Campo de Prácticas

PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UNLPAM

Campo de Prácticas, junio 2021, ISSN 2718-8787, pp. 323-351

Las funciones polinómicas como producto. El caso de las cúbicas.

Maximiliano Laborda Caffarone

maxilaborda92@gmail.com

Profesorado en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam

Funciones polinómicas: revisamos nuestras fuentes

Este trabajo propone fundamentos para la construcción de una planificación del tema Función Polinómica en el curso de quinto año del ciclo orientado en la educación secundaria, desde dimensiones matemáticas, didácticas, curriculares y editoriales.

Introducción

Muchas veces no comprendemos el significado de planificar antes de ir a clases, porque se tiende a asumir esta tarea como una "suerte de trámite con el que hay que cumplir frente a la Dirección del Centro Educativo" y frente a los diversos estamentos de supervisión educativa. Si no se piensa previamente lo que se quiere hacer, es posible que los alumnos y alumnas perciban una serie de experiencias aisladas, destinadas a evaluar la acumulación de aprendizajes más que la consecución de un proceso

Por esto es que planificar es una tarea fundamental en la práctica docente, de esta depende mucho de nuestra labor docente, pues permite unir una teoría pedagógica determinada con la práctica. También es lo que posibilita pensar de manera coherente la secuencia de aprendizajes que se quiere lograr con los estudiantes, esto implica tomar decisiones previas a la práctica sobre qué es lo que se aprenderá, para qué se hará y cómo se puede lograr de la mejor manera. Desde este punto de vista, es relevante determinar los contenidos conceptuales, procedimentales y de actitudes que se abordarán, en qué cantidad y con qué profundidad.

Finalmente, también hay que pensar en la finalidad de lo que estamos haciendo, ya que para los alumnos y alumnas resulta fundamental reconocer algún tipo de motivación o estímulo frente al nuevo aprendizaje.

Fundamentación Matemática

Definición de función polinomial

"Si f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n, con $a_n \neq 0$. La función $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se denomina función polinomial en x, de grado n."

Grado de f	Forma de $f(x)$	Gráfica de f (con cruce a_0 en eje y)
0	$f(x) = a_0$	Una recta horizontal
1	$f(x) = a_1 x + a_0$	Una recta con pendiente a_1
2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Una parábola con un eje vertical

Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 248

Ahora definiré la división de polinomios dado que es una de las principales herramientas para factorizar y calcular raíces de funciones polinomiales mayores que grado 2.

Algoritmo para dividir polinomios

"Si g(x) es un factor de f(x), entonces f(x) es divisible por g(x). Por ejemplo, $x^4 - 16$ es divisible por $x^2 - 4$, por $x^2 + 4$ por $x^2 + 2$ y por $x - 2$.

Para el caso en que dos funciones que no sean divisibles, por ejemplo: $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 + 3x + 1$ podemos usar el proceso llamado división larga para hallar el cociente y el resto como en la siguiente ilustración." (Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 259)

$$
\begin{array}{rrl}
 & \overbrace{x^2 - 3x + 8}^{\text{cociente}} & \\
x^2 + 3x + 1 & \overline{\big)\, x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16} & \\
 & \underline{x^4 + 3x^3 + x^2} & x^2(x^2 + 3x + 1) \\
 & -3x^3 - x^2 & \text{reste} \\
 & \underline{-3x^3 - 9x^2 - 3x} & -3x(x^2 + 3x + 1) \\
 & 8x^2 + 3x - 16 & \text{reste} \\
 & \underline{8x^2 + 24x + 8} & 8(x^2 + 3x + 1) \\
 & \underbrace{-21x - 24}_{\text{residuo}} & \text{reste}
\end{array}
$$

“El proceso de división larga termina cuando llegamos a un polinomio (el resto) que es 0 o tiene menor grado que el divisor. El resultado de la división larga de la ilustración precedente se puede escribir

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = (x^2 - 3x + 8) + \left(\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1}\right)$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $x^2 + 3x + 1$, obtenemos

$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24)$.” (Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 260)

Este ejemplo ilustra el siguiente teorema:

Algoritmo de división para polinomios	Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que $$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x),$$ donde ya sea $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo** en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.

“Un útil caso especial del algoritmo de división para polinomios se presenta si f(x) se divide entre x-c, donde c es un número real. Si x-c es un factor de f(x), entonces f(x) = (x-c)q(x)

para algún cociente q(x), el resto r(x) es 0. Si x-c no es un factor de f(x), entonces el grado del resto r(x) es menor al grado de x-c y por lo tanto r(x) debe tener grado 0. Esto significa que el resto es un número diferente de cero. En consecuencia, para toda x-c tenemos f(x) = (x - c)q(x) + d, donde el residuo d es un número real.

Si sustituimos c por x, obtenemos

f(c) = (c - c)q(c) + d

= 0 q(c) +d

= 0 + d = d” (Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 260)

Teorema del factor	Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

“Prueba. Por el teorema del residuo, f(x) = (x - c)q(x) + f(c) para algún cociente q(x). Si f(c) = 0, entonces f(x) = (x-c)q(x); esto es, x-c es un factor de f(x). Recíprocamente, si x-c es un factor de f(x), entonces el residuo de la división de f(x) entre x-c debe ser 0 y, por lo tanto, el teorema del residuo, f(c) = 0.” (Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 261)

Directrices para división sintética de $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ entre $x - c$

1 Empiece con lo siguiente, escribiendo ceros para cualesquier coeficientes faltantes del polinomio dado

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

2 Multiplique a_n por c y ponga el producto ca_n bajo a_{n-1}, como se indica por la flecha en lo que sigue. (Esta flecha, y otras, se usa sólo para aclarar estas directrices y no aparecerá en divisiones sintéticas *específicas*.) A continuación, encuentre la suma $b_1 = a_{n-1} + ca_n$ y póngala bajo la línea como se indica.

$$\begin{array}{c|cccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & cb_2 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & r \end{array}$$

3 Multiplique b_1 por c y ponga el producto cb_1 bajo a_{n-2}, como lo indica la segunda flecha. Continuando, en seguida halle la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ y póngala bajo la línea como se indica.

4 Continúe este proceso, como lo indican las flechas, hasta obtener la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números

$$a_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{n-2}, \quad b_{n-1}$$

son los coeficientes del cociente $q(x)$; esto es,

$$q(x) = a_nx^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

y r es el residuo.

“La división sintética no sustituye a una división larga; simplemente es un método más rápido y es aplicable sólo cuando el divisor es de la forma x-c.” (Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 262)

Los ceros de un polinomio f(x) son las soluciones de la ecuación f(x) = 0. Cada cero real es un punto de intersección con el eje x de la gráfica de f.

Ceros reales de funciones polinomiales

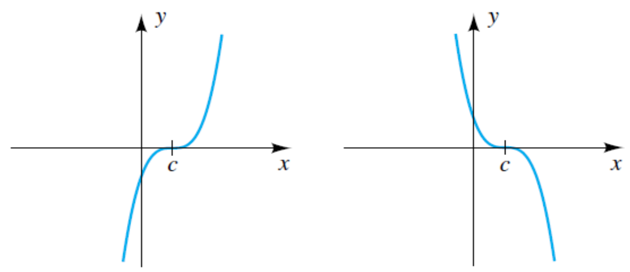
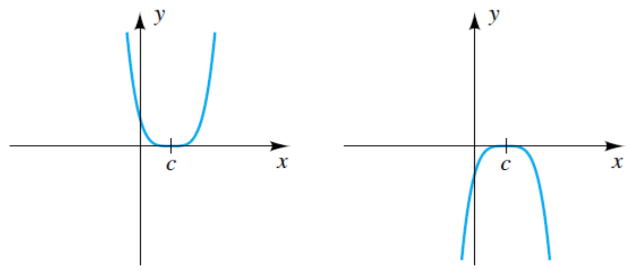
"Si f es una función polinomial y a es un número real y f(x) = 0 los enunciados siguientes son equivalente.

