Lambda$. Para ello, la autora considera el epimorfismo canónico $\pi : kC_{T(\Lambda)} \to kC_{T(\Lambda)}/I'$, denotando $\pi(y) = \widetilde{y}$ y, como ϕ es un morfismo sobreyectivo e $I' \subseteq ker(\phi)$, considera el morfismo inducido $\overline{\phi} : kC_{T(\Lambda)} \to kC_{T(\Lambda)}/ker(\phi) = T(\Lambda)$ tal que $\overline{\phi} \circ \pi = \phi$. Además, considera el monomorfismo inclusión $i : \Lambda \to kC_{T(\Lambda)}/I'$ inducido por la inclusión de kC_Λ en $kC_{T(\Lambda)}$.
Como $kC_{T(\Lambda)} = kC_\Lambda + k(\beta_p)_{p \in \mathbf{M}}$, se tiene que $e_j kC_{T(\Lambda)} e_i = e_j kC_\Lambda e_i + e_j k(\beta_p)_{p \in \mathbf{M}} e_i$, para $i, j \in (C_{T(\Lambda)})_0$. Entonces, la autora define los subespacios de $kC_{T(\Lambda)}/I'$, $\mathcal{P}_{ij} = \pi(e_j kC_\Lambda e_i)$ y $\mathcal{F}_{ij} = \pi(e_j k(\beta_p)_{p \in \mathbb{M}} e_i)$, donde $\mathcal{P}_{ij} = i(e_j \Lambda e_i) \simeq e_j \Lambda e_i$. Así, $\sum_{i,j} dim_k \mathcal{P}_{ij} = dim_k \Lambda$.
Luego se prueba, utilizando (v), que $dim_k(\mathcal{P}_{ij}) \geq dim_k(\mathcal{F}_{ji})$, lo que implica que $dim_k kC_{T(\Lambda)}/I' \leq dim_k T(\Lambda)$. Por el hecho de que $\overline{\phi}$ es sobreyectiva se tiene que $dim_k kC_{T(\Lambda)}/I' \geq dim_k T(\Lambda)$. Entonces, $dim_k kC_{T(\Lambda)}/I' = dim_k T(\Lambda)$, lo que demuestra que $I' = ker(\phi)$.

Finalmente, por el teorema de correspondencia $T(\Lambda) \simeq kC_{T(\Lambda)}/I'$, como se quería demostrar.

En el siguiente ejemplo, utilizando el Teorema 3.2, encontramos $I_{T(\Lambda)}$ cuando Λ es un álgebra monomial.

Ejemplo 3.12. Sea Λ el álgebra del Ejemplo 3.4, donde encontramos que $C_{T(\Lambda)}$ es:

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & \bullet_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & \bullet_3 \arrow[ll, bend left, "\beta_p"] \arrow[loop right, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

Como Λ es monomial, del Teorema 3.2 obtenemos que $T(\Lambda)$ es el álgebra dada por el diagrama $C_{T(\Lambda)}$ con las relaciones:

- $(\alpha_3)^2 = 0$
- $\alpha_2\beta_p = 0$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_p\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3\beta_p\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\beta_p\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \beta_p\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_p = 0$

Observemos que del punto (ii) del Teorema 3.2 no surgen relaciones para el álgebra precedente, pues $C_{T(\Lambda)}$ tiene únicamente el ciclo elemental $C = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_p$ y sus permutaciones.

Ejemplo 3.13. Consideremos Λ el álgebra dada por el carcaj C_Λ:

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[r, "\alpha_2"] & \bullet_2 & \bullet_3 \arrow[l, "\alpha_3"'] \end{tikzcd}$$

con la relación $(\alpha_1)^2 = 0$. Claramente, Λ es monomial.

En este caso, los caminos maximales son $p_1 = \alpha_1\alpha_2$ y $p_2 = \alpha_3$.

Así, $C_{T(\Lambda)}$ está dado por:

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha_2"] & \bullet_2 \arrow[l, bend left, "\beta_{p_1}"] \arrow[r, bend right, "\beta_{p_2}"'] & \bullet_3 \arrow[l, bend right, "\alpha_3"'] \end{tikzcd}$$

y los ciclos elementales son $C_1 = \alpha_1\alpha_2\beta_{p_1}$, $C_2 = \alpha_3\beta_{p_2}$ y todas sus permutaciones.

