



Facultad de Ingeniería de General Pico  
Universidad Nacional de La Pampa



Instituto  
Balseiro

# *Servomecanismos*

Ingeniería electromecánica con Orientación en  
Automatización Industrial

Proyecto Final: Control de péndulo invertido

**Profesor:**

Dr. Andrés, Etchepareborda.

**Integrantes:**

Masante, Alejandro E.  
Perotti, Emiliano L.

Bariloche, Rio Negro. Martes 21 de Junio de 2016.

## Índice

1-Resumen .....	3
2-Intruducción .....	4
3-Intrumentos utilizados.....	4
4-Characterización de la placa adquisidora.....	5
4.1- Reconocimiento de la placa de adquisición .....	5
4.2- Calibración de la placa .....	6
5-Characterización del PWM de potencia.....	6
5.1 Especificaciones del PWM de potencia .....	6
5.2 Calibración de la PWM .....	7
6- Análisis de ruido en el sistema de adquisición. ....	7
6.1- Análisis de ruido de potenciómetro de posición del carro. ....	7
6.2- Análisis de ruido de potenciómetro de ángulo. ....	8
7- Calibración de lecturas de potenciómetros. ....	9
7.1 Calibración de potenciómetro empleado como sensor de posición del carro. ....	9
7.2 Calibración de potenciómetro empleado como sensor de posición angular. ....	10
8- Modelado e identificación del sistema Carro – Motor. ....	12
8.1 Modelado matemático del sistema carro - motor. ....	12
8.2 Identificación del rozamiento del sistema carro - motor. ....	15
8.3 Respuesta al escalón del sistema carro - motor. ....	16
8.4 Identificación no paramétrica del sistema carro - motor. ....	18
8.5 Identificación paramétrica del sistema carro - motor. ....	21
8.6 Validación del modelo del sistema carro - motor. ....	25
9- Modelado e identificación del sistema Péndulo. ....	26
9.1 Modelado matemático del sistema Péndulo en el semiplano inferior. ....	26
9.2 Identificación de los parámetros del sistema Péndulo. ....	27
9.3 Validación del modelo del sistema Péndulo. ....	29
10- Modelado e identificación del sistema acoplado. ....	31
10.1 Modelo del sistema acoplado en semiplano superior. ....	31
10.2 Modelo del sistema acoplado en semiplano inferior. ....	34
10.4 Identificación de parámetros del sistema acoplado. ....	35
10.5 Modelo de control del sistema con péndulo en semiplano inferior. ....	40

10.6 Validación del modelo de control con péndulo en semiplano inferior. ....	46
11- Filtro de Kalman. ....	48
11.1 Ecuaciones para el algoritmo del Filtro de Kalman. ....	48
11.2 Diseño y simulación del Filtro de Kalman. ....	52
12- Control del péndulo en semiplano inferior. ....	56
12.1 Descripción en VE para control del péndulo en semiplano inferior. ....	56
12.2 Análisis de controlabilidad y observabilidad en semiplano inferior. ....	56
12.3 Ley de control en semiplano inferior. ....	57
13- Swing up. ....	61
13.1 Ecuaciones para la elevación del péndulo mediante el método de energía. ....	61
13.2 Simulación e implementación del algoritmo para el Swing up. ....	62
14- Control del péndulo en semiplano superior. ....	64
14.1 Descripción en VE para control del péndulo en semiplano superior. ....	64
14.2 Análisis de controlabilidad y observabilidad en semiplano superior. ....	65
14.3 Metodología de acople entre etapa de Swing up y control. ....	66
14.4 Ley de control en semiplano superior. ....	67
15- Conclusiones. ....	71
16- Bibliografía. ....	73

## 1-Resumen

En el siguiente informe se detalla la identificación y control de un péndulo invertido, constituido por un péndulo y un sistema carro, los cuales están acoplados. El sistema carro es accionado por medio de un motor de corriente continua acoplado a un sistema de rueda dentada y una correa perforada, haciendo que el mismo se desplace a través de unas guías.

Mediantes técnicas de control por variable de estado, se realizó un control de posición del carro, como así también el control de posición angular del péndulo tanto en el semiplano superior como inferior.

Para llevar a cabo el control de la planta, en una primera instancia se realizaron las calibraciones correspondientes de los distintos elementos utilizados en la experiencia.