1. En x = a se encuentra un cero de la función f.
2. x = x es una solución de la ecuación polinomial f(x) = 0.
3. (x-a) a es un factor del polinomio f(x).
4. (a,0) es una intersección con el eje x de la gráfica de f." (Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 264)

Los puntos notables que más colaboran para la graficar funciones polinomiales son la raíces, por eso es que definiré cómo se comportan los polinomios en función de la multiplicidad de ellos.

Multiplicidad de ceros

"Si un factor x-c se presenta m veces en la factorización, entonces c es un cero de multiplicidad m del polinomio f(x) o una raíz de multiplicidad m de la ecuación f (x) =0. Si c es un cero real de f(x) de multiplicidad m, entonces f(x) tiene el factor $(x\text{-}c)^m$ y la gráfica de f tiene un punto c de intersección con el eje x. La forma general de la gráfica en (c, 0) depende de si m es entero impar o entero par. Si m es impar, entonces $(x\text{-}c)^m$ cambia signo cuando x aumenta por medio de c, y por tanto la gráfica de f cruza el eje x en (c, 0), como se indica en la primera fila de la tabla siguiente. Las figuras de la tabla no muestran la gráfica completa de f, pero sólo en forma general cerca de (c, 0). Si m es par, entonces $(x\text{-}c)^m$ no cambia signo en c y la gráfica de f cerca de (c, 0) tiene el aspecto de una de las dos figuras de la segunda fila.

Factor de $f(x)$	**Forma general de la gráfica de f cerca de $(c, 0)$**
$(x - c)^m$, con m impar y $m \neq 1$	
$(x - c)^m$, con m par	

”

(Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 270)

Teorema sobre ceros racionales de un polinomio	Si el polinomio $$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$ tiene coeficientes *enteros* y si c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no tienen factor primo común, entonces **(1)** el numerador c del cero es un factor del término constante a_0 **(2)** el denominador d del cero es un factor del coeficiente principal a_n

(Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 283)

Este es el origen del llamado “Teorema de Gauss” que se encuentra en la mayoría de las propuestas editoriales (libros de texto) que trabajan polinomios para la enseñanza en la educación secundaria.

Segundo teorema sobre límites para ceros reales de polinomios	Suponga que $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ es un polinomio con coeficientes reales. Todos los ceros reales de $f(x)$ están en el intervalo $$(-M, M),$$ donde $M = \dfrac{\text{máx}(\lvert a_n\rvert, \lvert a_{n-1}\rvert, \ldots, \lvert a_1\rvert, \lvert a_0\rvert)}{\lvert a_n\rvert} + 1.$

“En otras palabras, el valor de M es igual a la razón entre el máximo coeficiente (en magnitud) y el valor absoluto del coeficiente principal, más 1.

Por ejemplo, usando el polinomio $f(x) = 2x^3+5x^2-8x-7$, tenemos $M = |-8|/|2|+1 = 4+1 = 5$

Entonces las raíces se encuentran en el intervalo (-5,5).” (Swokowski, W., Cole, J.A. , 2009, pág 275)
Hasta aquí los conceptos que utilizo para estudiar los polinomios.

Fundamentación Didáctica

La matemática ha sido considerada como la asignatura que presenta mayor número de repitencia y contribuye a la deserción escolar. Vergnaud (1998), expresa que la dificultad de las matemáticas radica en que se necesita de un concepto para aprender otro. Otra razón es que las matemáticas muchas veces no son bien enseñadas porque los docentes no cuentan con una buena formación para enseñar esta área. Así mismo, considera que muchos de los docentes tienen la ilusión de que, si ellos enseñan bien estos conceptos, los chicxs tienen que aprenderlos bien. Sin embargo, el proceso de aprendizaje requiere cierto tiempo que suele ser largo y no siempre, aunque se explique bien se aprende bien.

Sobre fracaso escolar y educación matemática tenemos al autor André Antibi (2005), profesor e investigador francés, denominó como “constante macabra” al alto número de alumnxs que anualmente reprueban matemática, asociando dicha reprobación con la evaluación que se practica. Podemos ver cómo esto se repite en nuestros países latinos.

De acuerdo con Rivas (2005), “la exclusión es un fenómeno social altamente complejo”, más adelante agrega, “Una de sus causas más importantes (de la exclusión): la educativa y dentro de ella, la que contextualiza y formaliza la escuela a través de uno de sus saberes académicos: la matemática y su enfoque pedagógico” (p.2).

Este investigador describe el bajo rendimiento en matemática como una de las causas más importantes de repitencia y deserción de la escuela, lo cual ocurre principalmente en el nivel primario. Fundamentalmente, señala a la enseñanza como el factor más determinante del fracaso de los chicxs en matemática, así como a las modalidades evaluativas y la influencia cultural que, con distintas voces, pregona que aprender matemática está reservado sólo a unas cuantas mentes privilegiadas.

Por su parte, Bermejo y colaboradores (2000), al analizar el fracaso escolar en matemática y en la búsqueda de una propuesta de intervención para mejorar el rendimiento de los niños, definen al docente como su centro de atención, expresando que “el profesor debe crear un clima de aula en donde el alumnx tenga la oportunidad de discutir, integrar la nueva información en relación a otra, explicar y justificar sus propios métodos de solución" (p.44). Con respecto a esta concepción debemos enfatizar que en nuestro país enfrentamos diferentes limitaciones como lo es el poco avance tecnológico, salvo algunos colegios que han incorporado la tecnología en el quehacer pedagógico.

En esa misma línea, Blanco (2008, p.60), señala en su estudio multinivel realizado en escuelas mexicanas: "Que parte del aula como núcleo donde ocurre el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este espacio, las oportunidades de aprendizaje y el clima del aula, son los factores básicos a considerar". De manera implícita pero muy directa, también se analiza la acción docente en la generación de oportunidades de aprendizaje y en la creación de un clima favorable para el desarrollo de los niños y, por ende, del aprendizaje." (Pascual, 2017).

La actividad de resolver problemas es esencial si queremos conseguir un aprendizaje significativo de las matemáticas. No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas, y una fuente de motivación para los alumnos ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Al resolver un problema, el alumno dota de significado a las prácticas matemáticas realizadas, ya que comprende su finalidad.

El trabajo del alumno en la clase de matemáticas debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos:

• el alumno investiga y trata de resolver problemas, predice su solución (formula conjeturas),

• trata de probar que su solución es correcta,

• construye modelos matemáticos,

• usa el lenguaje y conceptos matemáticos, incluso podría crear sus propias teorías,

• intercambia sus ideas con otros,

• finalmente reconoce cuáles de estas ideas son correctas- conformes con la cultura matemática-, y entre todas ellas elige las que le sean útiles.

"Por el contrario, el trabajo del profesor es, en cierta medida, inverso al trabajo de un matemático:

• En lugar de partir de un problema y llegar a un conocimiento matemático, parte de un conocimiento matemático y busca uno o varios problemas que le den sentido para proponerlo a sus alumnos (recontextualización).