Por el Teorema 3.2, las relaciones en $C_{T(\Lambda)}$ están dadas por:

- $(\alpha_1)^2 = 0$
- $\alpha_1\alpha_2\beta_{p_1}\alpha_1 = 0; \alpha_2\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2 = 0; \beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2\beta_{p_1} = 0$
- $\alpha_3\beta_{p_2}\alpha_3 = 0$; $\beta_{p_2}\alpha_3\beta_{p_2} = 0$
- $\alpha_2\beta_{p_2} = 0$; $\alpha_3\beta_{p_1} = 0$
- $\beta_{p_1}\alpha_2 = 0$
- $\beta_{p_1}\alpha_1\alpha_2 - \beta_{p_2}\alpha_3 = 0$

3.2.3. Caso particular de las álgebras monomiales: álgebras gentiles

Definición 3.9. Dos k-álgebras de dimensión finita, Λ_1 y Λ_2, se dicen **morita equivalentes** si las categorías *mod* Λ_1 y *mod* Λ_2 son equivalentes.

Definición 3.10. Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Diremos que Λ se llama **de cuerdas** si es morita equivalente a un álgebra de la forma kC/I, donde:

(C1) I está generado por caminos

(C2) Cada vértice de C es inicio y final de a lo sumo dos flechas

(C3) Para cada flecha $\alpha \in C$ existe a lo sumo una flecha $\beta \in C$ tal que $\alpha\beta \notin I$ y existe a lo sumo una flecha $\gamma \in C$ tal que $\gamma\alpha \notin I$

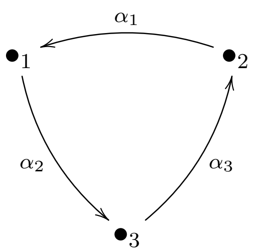
Definición 3.11. Un álgebra de cuerdas se dice **gentil** si satisface:

(G1) Para cada flecha $\alpha \in C$ existe a lo sumo una flecha $\delta \in C$ tal que $\alpha\delta \in I$ y existe a lo sumo una flecha $\epsilon \in C$ tal que $\epsilon\alpha \in I$

(G2) I está generado por caminos de longitud 2.

Ejemplo 3.14.

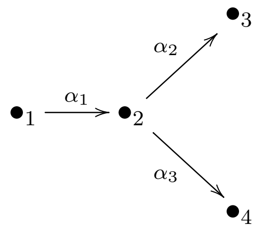
- El álgebra Λ dada por el siguiente carcaj:



con la relación $\alpha_1\alpha_2 = 0$ es un álgebra de cuerdas, pues $I_\Lambda =< \alpha_1\alpha_2 >$, el vértice 1 es inicio de α_2 y final de α_1, el vértice 2 es inicio de α_1 y final de α_3 y el vértice 3 es inicio de α_3 y final de α_2. Además, para α_1 existe únicamente α_3 tal que $\alpha_3\alpha_1 \notin I_\Lambda$ y ninguna flecha β tal que $\alpha_1\beta \notin I_\Lambda$; para α_2 solo existe α_3 tal que $\alpha_2\alpha_3 \notin I_\Lambda$ y ninguna flecha γ tal que $\gamma\alpha_2 \notin I_\Lambda$; mientras que para α_3 existen solo α_1 y α_2 tal que $\alpha_3\alpha_1 \notin I_\Lambda$ y $\alpha_2\alpha_3 \notin I_\Lambda$.

A su vez es un álgebra gentil, pues para α_1 existe únicamente α_2 tal que $\alpha_1\alpha_2 \in I_\Lambda$ y ninguna flecha ϵ tal que $\epsilon\alpha_1 \in I_\Lambda$; para α_2 existe solo α_1 tal que $\alpha_1\alpha_2 \in I_\Lambda$ y ninguna flecha δ tal que $\alpha_2\delta \in I_\Lambda$; mientras que para α_3 no existen flechas δ y ϵ tal que $\alpha_3\delta \in I_\Lambda$ y $\epsilon\alpha_3 \in I_\Lambda$. Además, $I_\Lambda =< \alpha_1\alpha_2 >$ y $\alpha_1\alpha_2$ tiene longitud 2.