En una segunda instancia, se procedió al modelado, identificación y validación del sistema carro motor, como así también para el péndulo.

Realizado lo anterior, se procedió a la implementación de un Filtro de Kalman para realizar una estimación de aquellas variables de estado no medidas.

Una vez simulado el desempeño del estimador, se procedió a implementarlo en un programa desarrollado en lenguaje C, y se realizó un control del péndulo en el semiplano inferior.

Desarrollado el control del péndulo en la posición inferior, se procedió a realizar el control del sistema con el péndulo en la posición vertical en el semiplano superior, para luego finalmente, incorporar un algoritmo que llevase el péndulo desde su posición de equilibrio en el semiplano inferior, hasta la posición en el plano superior (swing up) para posteriormente incorporar el control en dicha región.

## 2-Intruducción

A partir de los conocimientos adquiridos en las cátedras de Teoría de Control III y Servomecanismos, se desarrolló una aplicación de estos conceptos en el análisis y control de una planta real. La planta seleccionada es un péndulo invertido, que consta principalmente de un sistema carro motor acoplados por un sistema de rueda dentada y correa perforada, donde el carro tiene además acoplado un péndulo.

Para realizar el control de posición del carro como así también el control de posición angular del péndulo, tanto en el semiplano inferior como superior, se tuvieron que realizar las correspondientes calibraciones, modelado teórico del sistema y validación de los modelos hallados, para posteriormente realizar un control mediante las técnicas de variable de estado.

## 3-Instrumentos utilizados

Para la realización del proyecto, se utilizaron los siguientes elementos:

- Una computadora de escritorio con sistema operativo LINUX.
- Un PWM de potencia modelo 25A8.
- Placa adquisidora de datos modelo PCI-1711 con una resolución de 12 bits (4096 cuentas).
- Multímetro digital.
- Planta compuesta por un sistema carro motor y un péndulo, confeccionada principalmente por:
  - Motor DC 24V
  - Potenciómetro para medición de posición del carro.
  - Potenciómetro para medición de posición del péndulo.
  - Fuente regulada para la alimentación de la PWM, de 25VDC.
  - Fuente regulada para la alimentación de los potenciómetros, de 5VDC.

## 4- Caracterización de la placa adquisidora.

### 4.1- Reconocimiento de la placa de adquisición

Con la PC apagada, se procedió a desmontar la placa adquisidora que la misma tiene instalada para su reconocimiento. La misma es una placa de adquisición modelo PCI-1711 con una resolución de 12 bits (4096 cuentas).

Mediante la utilización del programa de demo info.c de la biblioteca comedi y con ayuda del manual de usuario de la placa, se procedió a reconocer las características principales de la misma, las cuales se detallan a continuación:

#### Subdivice 0:

- Entradas analógicas
- 16 canales
- Rango [-10;10] [-5; 5] [-2,5; 2,5] [-1,25; 1,25] [-0,625; 0,625]

#### Subdivice 1

- Salidas analógicas
- 2 canales
- Rango [0 ;5] [0; 10]

#### Subdivice 2

- Entradas digitales
- 16 canales
- Voltaje de entrada: Low: 0.8 V max.  
High: 2 V min.

#### Subdivice 3

- Salidas digitales
- 16 canales
- Voltaje de salida: Low: 0.8 V max.  
High: 2 V min.

## 4.2- Calibración de la placa

Los ensayos realizados con el fin de obtener las curvas de calibración de la placa adquisidora empleada en el proyecto, se detallan en el informe denominado “*Resolución temporal, conocimiento de la placa de adquisición y generación de funciones de onda*”, que se encuentra en el anexo del soporte digital.

## 5- Caracterización del PWM de potencia.

### 5.1 Especificaciones del PWM de potencia

A partir de la documentación provista por el fabricante, se obtiene las siguientes características referidas al PWM de potencia modelo 25A8.

Especificaciones de modelo 25A8	
DC SUPPLY VOLTAGE	20-80v
PEAK CURRENT (2 sec. Max. Internally limited)	±25 A
MAXIMUM CONTINUOUS CURRENT (internally limited)	±12.5 A
SWITCHING FREQUENCY	22 kHz ±15%

*Tabla N° 1: Especificaciones de PWM modelo 25A8.*

La siguiente tabla expone el posicionamiento de los jumpers del módulo para operar el mismo en modo corriente o tensión, respectivamente.