• Una vez producido un conocimiento, el matemático lo despersonaliza. Trata de quitarle todo lo anecdótico, su historia y circunstancias particulares, para hacerlo más abstracto y dotarlo de una utilidad general. El profesor debe, por el contrario, hacer que el alumno se interese por el problema (repersonalización). Para ello, con frecuencia busca contextos y casos particulares que puedan motivar al alumno." (Godino, Batanero, Font, 2003, p 66 y p 67)

En este sentido se busca que los alumnxs puedan comprender los modelos polinómicos, así como enfrentarse al estudio de este tipo de funciones desde diferentes marcos: funcional, geométrico y numérico progresando desde lo más sencillo a lo más complejo. El recurso gráfico será un apoyo fundamental para el estudio de estas funciones, y las técnicas algebraicas se plantean a partir de estudiar el comportamiento de las funciones factor.

Fuentes curriculares

Se recupera de los materiales curriculares de la Provincia de La Pampa lo vinculado al contenido de Función Polinomial del eje "En relación con funciones y el álgebra" de quinto año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, contenido que se desarrollará en aula.

Análisis e interpretación del comportamiento de las funciones polinómicas

Esto supone:

- Interpretar la información que portan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas (las variables, los parámetros y los puntos estratégicos en el contexto de las situaciones que modelizan),
- Vincular las variaciones de los gráficos con las de sus fórmulas y la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones, apelando a recursos tecnológicos para construir los gráficos.

Fuentes Editoriales

Se analizarán distintas actividades presentadas en los libros de texto que se podrían implementar para acompañar las prácticas.

El primer libro que analizo es: Activados 4 Matemáticas, de la editorial Puerto de Palos.

30 Polinomios. Características

1. Marquen las opciones correctas.

a. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas es un polinomio?

○ $8x^2 - 3x^{-4}$ ○ $\sqrt[3]{2x} + x^3$ ⊗ $\sqrt{5}\,.\,x^3 + 5^{-1}$ ○ $\frac{3x+6}{x^2}$

b. ¿Cuál es el polinomio de mayor grado?

○ $3x + 5x^2$ ⊗ $-5 - 2x^5$ ○ $6x^2 - 4x^3$ ○ $8x^4 - 9$

c. ¿Cuál es el coeficiente principal de $4x^5 - 3 - x^6 + 8$?

⊗ -1 ○ 1 ○ 4 ○ 6

d. ¿Cuál polinomio se encuentra normalizado?

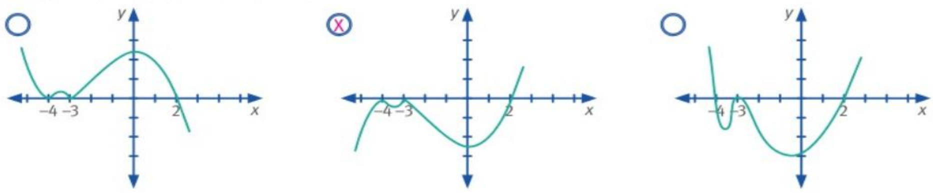
○ $x^3 - x^4$ ○ $-x + 1$ ○ $-x + 3x^2$ ⊗ $3x^2 + x^3$

Esta es la primera actividad para iniciar el tema de polinomios. Sin duda que para resolverla deben de saber el concepto de polinomios. ¿Dónde se construyó? No se construye eso se explica antes y luego lo aplicas para mecanizarlo.

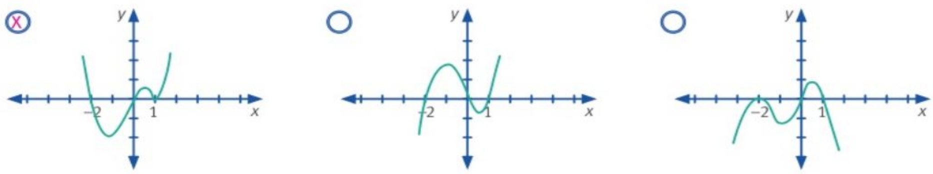
37. Marquen las opciones correctas.

¿Cuál de las gráficas corresponde a la función indicada en cada caso?

a. $f(x) = (x - 2)\,.\,(x + 4)^2\,.\,(x + 3)^2$



b. $g(x) = x\,.\,(x - 1)^2\,.\,(x + 2)$

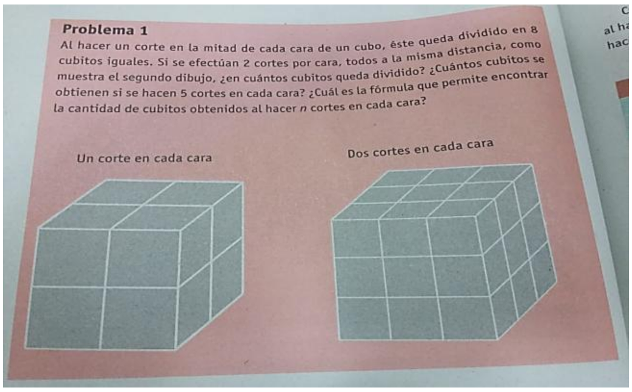


Es una actividad interesante donde se vincula el registro gráfico y algebraico a partir de la expresión factorizada de la fórmula.

El libro desarrolla primero la teoría sobre la forma factorizada, posibles comportamientos de las raíces en el gráfico en función de la multiplicidad y de esta manera se da pie a la actividad. La actividad no es mala para mí, lo que sí es incorrecto es la forma o el cómo se da.

El libro se basa en esta metodología, primera explica los conceptos y luego da ejercicios para mecanizarlos.

Análisis de ES.5 Matemáticas



Problema 1

Al hacer un corte en la mitad de cada cara de un cubo, éste queda dividido en 8 cubitos iguales. Si se efectúan 2 cortes por cara, todos a la misma distancia, como muestra el segundo dibujo, ¿en cuántos cubitos queda dividido? ¿Cuántos cubitos se obtienen si se hacen 5 cortes en cada cara? ¿Cuál es la fórmula que permite encontrar la cantidad de cubitos obtenidos al hacer *n* cortes en cada cara?

Vemos como este libro inicia desde un problema, donde da la posibilidad que lxs chicxs no arranquen trabajando desde la abstracción, sino haciendo los cubos para interactuar con ellos para resolver problemática.

Reflexiones Finales

Como reflexión final quiero recalcar la complejidad de realizar una planificación, destacando como tópicos, el qué enseñar, con qué metodología, con qué actividades, con qué alumnos, con qué infraestructura, con qué herramientas educativas, etc. Son muchas las cuestiones, variables, a tener en cuenta para una planificación en favor del aprendizaje de lxs alumnxs.

Además, no hay que olvidar que la enseñanza es un proceso dinámico, en que influyen muchas variantes que a veces escapan al control y planificación. Por esto, nunca hay que ver la planificación como una instancia rígida sin posibilidad de cambio. La planificación debe ser vista más que nada como una importante guía de apoyo, que a veces puede modificarse debido a circunstancias que van surgiendo o que se van advirtiendo.

Referencias bibliográficas

De Rossi, F., Quirós, N., Mastucci, S., Berio, A., Abálsamo R. (2013) Matemática 4, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: Puerto de Palos.

Gobierno de La Pampa. Ministerio de Cultura y Educación. Subsecretaria de coordinacion (2013). Materiales Curriculares de Matemática. Ciclo Orientado de la Educación Secundaria [página web]. Disponible en: https://www.fhumanas.com.ar/pluginfile.php?file=%2F1816%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FDISE%C3%91OS%20CURRICULARES%20LA%20PAMPA.pdf

Godino, J.D, Batanero, C., Font .V (Febrero del 2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros [página web]. Disponible en: http://plmatematica.blogspot.com/2017/11/buenas-practicas-en-la-ensenanza-de-las.html

Lamela, C., Itzcovich H., Novembre, A., Carnelli, G. (2007) Matemática 5 ES, La Plata, Provincia de Buenos Aires, Argentina: Dirección General de Cultura.