- El álgebra dada por el siguiente carcaj, con las relaciones $\alpha_1\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1\alpha_3 = 0$:



  corresponde a un álgebra de cuerdas pero no es un álgebra gentil, pues para α_1 existen dos flechas, α_2 y α_3, tales que $\alpha_1\alpha_2 \in I$ y $\alpha_1\alpha_3 \in I$, donde $I = \langle \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3 \rangle$.

En [2] se probó que la descripción obtenida para las relaciones de la extensión trivial de un álgebra monomial, vista en el Teorema 3.2, puede simplificarse cuando el álgebra es gentil. Se obtiene entonces el siguiente resultado.

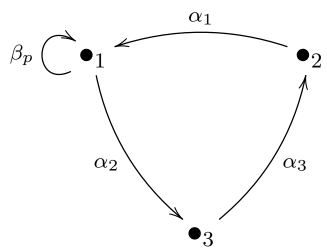
Teorema 3.3. [2, Teorema 6.11] Sea $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$ un álgebra gentil. Sea $I_{T(\Lambda)}$ el ideal generado por:

(i) Los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental y

(ii) los elementos de la forma $C - C'$ donde C y C' son ciclos elementales que comienzan en un mismo vértice de $C_{T(\Lambda)}$.

Entonces, $I_{T(\Lambda)}$ es admisible e $I_{T(\Lambda)} = ker(\phi)$. Luego, $T(\Lambda) \simeq kC_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$.

Ejemplo 3.15. Tomemos el álgebra Λ dada en el Ejemplo 3.14. El único camino máximal será $p = \alpha_2\alpha_3\alpha_1$. Luego, $C_{T(\Lambda)}$ está dado por:



El ciclo elemental es $C = \alpha_2\alpha_3\alpha_1\beta_p$ y todas sus permutaciones.

Por el Teorema 3.3, las relaciones en $C_{T(\Lambda)}$ son las siguientes:

- $\alpha_1\alpha_2 = 0$

- $\alpha_2\alpha_3\alpha_1\beta_p\alpha_2 = \alpha_3\alpha_1\beta_p\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\beta_p\alpha_2\alpha_3\alpha_1 = \beta_p\alpha_2\alpha_3\alpha_1\beta_p = 0$

- $\beta_p\alpha_2\alpha_3\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3\alpha_1\beta_p = 0$

Consideremos las siguientes propiedades de los ciclos de una k-álgebra de dimensión finita $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$:

(T1) Toda permutación de un ciclo maximal en Λ es un ciclo maximal en Λ.

(T2) Todo camino no trivial de kC_Λ y no nulo en Λ está contenido en un único ciclo maximal en Λ, a menos de permutaciones.

(T3) Hay a lo sumo 2 ciclos distintos de j a j en kC_Λ maximales en Λ para cualquier vértice j de C_Λ. Si hay dos, son iguales en Λ.

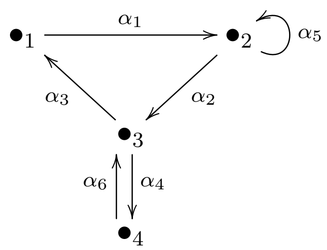
(T4) Si hay un ciclo $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_s$ en kC_Λ de j a j que es no nulo y no maximal en Λ, entonces $\overline{\alpha_s\alpha_1} = 0$ en Λ y $dim_k End_\Lambda(P_j) = 4$.

En [2] se probó que si un álgebra de dimensión finita Λ satisface las propiedades $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$, entonces existe un álgebra gentil Λ' tal que $\Lambda \cong T(\Lambda')$. En la siguiente proposición, dada en [2], se prueba la existencia de Λ' y se muestra una manera de construirla.