		Modo Tensión		Modo Corriente	
		ON	OFF	ON	OFF
Test/Offset	4		X		X
Vel Integrador	3		X	X	
Curr integrador	2		X		X
Voltaje Feedback	1	X			X

*Tabla N° 2: Configuración de jumpers para modo tensión o corriente.*

Por otra parte, para realizar las calibraciones, el módulo cuenta con los siguientes potenciómetros.

Ajuste de ganancia en modo tensión y velocidad	Potenciómetro 1
Límite de corriente	Potenciómetro 2
Referencia de ganancia	Potenciómetro 3
Ajuste de cero	Potenciómetro 4

*Tabla N° 3: Referencia de potenciómetros de ajuste.*

## **5.2 Calibración de la PWM**

Los ensayos realizados con el fin de obtener las curvas de calibración de la PWM empleada en el proyecto, se detallan en el informe denominado “*Caracterización de un PWM de potencia*”, que se encuentra en el anexo del soporte digital.

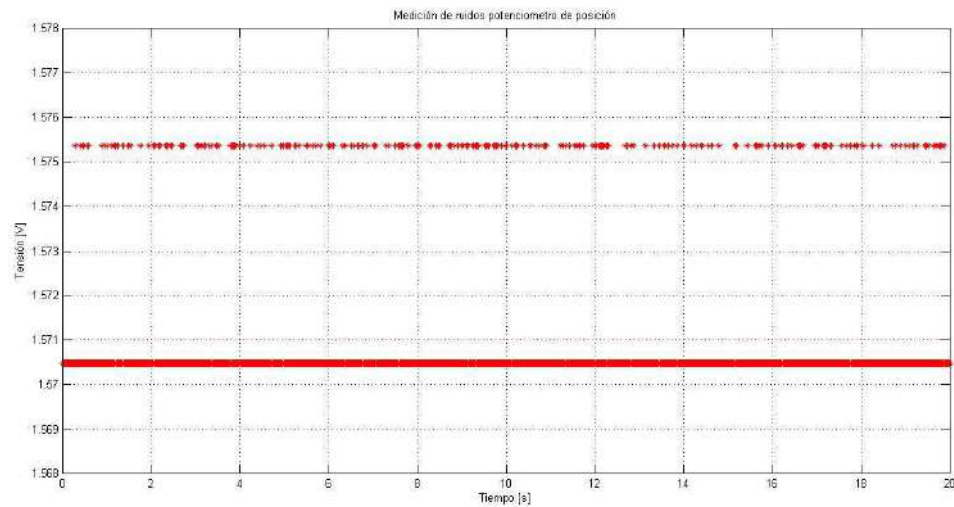
## **6- Análisis de ruido en el sistema de adquisición.**

### **6.1- Análisis de ruido de potenciómetro de posición del carro.**

Mediante la implementación de un programa en lenguaje C, se procedió a registrar en un archivo de texto los valores arrojados en distintas lecturas de tensión realizadas al potenciómetro de posición del carro, estando éste en un valor fijo.

A continuación se detalla la gráfica temporal de los datos obtenidos en la experiencia.





*Gráfico N° 1: Análisis de ruido en potenciómetro de posición del carro.*

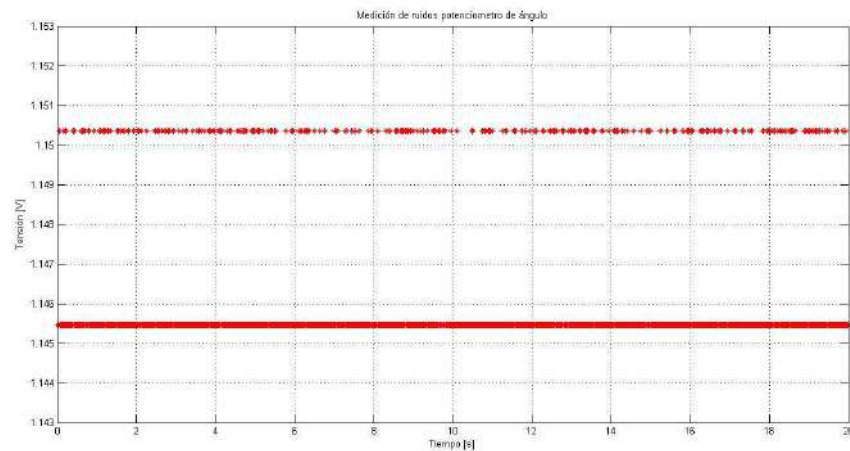
Como se puede observar de la gráfica anterior, la medición de posición del carro resulta poseer un bajo contenido de ruido, por lo que se decidió realizar la medición directamente sobre el potenciómetro, sin la utilización de un filtro analógico.