Larson, R., Hostetler, R. (2014), Precalculo, Séptima edición, Cuauhtémoc, México, D.F: Reverté.

Pascual, L (18 de noviembre del 2017). Buenas Prácticas en la enseñanza de las Matemáticas [página web]. Disponible en: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Swokowski, W., Cole, J.A. , (2009), Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (12ª ed), San Nicolás Tolentino, México, D.F: Cengage Learning.

Propuesta de aula

Funciones polinómicas. El caso de las cúbicas

Actividad	Objetivo	Contenido
Actividad	Construir una gráfica aproximada de la función cúbica expresada como producto de una lineal y una cuadrática a partir de puntos particulares e intervalos de positividad, negatividad y ceros.	Gráfico de función cúbica.
Actividad	Construir una gráfica aproximada de la función cúbica expresada como producto de una lineal y una cuadrática a partir de puntos particulares e intervalos de positividad, negatividad y ceros.	Gráfico de función cúbica.
Actividad	Construir una gráfica aproximada de la función cúbica expresada como producto de tres lineales a partir de puntos particulares e intervalos de positividad, negatividad y ceros.	Gráfico de función cúbica.
Actividad	Construir la fórmula de la función cúbica de la actividad 2 y graficarla en GeoGebra para constatar su gráfica.	Gráfico y fórmula de función cúbica.

Fundamentos: En esta secuencia, las funciones polinómicas de un cierto grado se presentan como producto de otras funciones de grado menor y la representación de estas funciones en el registro de gráficos cartesianos tendrá un papel importante.

Esta estrategia de tomar funciones expresadas como producto de otras funciones para trabajar las funciones polinómicas fue elegida por varios motivos que se detallaran a continuación:

1) Las funciones factor son conocidas por los alumnos (dominan su gráfica cartesiana y la expresión factorizada de su fórmula), por lo que pueden vincular la gráfica de la función producto, con la expresión algebraica y la gráfica cartesiana de las funciones factor.
2) Desde una función expresada en forma polinómica, no se puede graficar, ni analizar las raíces, intervalos de positividad y negatividad con los conocimientos previos de los alumnos, que desde una expresión factorizada sí. Donde esta expresión factorizada se construye a partir de la expresión de la función como producto de funciones factor.
3) Toda función polinómica con raíces reales se puede expresar como producto de funciones lineales y cuadráticas y en particular también como producto de funciones lineales.
4) Al expresar la función polinómica como producto de funciones la operación de dividir polinomios surge entonces como respuesta a una necesidad que plantea un problema.

Objetivos generales

- Analizar e interpretar el comportamiento de las funciones cúbicas a partir de la fórmula algebraica y su gráfico.

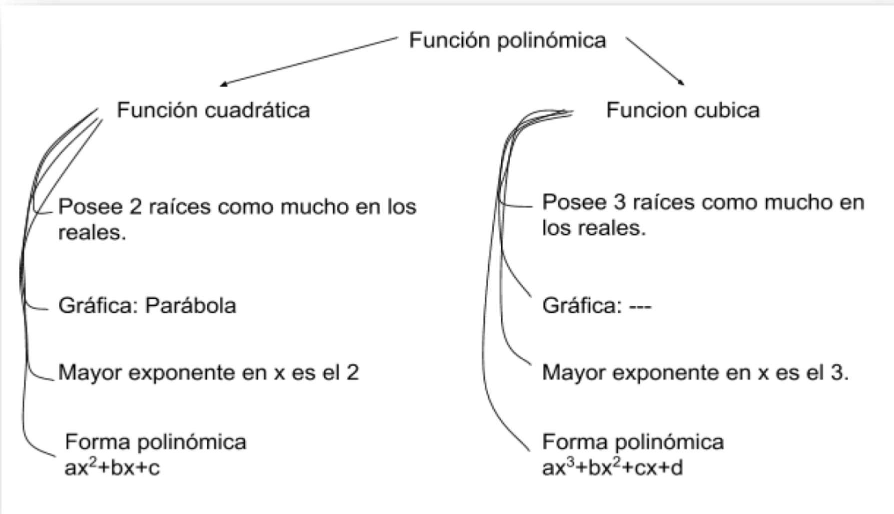
Objetivos específicos

- Interpretar la información que portan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas (las variables, los parámetros y los puntos estratégicos en el contexto de las situaciones que modelizan),
- Vincular las variaciones de los gráficos con las de sus fórmulas y la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones, apelando a recursos tecnológicos para construir los gráficos.

Prescripciones curriculares: Se recupera de los materiales curriculares de la Provincia de La Pampa lo vinculado al contenido de Función Polinomial del eje "En relación con funciones y el álgebra" de quinto año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, contenido que se desarrolló en aula.

Análisis e interpretación del comportamiento de las funciones polinómicas.
Esto supone:

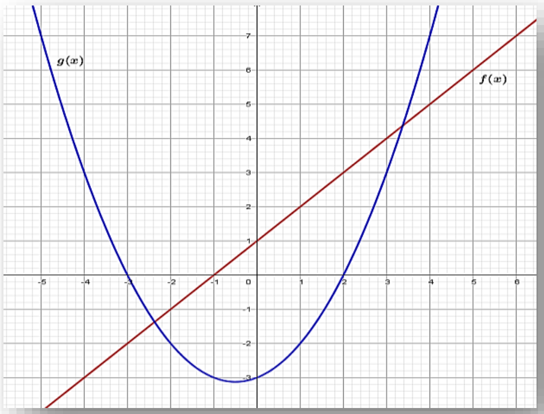
- Interpretar la información que portan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas (las variables, los parámetros y los puntos estratégicos en el contexto de las situaciones que modelizan),
- Vincular las variaciones de los gráficos con las de sus fórmulas y la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones, apelando a recursos tecnológicos para construir los gráficos.



Actividades de la Propuesta de aula

Actividad 1:

A continuación, se dan los gráficos de f(x) y de g(x).



Consideremos la función producto h(x) = f(x).g(x).

Las consignas se dan oralmente y en función de lo que se discuta con los chicxs, por lo que puede que no se respete el orden.

a) Calcular y luego graficar los siguientes puntos:

i) h (3) =

ii) h (0) =

iii) h (−3) =

iv) h (−2) =

v) h (1) =

vi) h (-4) =

b). Decidir si h es positiva o negativa en cada caso:

i) h (1,5)

ii) h (0)

iii) h (−4)

iv) h (6)

v) h (−2,5)

vi) h (−20)

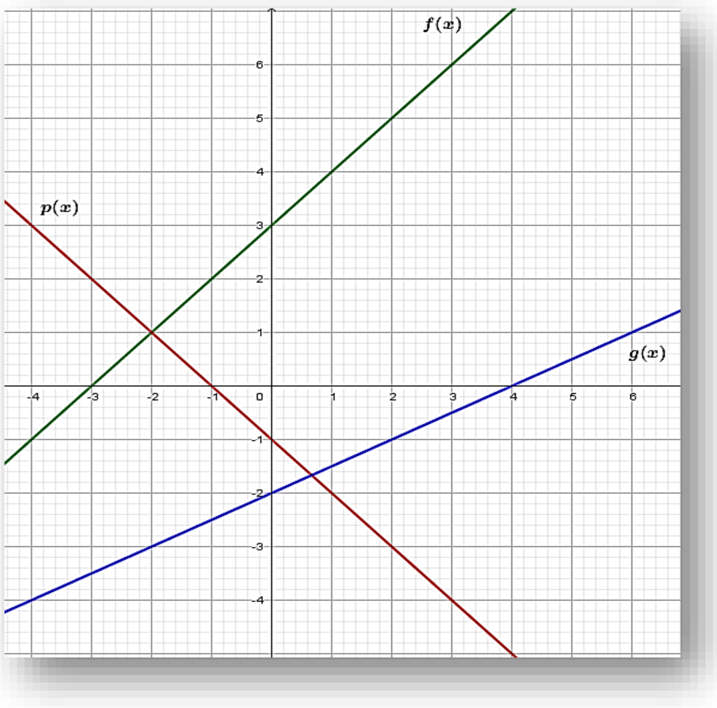
c) Indicar ceros, el intervalo de positividad y el de negatividad de la función h(x).

d) Graficar aproximadamente h(x) en función de los datos de los incisos anteriores.