Proposición 3.5. [2, Proposición 6.14] Sea $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$ una k-álgebra de dimensión finita que satisface $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$. Sea $C_{\Lambda'}$ el carcaj que se obtiene eliminando exactamente una flecha de cada ciclo de kC_Λ maximal en Λ, y sea $I_{\Lambda'} = kC_{\Lambda'} \cap I_\Lambda$ el ideal inducido.

Entones, $\Lambda' = kC_{\Lambda'}/I_{\Lambda'}$ es un álgebra gentil con $T(\Lambda') \cong \Lambda$.

Ejemplo 3.16. Sea el álgebra de dimensión finita Λ, cuyo carcaj es el siguiente:



con las relaciones:

- $\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2 = \alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_3\alpha_1 = \alpha_5\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5 = 0$
- $\alpha_4\alpha_6\alpha_4 = \alpha_6\alpha_4\alpha_6 = 0$
- $\alpha_1\alpha_2 = 0$; $\alpha_2\alpha_4 = 0$; $\alpha_6\alpha_3 = 0$; $(\alpha_5)^2 = 0$
- $C_1 = C_1''''$; $C_1' = C_2$

donde:

$$C_1 = \alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5,\ C_1' = \alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2,\ C_1'' = \alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_3 \text{ y } C_1''' = \alpha_5\alpha_2\alpha_3\alpha_1$$
$$C_2 = \alpha_4\alpha_6,\ C_2' = \alpha_6\alpha_4$$

Observemos que los ciclos C_1 y C_2 son maximales. En efecto, para el ciclo $C_1 = \alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5$ tenemos:
$\alpha_5 C_1 = \alpha_5\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5 = 0$
$\alpha_1 C_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5 = 0$, pues $\alpha_1\alpha_2 = 0$
$C_1\alpha_5 = \alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_5 = 0$, pues $\alpha_5\alpha_5 = (\alpha_5)^2 = 0$
$C_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2 = 0$

Y para $C_2 = \alpha_4\alpha_6$ se tiene:
$\alpha_2 C_2 = \alpha_2\alpha_4\alpha_6 = 0$, pues $\alpha_2\alpha_4 = 0$
$\alpha_6 C_2 = \alpha_6\alpha_4\alpha_6 = 0$
$C_2\alpha_4 = \alpha_4\alpha_6\alpha_4 = 0$
$C_2\alpha_3 = \alpha_4\alpha_6\alpha_3 = 0$, pues $\alpha_6\alpha_3 = 0$

Notemos que los ciclos de C_Λ verifican (T_1), (T_2), (T_3) y (T_4).
Consideremos el ciclo maximal $C_1 = \alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5$. Su permutación $C_1' = \alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2$ también es maximal. En efecto:
$\alpha_6 C_1' = \alpha_6\alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2 = 0$, pues $\alpha_6\alpha_3 = 0$
$\alpha_2 C_1' = \alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2 = 0$
$C_1'\alpha_4 = \alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_4 = 0$, pues $\alpha_2\alpha_4 = 0$
$C_1'\alpha_3 = \alpha_3\alpha_1\alpha_5\alpha_2\alpha_3 = 0$
De la misma manera, se ve fácilmente que las permutaciones C_1'' y C_1''' son ciclos maximales.
Ahora, considerando el ciclo $C_2 = \alpha_4\alpha_6$. Su permutación $C_2' = \alpha_6\alpha_4$ también es maximal. En efecto: $\alpha_4 C_2' = \alpha_4\alpha_6\alpha_4 = 0$ y $C_2'\alpha_6 = \alpha_6\alpha_4\alpha_6 = 0$.
Además, cualquier camino no trivial de kC_Λ y no nulo de Λ está contenido en un único ciclo maximal en Λ, a menos de permutaciones. Por ejemplo, $\alpha_3\alpha_1$ está contenido en C_1, C_1' y C_1''', mientras que $\alpha_5\alpha_2\alpha_3$ está contenido en C_1'' y C_1''''. Los caminos α_i, de longitud 1, para $i = 1, 2, 3, 5$ están contenidos en C_1 y todas sus permutaciones; y los caminos α_i, de longitud 1, para $i = 4, 6$ están contenidos en C_2 y su permutación C_2'.
Observemos que $(T3)$ también se verifica, pues para los vértices 1 y 4 tenemos únicamente los ciclos maximales C_1'' y C_2', respectivamente. Pero, para el vértice 2 tenemos los ciclos C_1 y C_1''', los cuales son iguales y, para el vértice 3 tenemos los ciclos C_1' y C_2, que también son iguales.
Finalmente, para comprobar $(T4)$, tomamos el único ciclo no maximal no nulo de kC_Λ, $\gamma = \alpha_2\alpha_3\alpha_1$, que empieza y termina en el vértice 2. Se comprueba que $\overline{\alpha_1\alpha_2} = 0$ en Λ y $dim_k End_\Lambda(P_2) = 4$; es decir, hay 4 ciclos distintos que termi-