Con el objeto de poder tener una medición más confiable, dentro de la función en que se realiza la lectura de la posición del carro, se realizó un filtrado digital de los datos, en donde dentro del período de muestreo se realizan diez lecturas, de las cuales se eliminan los valores extremos y se realiza un promedio teniendo en cuenta las mediciones restantes.

### **6.2- Análisis de ruido de potenciómetro de ángulo.**

Mediante la implementación de un programa en lenguaje C, se procedió a registrar en un archivo de texto los valores arrojados en distintas lecturas de tensión realizadas al potenciómetro de posición angular del péndulo, estando éste en un valor fijo.

A continuación se detalla la gráfica temporal de los datos obtenidos en la experiencia.



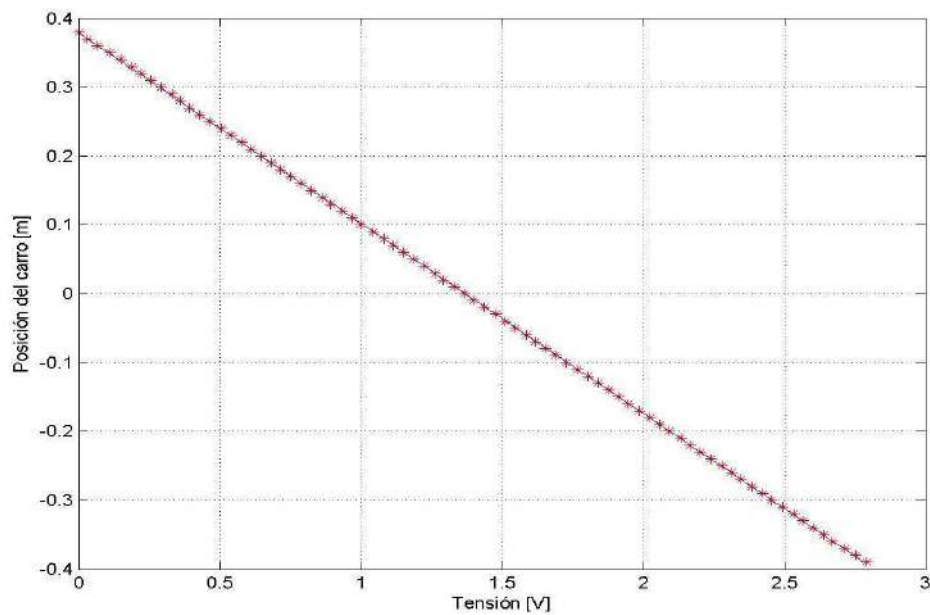
*Gráfico N° 2: Análisis de ruido en potenciómetro de posición angular del péndulo.*

Como se puede observar de la gráfica anterior, la medición de posición angular del péndulo resulta poseer un bajo contenido de ruido, por lo que se decidió realizar la medición directamente sobre el potenciómetro, sin la utilización de un filtro analógico. Con el objeto de poder tener una medición más confiable, dentro de la función en que se realiza la lectura de la posición angular del péndulo, se realizó un filtrado digital de los datos, en donde dentro del período de muestreo se realizan diez lecturas, de las cuales se eliminan los valores extremos y se realiza un promedio sobre los restantes.

## **7- Calibración de lecturas de potenciómetros.**

### **7.1 Calibración de potenciómetro empleado como sensor de posición del carro.**

Mediante el empleo de la placa adquisidora se procedió a relevar el valor de tensión arrojado por el correspondiente potenciómetro para distintos valores de posición del carro. A continuación se presenta un gráfico con los datos obtenidos en el ensayo y la correspondiente recta de ajuste.