El sentido de esta actividad es trabajar en la relación gráfico-fórmula de las funciones lineal y cuadrática, calcular intervalos de positividad y negatividad dados que son una herramienta fundamental para el trabajo de la función cúbica y finalmente a partir de ello graficar aproximadamente esta función cúbica.

Actividad 2:

Consideremos la función producto h(x) = p(x). f(x). g(x)



a) Calcular y luego graficar los siguientes puntos:

i) h(-2) =

ii) h(4) =

iii) h(3) =

iv) h(1) =

v) h(-4) =

vi) h(0) =

b) Decidir si h es positiva, negativa en cada caso:

i) h(1,5)

ii) h(2)

iii) h(−1)

iv) h(6)

v) h(−2,5)

vi) h(-6)

c) Indicar ceros, el intervalo de positividad y el de negatividad de la función h(x).

d) Graficar aproximadamente h(x) en función de los datos de los incisos anteriores.

El sentido de esta actividad es el mismo que la actividad anterior con la diferencia que ahora se expresa la función cúbica como producto de tres funciones lineales. Además, se practica e incorpora métodos de resolución de las actividades.

Actividad 3:
Calculamos la fórmula de h(x) de la actividad 2 y graficamos en GeoGebra.

El sentido de esta actividad es encontrar la fórmula de la función cúbica para poder identificar y generalizar su escritura, y luego corroborar la gráfica de esta función en GeoGebra.

Posibles respuestas de los alumnos/as:

Actividad 1:

a) i) h (3) = f(3)g(3)= 12

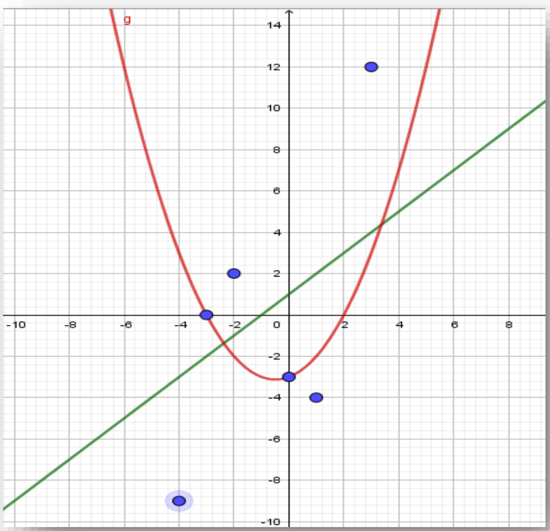
ii) h (0) = f(0)g(0)= -3

iii) h (−3)= f(-3)g(-3) = 0

iv) h (−2)= f(-2)g(-2) = 2

v) h (1) = f(1)g(1)= -4

vi) h (-4) = f(-4)g(-4)= -9



Otra posibilidad de resolución del inciso a que se dio fue la siguiente.

a) i) h (3) = f(3)g(3)= 3*3=9

ii) h (0) = f(0)g(0)= 0*0=0

iii) h (−3)= f(-3)g(-3) = -3*-3= 9

iv) h (−2)= f(-2)g(-2) = -2*-2=4

v) h (1) = f(1)g(1)= 1*1=1

vi) h (-4) = f(-4)g(-4)= -4*-4=16

b) i) h (1,5) negativo

ii) h (0) negativo

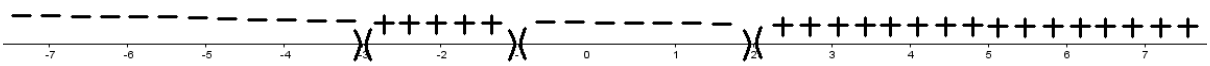
iii) h (−4) negativo

iv) h (6) positivo

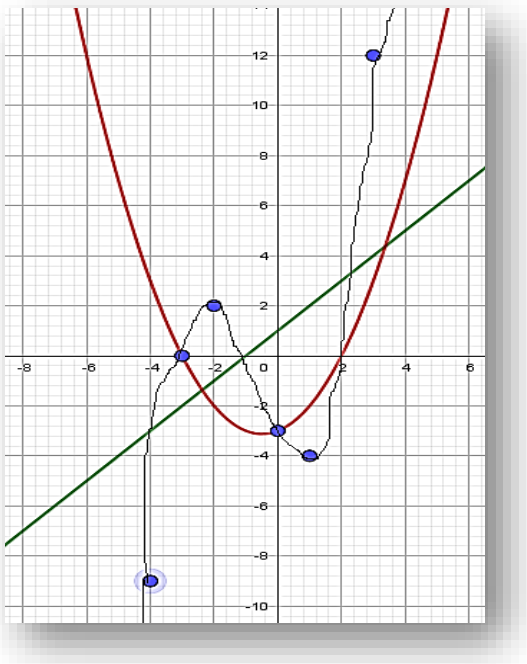
v) h (−2,5) positivo

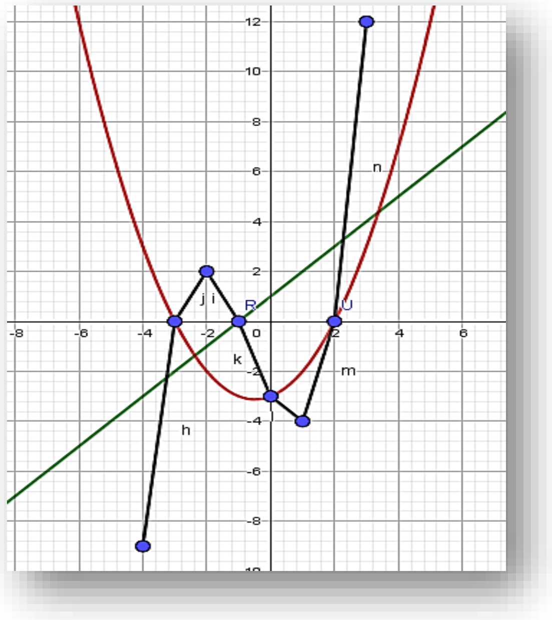
vi) h (−20) positivo

c)



d)