nan y empiezan en el vértice 2.

Ahora, consideremos C_{Λ_1}, el carcaj que se obtiene eliminando exactamente una flecha (α_5 y α_6) por cada ciclo de kC_Λ maximal en Λ.

$$\begin{tikzcd}
\bullet_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & \bullet_2 \arrow[dl, "\alpha_2"] \\
& \bullet_3 \arrow[ul, "\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_4"] & \\
& \bullet_4 &
\end{tikzcd}$$

con $I_{\Lambda_1} = kC_{\Lambda_1} \cap I_\Lambda = \langle \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_4 \rangle$. Luego, por la Proposición 3.5, se tiene que $\Lambda_1 = kC_{\Lambda_1}/I_{\Lambda_1}$ es un álgebra gentil y $T(\Lambda_1) \cong \Lambda$.

De igual manera, eliminando α_5 y α_4, obtenemos C_{Λ_2}:

$$\begin{tikzcd}
\bullet_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & \bullet_2 \arrow[dl, "\alpha_2"] \\
& \bullet_3 \arrow[ul, "\alpha_3"] & \\
& \bullet_4 \arrow[u, "\alpha_6"] &
\end{tikzcd}$$

con $I_{\Lambda_2} = \langle \alpha_1\alpha_2, \alpha_6\alpha_3 \rangle$. Además, Λ_2 es un álgebra gentil y $T(\Lambda_2) \cong \Lambda$.

Eliminando α_1 y α_6, obtenemos C_{Λ_3}:

$$\begin{tikzcd}
\bullet_1 & & \bullet_2 \arrow[dl, "\alpha_2"] \arrow[loop right, "\alpha_5"] \\
& \bullet_3 \arrow[ul, "\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_4"] & \\
& \bullet_4 &
\end{tikzcd}$$

con $I_{\Lambda_3} = \langle \alpha_2\alpha_4, (\alpha_5)^2 \rangle$. Además, Λ_3 es un álgebra gentil y $T(\Lambda_3) \cong \Lambda$.

Eliminando α_2 y α_4, obtenemos C_{Λ_4}:

$$\begin{tikzcd}
\bullet_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & \bullet_2 \arrow[loop right, "\alpha_5"] \\
& \bullet_3 \arrow[ul, "\alpha_3"] & \\
& \bullet_4 \arrow[u, "\alpha_6"] &
\end{tikzcd}$$

con $I_{\Lambda_4} = \langle \alpha_6\alpha_3, (\alpha_5)^2 \rangle$. Además, Λ_4 es un álgebra gentil y $T(\Lambda_4) \cong \Lambda$.

Utilizando la Proposición 3.5, de la misma forma que lo hicimos en el ejemplo anterior, podemos encontrar todas las álgebras gentiles, que se obtienen eliminando exactamente una flecha por cada ciclo de kC_Λ maximal en Λ, cuyas extensiones triviales son isomorfas a Λ.

3.2.4. Relaciones de la extensión trivial T(Λ) de un álgebra de dimensión finita

Para culminar este trabajo presentamos un resultado obtenido en [6] (sin publicar) por Fernández Elsa. Con este resultado se generaliza lo abordado en las secciones anteriores.

Definición 3.12. Para cada vértice $x \in C_{T(\Lambda)}$ se define el ideal bilátero I'_x en $kC_{T(\Lambda)}$ generado por:

1. Ciclos orientados de x a x que no están contenidos en un ciclo elemental.
2. Los elementos de la forma $\omega(C')C - \omega(C)C'$, donde C y C' son ciclos elementales que empiezan y terminan en x.