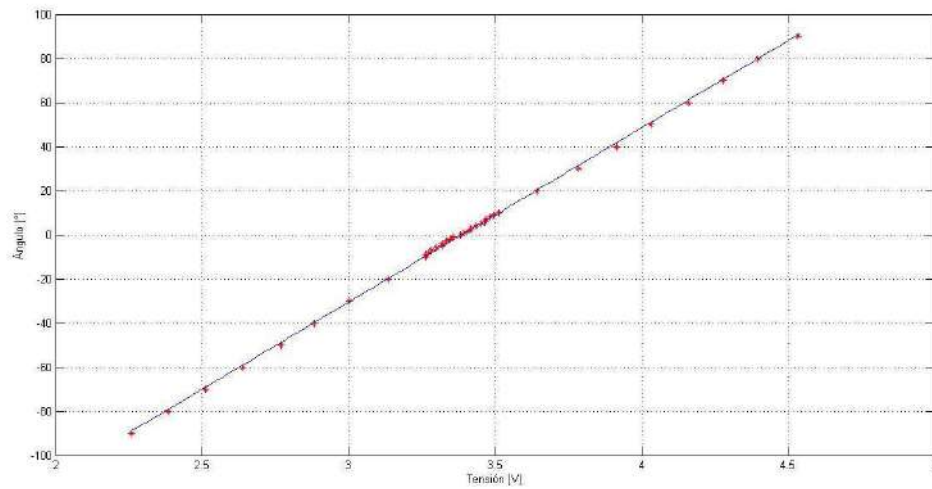
*Gráfico N° 3: Calibración de potenciómetro de posición del carro.*

La ecuación de la recta de ajuste resulta ser:

$$pos[m] = -0.2764 * V_{pot} + 0.3787$$

### **7.2 Calibración de potenciómetro empleado como sensor de posición angular.**

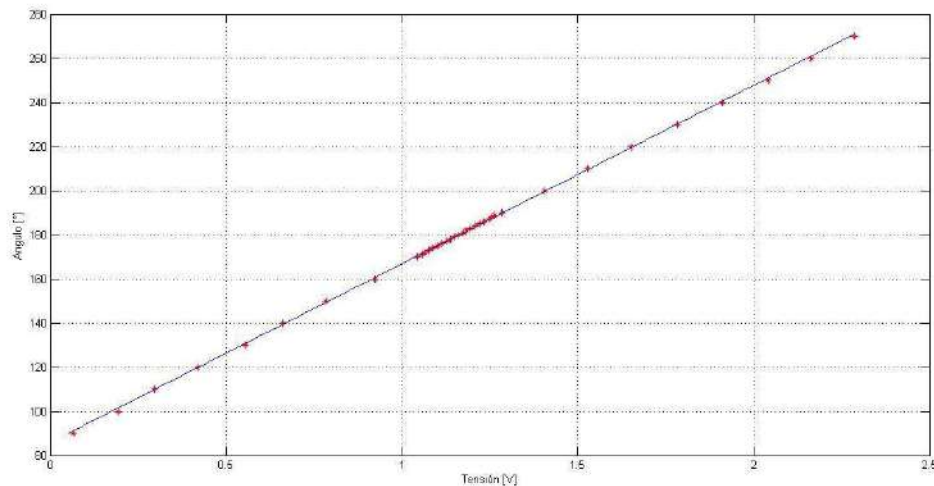
Mediante el empleo de la placa adquisidora se procedió a relevar el valor de tensión arrojado por el correspondiente potenciómetro para distintos valores de posición angular del péndulo. A continuación se presenta un gráfico con los datos obtenidos y la correspondiente recta de ajuste, las cuales fueron diferenciadas para ángulos pertenecientes al semiplano superior e inferior, con el objeto de obtener una mayor precisión en el ajuste.



*Gráfico N° 4: Calibración de potenciómetro para ángulos de semiplano superior.*

La ecuación de la recta de ajuste para ángulos pertenecientes al semiplano superior resulta ser:

$$\text{Ángulo } [^\circ] = 79.0248 * V_{pot} - 267.6426$$



*Gráfico N° 5: Calibración de potenciómetro para ángulos de semiplano inferior.*

La ecuación de la recta de ajuste para ángulos pertenecientes al semiplano inferior resulta ser:

$$\text{Ángulo } [^\circ] = 80.9139 * V_{pot} - 85.8962$$

El potenciómetro empleado para la medición de ángulos no es del tipo multivuelta, por lo cual, el mismo presenta una zona donde se imposibilita realizar la medición en cada vuelta del mismo. Dado que la relación de transmisión entre los engranajes solidarios al potenciómetro y al péndulo no es 1 a 1, se procedió a colocar dicha zona muerta en una posición donde no es alcanzada en todo el rango de control.