Actividad 2:

a)i) h(-2) = p(-2)*f(-2)*g(-2)= -3

ii) h(4) = p(4)*f(4)*g(4)= 0

iii) h(3) = p(3)*f(3)*g(3)= 12

iv) h(1) = p(1)*f(1)*g(1)= 12

v) h(-4) = p(-4)*f(-4)*g(-4)= 12

vi) h(0) = p(0)*f(0)*g(0)= 6

b)i) h(1,5) positiva

ii) h(2) positiva

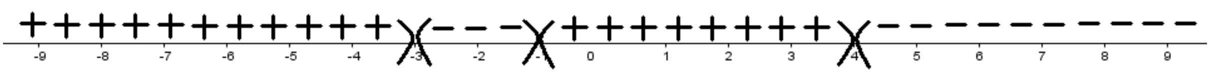
iii) h(−1)=0 / ni positiva ni negativo

iv) h(6) negativa

v) h(−2,5) negativo

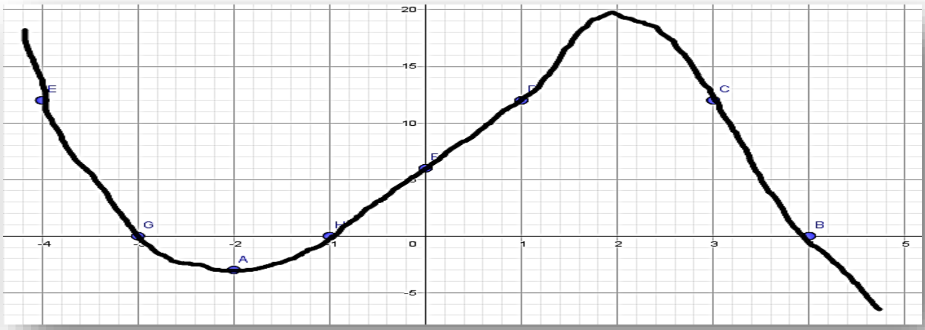
vi) h(-6) positiva

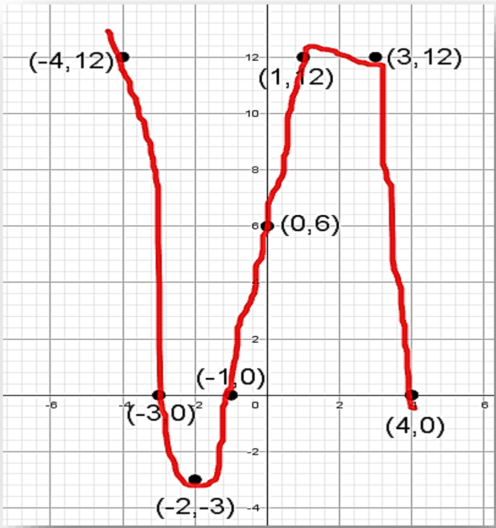
c)

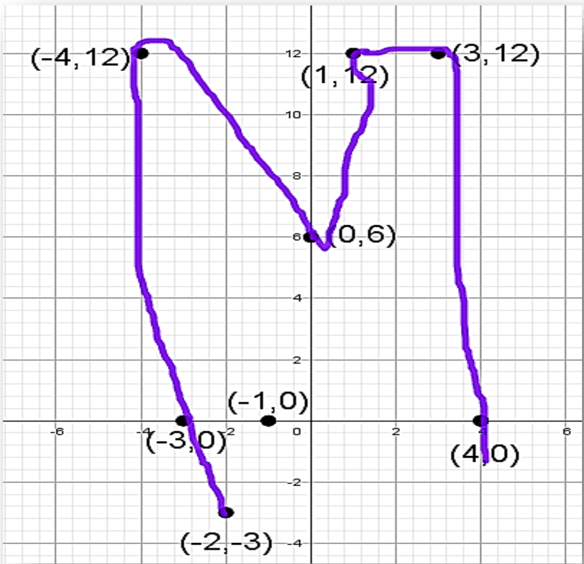


Hubo resoluciones donde hicieron el inciso c sin hacer el b. Sabemos que el inciso c en la generalización del b.

d)







Actividad 3:

Con respecto a las resoluciones, la fórmula la encontramos entre todos y luego cada uno en su compu graficaron los puntos de h(x), los gráficos de las rectas y finalmente h(x) corroborando si pasaba por los puestos anteriormente, comparando con su bosquejo.

Intervenciones docentes

Casi todas las actividades las resolví con los alumnxs por lo que no hubo muchas extras intervenciones docentes.

Cuando resolvieron la actividad 1, inciso a) y habían resuelto $h(-3) = f(-3)g(-3) = -3*-3= 9$, volví a explicar cómo se hacía la cuenta y la relación entre la expresión f(-3) y su gráfico, de igual manera para calcular g(-3).

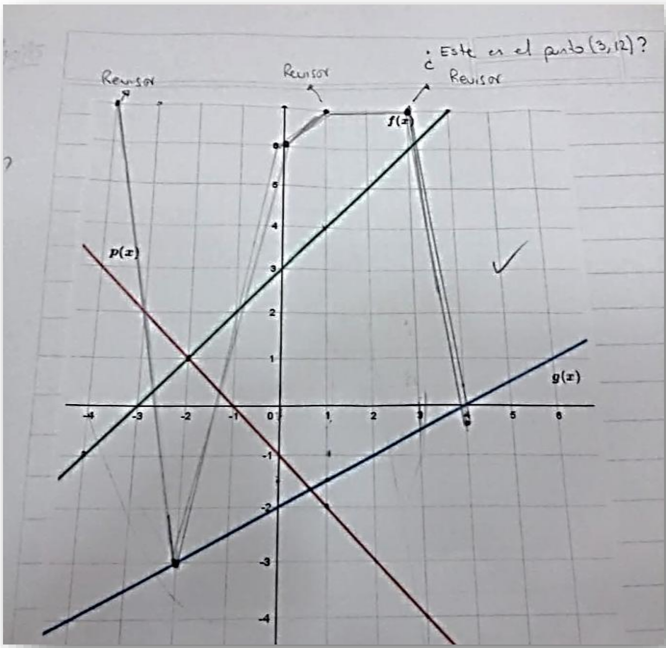
Análisis:

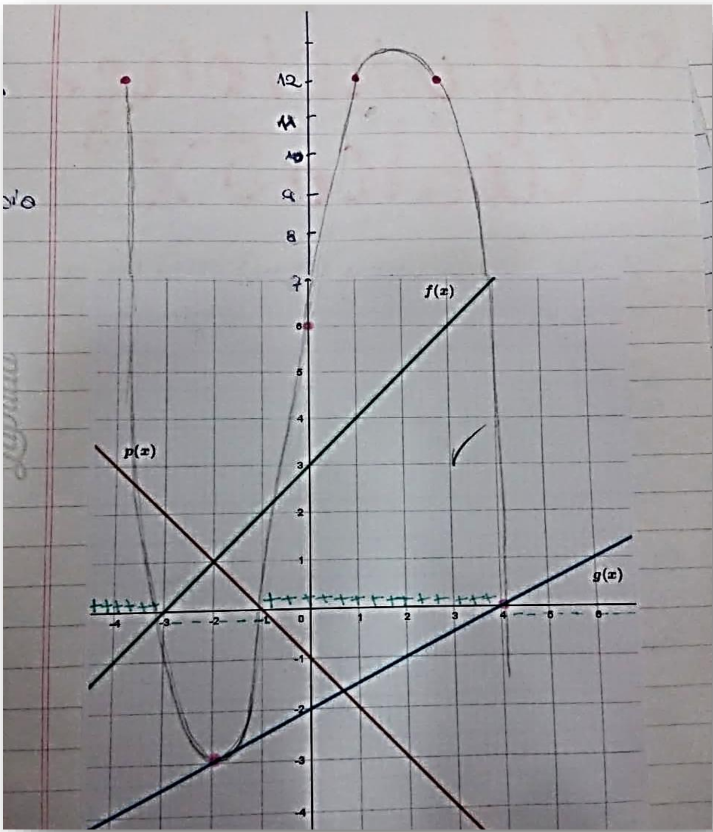
En cuanto a la residencia considero que lxs alumnxs preguntaron muy poco, esto se puede deber a las inseguridades, timidez de ellos, pero también principalmente a mí, a que las clases iban a un ritmo en donde las preguntas que les surgían se alejaba mucho de lo que se trabajaba habitualmente en las clases, entre otros posibles factores que se me pueden escapar al análisis.