La anterior definición será de utilidad para poder encontrar las relaciones de la extensión trivial de cualquier álgebra de dimensión finita. En el siguiente teorema, dado en [6], se explicitan dichas relaciones:

Teorema 3.4. [6, Teorema 1.1] Sea $\Lambda = kC_\Lambda/I_\Lambda$ un álgebra de dimensión finita y sea $T(\Lambda) = kC_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$ su extensión trivial. Entonces el carcaj $C_{T(\Lambda)}$ es como en la Proposición 3.2 y el ideal $I_{T(\Lambda)}$ es generado por la unión de los siguientes conjuntos:

(i) Un conjunto generador del ideal de relaciones I_Λ de Λ.

(ii) Los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental.

(iii) Para cualquier par de vértices x e y en $C_{T(\Lambda)}$, la combinación lineal de caminos $\rho \in \epsilon_x kC_{T(\Lambda)}\epsilon_y$ tal que $\rho q \in I'_x$ o $q\rho \in I'_y$, para cualquier suplemento q en un ciclo elemental C.

Para la prueba del teorema precedente, la autora ha mostrado que $ker(\phi) = I_{T(\Lambda)}$, donde ϕ es el morfismo considerado anteriormente. Para ello, ha utilizado el mismo procedimiento que se hizo en la demostración del Teorema 3.2, primero vió que $I_{T(\Lambda)} \subseteq ker(\phi)$ y luego, utilizando el hecho de que $dim_k kC_{T(\Lambda)} = dim_k T(\Lambda)$, probó la igualdad. Tanto en [2] como en [6], se tomó como referencia la prueba realizada por Fernández y Platzeck en [5], y se utilizó los resultados necesarios y adecuados al contexto y a las caracteríscticas del álgebra estudiada.

Ejemplo 3.17. Consideremos el álgebra Λ, donde C_Λ está dado por:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
\bullet_2 \arrow[dr, "\alpha_3"'] & & \bullet_3 \arrow[dl, "\alpha_4"] \\
& \bullet_4 \arrow[loop below, "\alpha_5"] &
\end{tikzcd}$$

con $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4$ y $(\alpha_5)^2 = 0$.

Observemos que Λ no es un álgebra schurian pues $\alpha_1\alpha_3$ y $\alpha_1\alpha_3\alpha_5$ son dos caminos distintos entre los vértices 1 y 4. Tampoco es un álgebra monomial puesto que está generada por la combinación lineal de caminos $\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4 = 0$ (por lo tanto, no es de cuerdas ni gentil). Y Λ tampoco es un álgebra triangular, pues tiene el ciclo orientado α_5.

Una base de $soc\,\Lambda$ es $\{\overline{p_1} = \overline{\alpha_1\alpha_3\alpha_5}, \overline{p_2} = \overline{\alpha_2\alpha_4\alpha_5}\}$. Como $\overline{p_1} = \overline{p_2}$, pues $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4$, entonces el diagrama de $T(\Lambda)$ se obtiene agregando únicamente $\beta_p : 4 \to 1$. Luego, $C_{T(\Lambda)}$ está dado por:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
\bullet_2 \arrow[dr, "\alpha_3"'] & & \bullet_3 \arrow[dl, "\alpha_4"] \\
& \bullet_4 \arrow[loop below, "\alpha_5"] \arrow[uu, "\beta_p"] &
\end{tikzcd}$$

Los ciclos elementales en $C_{T(\Lambda)}$ son $C_1 = \alpha_1\alpha_3\alpha_5\beta_p$, $C_2 = \alpha_2\alpha_4\alpha_5\beta_p$ y todas sus permutaciones.

Para hallar el ideal $I_{T(\Lambda)}$ utilizaremos el Teorema 3.4, visto anteriormente. Para eso, primero encontraremos los ideales biláteros I'_x para cada vértice x de $C_{T(\Lambda)}$.