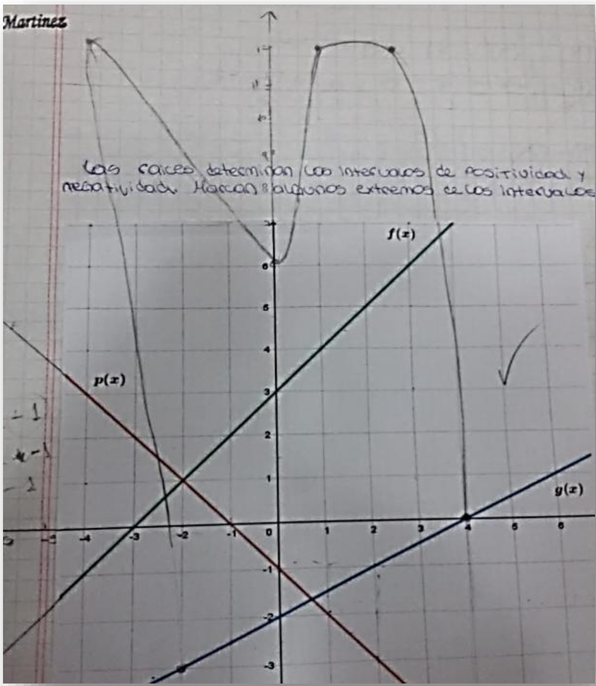
Conclusiones

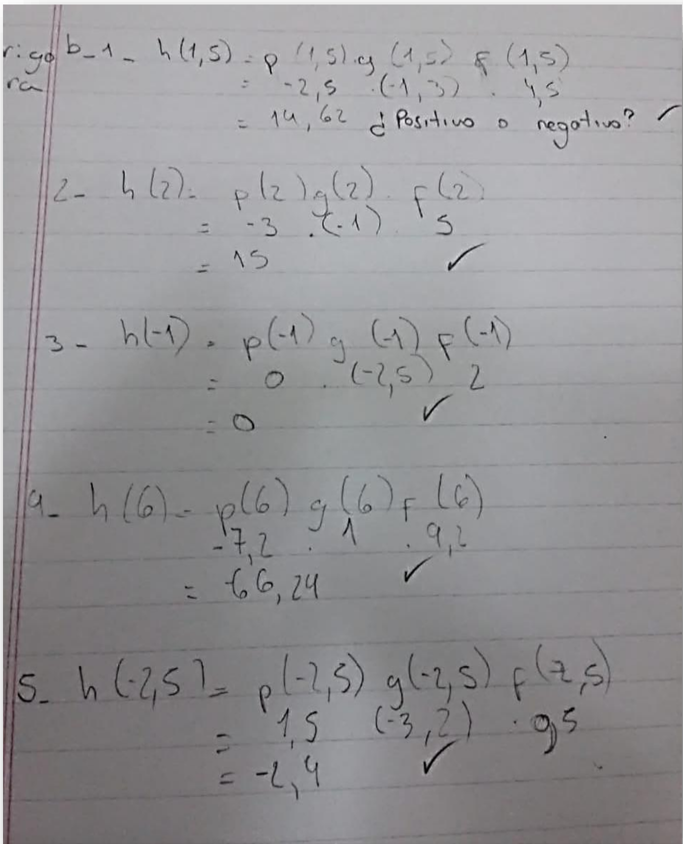
En cuanto a los resultados de los trabajos estuvieron mejor de lo que esperaba, pero aun así yo pretendía un mayor aprendizaje y “aprobados”. Tenemos que el 39% estuvieron muy bien, el 22% bien, el 11% regular, 17% mal y 11% sin entregar. Concluyendo, el 61% entregó trabajos que podríamos considerar aprobados y un 33% desaprobado (sin contar los que no entregaron), tuvimos una cantidad de desaprobados no menor a mi gusto, entre los factores que más incidieron en las notas, fue el ritmo que manejamos en las clases, sumado al poco tiempo que tuvieron ellos para pensar los ejercicios, en esos momentos donde se enfrentaron al problema sin que uno los guíe.

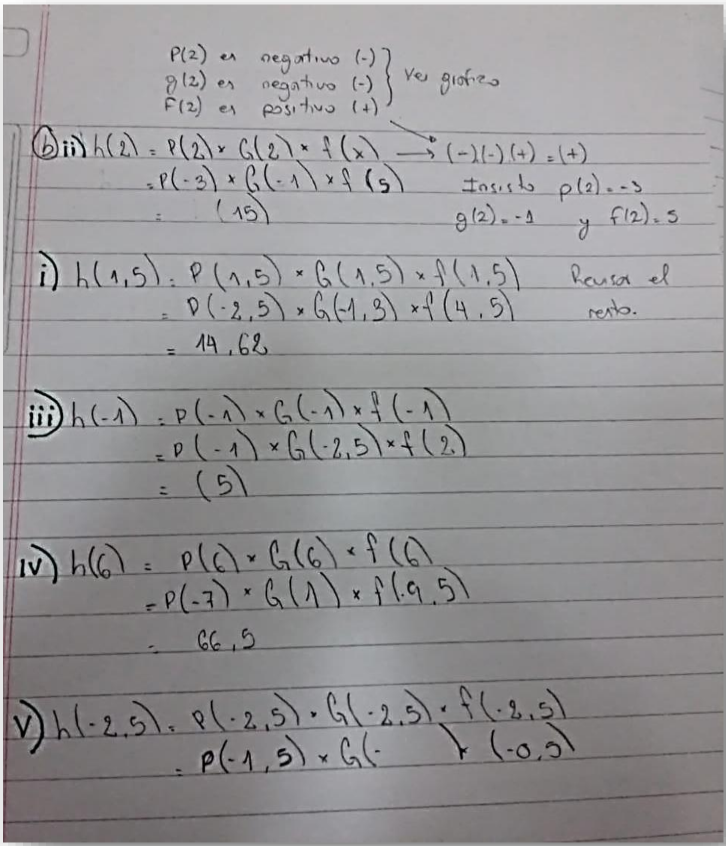
Trabajos realizados por los/as alumnos/as






Martinez
Las raíces determinan los intervalos de positividad y negatividad. Marcan algunos extremos de los intervalos
f(x)
p(x)
g(x)


b_1_ h(1,5) = p(1,5) . g(1,5) . f(1,5)
= -2,5 . (-1,3) . 4,5
= 14,62 ¿Positivo o negativo?
2_ h(2) = p(2) g(2) . f(2)
= -3 . (-1) . 5
= 15
3_ h(-1) = p(-1) g(-1) f(-1)
= 0 . (-2,5) 2
= 0
4_ h(6) = p(6) g(6) f(6)
-7,2 . 1 . 9,2
= -66,24
5_ h(-2,5) = p(-2,5) g(-2,5) f(-2,5)
= 1,5 (-3,2) . 0,5
= -2,4



P(2) es negativo (-)
g(2) es negativo (-)   } Ver gráfico
F(2) es positivo (+)

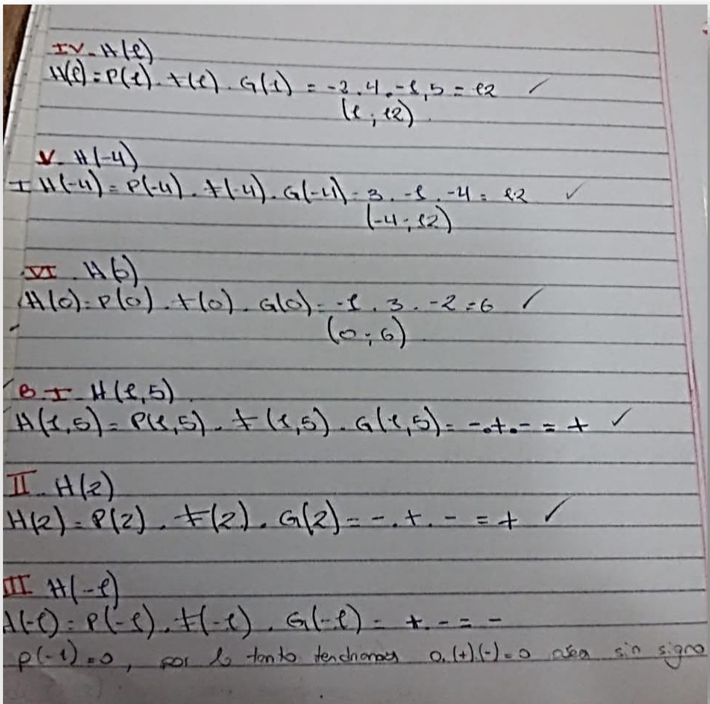
b) ii) h(2) = P(2) × G(2) × f(x) → (-)(-)(+) = (+)
= P(-3) × G(-1) × f(5)   Insisto p(2) = -3
= (15)   g(2) = -1 y f(2) = 5

i) h(1,5) = P(1,5) × G(1,5) × f(1,5)   Revisar el
= P(-2,5) × G(-1,3) × f(4,5)   resto.
= 14,62

iii) h(-1) = P(-1) × G(-1) × f(-1)
= P(-1) × G(-2,5) × f(2)
= (5)

iv) h(6) = P(6) × G(6) × f(6)
= P(-7) × G(1) × f(9,5)
= 66,5

v) h(-2,5) = P(-2,5) · G(-2,5) · f(-2,5)
= P(-1,5) × G(-   f(-0,5)



IV. H(1)
H(1) = P(1) . F(1) . G(1) = -2 . 4 . -1,5 = 12 ✓
(1 ; 12)

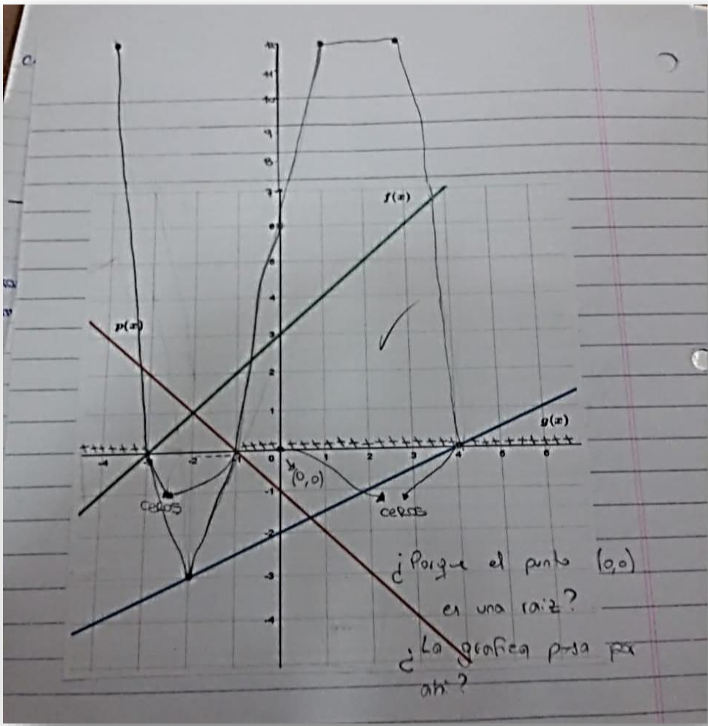
V. H(-4)
H(-4) = P(-4) . F(-4) . G(-4) = 3 . -1 . -4 = 12 ✓
(-4 ; 12)

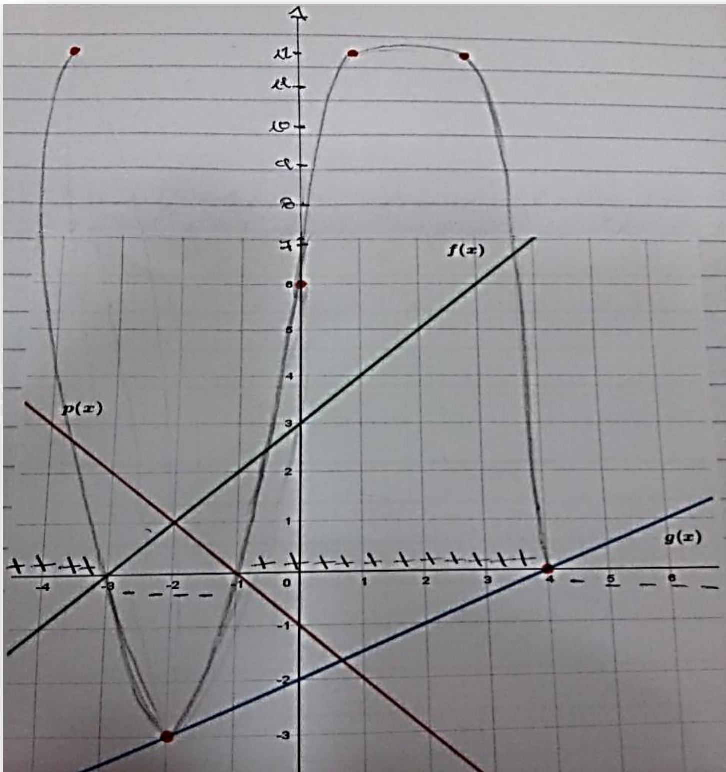
VI. H(0)
H(0) = P(0) . F(0) . G(0) = -1 . 3 . -2 = 6 ✓
(0 ; 6)

B I. H(1,5)
H(1,5) = P(1,5) . F(1,5) . G(1,5) = - . + . - = + ✓

II. H(2)
H(2) = P(2) . F(2) . G(2) = - . + . - = + ✓

III H(-1)
H(-1) = P(-1) . F(-1) . G(-1) = + . - = -
p(-1) = 0 , por lo tanto tendríamos 0.(+).(-) = 0 osea sin signo


f(x)
p(x)
g(x)
ceros
(0,0)
ceros
¿Porque el punto (0,0)
es una raiz?
¿La grafica pasa por
ahí?


f(x)
p(x)
g(x)

Referencias bibliográficas

Gobierno de La Pampa. Ministerio de Cultura y Educación. Subsecretaria de Coordinación (2013). Materiales Curriculares de Matemática. Ciclo Orientado de la Educación Secundaria [página web]. Disponible en: https://www.fhumanas.com.ar/pluginfile.php?file=%2F1816%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FDISE%C3%91OS%20CURRICULARES%20LA%20PAMPA.pdf

Fioriti, G. y Sessa, C. (2011). *Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas*. Buenos Aires: UNIPE Editorial Universitaria.