- Para $x = 1$, encontramos I'_1 generado por las relaciones:

  1. $\alpha_1\alpha_3\beta_p = \alpha_2\alpha_4\beta_p = 0$.
  2. $\alpha_1\alpha_3\alpha_5\beta_p - \alpha_2\alpha_4\alpha_5\beta_p = 0$, pues $\omega(C') = \omega(C) = 1$.

- Para $x = 2$, encontramos $I'_2 = \langle\alpha_3\beta_p\alpha_1\rangle$.

- Para $x = 3$, encontramos $I'_3 = \langle\alpha_4\beta_p\alpha_2\rangle$.

- Para $x = 4$, encontramos $I'_4 =$ generado por las relaciones:

- $\beta_p\alpha_1\alpha_3\alpha_5 - \beta_p\alpha_2\alpha_4\alpha_5 = 0$, pues $\omega(C') = \omega(C) = 1$
- $\alpha_5\beta_p\alpha_1\alpha_3 - \alpha_5\beta_p\alpha_2\alpha_4 = 0$ pues $\omega(C') = \omega(C) = 1$

Por el Teorema 3.4 obtenemos las relaciones asociadas a $C_{T(\Lambda)}$. De (i) tenemos que las relaciones son: $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4$ y $(\alpha_5)^2 = 0$. Por (ii):

- $\alpha_3\beta_p = \alpha_4\beta_p = 0$
- $\alpha_3\alpha_5\beta_p\alpha_2 = \alpha_4\alpha_5\beta_p\alpha_1 = 0$
- $\alpha_1\alpha_3\alpha_5\beta_p\alpha_1 = \alpha_3\alpha_5\beta_p\alpha_1\alpha_3 = \alpha_5\beta_p\alpha_1\alpha_3\alpha_5 = \beta_p\alpha_1\alpha_3\alpha_5\beta_p = 0$
- $\alpha_2\alpha_4\alpha_5\beta_p\alpha_2 = \alpha_4\alpha_5\beta_p\alpha_2\alpha_4 = 0$
  Notemos que se omiten $\alpha_5\beta_p\alpha_2\alpha_4\alpha_5 = 0$ y $\beta_p\alpha_2\alpha_4\alpha_5\beta_p = 0$ pues, como $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4$, resultan iguales a dos relaciones del ítem anterior.

Ahora queremos hallar las relaciones que surgen de (iii). Consideramos los vértices $x = 1$ e $y = 4$, la combinación lineal de caminos $\rho = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4$ y el suplemento $q = \alpha_5\beta_p$. Luego, $\rho q = (\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)\alpha_5\beta_p = \alpha_1\alpha_3\alpha_5\beta_p - \alpha_2\alpha_4\alpha_5\beta_p$, de donde $\rho q \in I'_1$. Entonces, por el Teorema 3.4, la combinación lineal de caminos $\rho = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4$ será una relación, la cuál ya había sido encontrada en (i).
Análogamente, se analizaron el resto de los vértices y no se encontraron nuevas relaciones.

Bibliografía

[1] Fernández, E. (1999). *Extensiones triviales y álgebras inclinadas iteradas.* [Tesis de doctorado, Universidad Nacional del Sur.] INMABB.

[2] Hernández, María V. (2016). *Álgebras autoinyectivas y extensiones triviales de álgebras monomiales.* [Tesis de maestría, Universidad Nacional del Sur] INMABB.

[3] Giraldo, Hernán (2015). Una introducción a la teoría de representaciones de álgebras. *Lecturas matemáticas, Volumen 36 (1)*, páginas 36-67.

[4] Cibils, C., Larrión, F. y Salmerón, L. (1982). *Métodos diagrau6máticos en teoría de representaciones*. Universidad Nacional de México: Dirección general de publicaciones.

[5] Fernández, E. y Platzeck, M (2002). *Presentations of trivial extensions of finite dimensional algebras and a theorem of Sheila Brenner*. J. Álgebra 249, no. 2.

[6] Fernández, E., Schroll, S., Treffinger, H., Trepode, S. y Valdivieso, Y (2022). *Characterisations of trivial extensions*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.04581

[7] I. Assem, D. Simson, A. Skowronki (2006). Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge University Press.