Con el objeto de determinar la posición angular del péndulo a partir del valor de tensión arrojado por el correspondiente potenciómetro, se procedió a calcular el ángulo real del mismo y luego mediante el empleo de la relación de transmisión que poseen los engranajes se procede a calcular el ángulo del péndulo.

De las experiencias anteriores se obtuvo que la pendiente que relaciona la tensión medida en el potenciómetro y el ángulo del péndulo es cercana a un valor de  $80 \left[ \frac{^\circ}{V} \right]$ . Aplicando la relación de transmisión que es 1.2, la pendiente que relaciona la tensión medida en el potenciómetro y el ángulo del mismo es aproximadamente  $66,66 \left[ \frac{^\circ}{V} \right]$ .

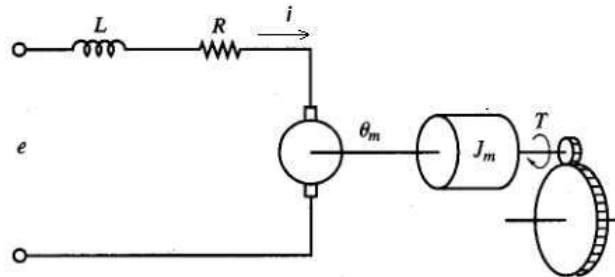
Teniendo en cuenta lo anterior, se procedió a realizar una función en lenguaje C, en la cual mediante la lectura de la tensión en el potenciómetro de posición angular, se procede a calcular el ángulo correspondiente al mismo, teniendo en cuenta que para la posición de equilibrio inferior de la barra, dicho ángulo es de  $150^\circ$ .

## ***8- Modelado e identificación del sistema Carro – Motor.***

### ***8.1 Modelado matemático del sistema carro - motor.***

Dado que la dinámica del péndulo no interfiere con la dinámica del carro debido a que la diferencia de masas es significativa, el estado de movimiento del carro no se ve afectado por las oscilaciones que presenta el péndulo, por lo cual se procede a modelar el sistema carro-motor sin la presencia del péndulo.

Atendiendo al siguiente diagrama:



*Fig. N° 1: Sistema dinámico carro motor.*

Se obtiene:

$$U = R * i + L * \frac{di}{dt} + e$$

Despreciando el término de la caída de tensión en la inductancia debido a la velocidad que presenta la dinámica del polo asociado, resulta:

$$U = R * i + e \quad (1)$$

Dónde:

$$e = K_v * \omega$$

Por otro lado, tenemos que:

$$T_m = K_T * i$$

$$x = r * \Omega \quad \rightarrow \quad \dot{x} = r * \omega \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = r * \dot{\omega}$$

Teniendo en cuenta el análisis de torque, se tiene:

$$T_m - b * \omega - M * r * \ddot{x} - b_c * r * \dot{x} = J_m * \dot{\omega}$$

$$K_T * i - \left( \frac{b}{r} + b_c * r \right) * \dot{x} = \left( \frac{J_m}{r} + M * r \right) * \ddot{x}$$

$$i = \frac{b + b_c * r^2}{K_T * r} * \dot{x} + \frac{J_m + M * r^2}{K_T * r} * \ddot{x} \quad (2)$$

Luego, reemplazando (2) en (1), resulta:

$$U = R * i + \frac{K_v}{r} * \dot{x} = \frac{R * (b + b_c * r^2)}{K_T * r} * \dot{x} + \frac{R * (J_m + M * r^2)}{K_T * r} * \ddot{x} + \frac{K_v}{r} * \dot{x}$$

$$U = \left( \frac{R * (b + b_c * r^2) + K_T * K_v}{K_T * r} \right) * \dot{x} + \left( \frac{R * (J_m + M * r^2)}{K_T * r} \right) * \ddot{x} \quad (3)$$

Aplicando la transformada de Laplace, considerando condiciones iniciales nulas, resulta:

$$U(s) = s * \left( \left( \frac{R * (b + b_c * r^2) + K_T * K_v}{K_T * r} \right) + s * \left( \frac{R * (J_m + M * r^2)}{K_T * r} \right) \right) * X(s)$$

De donde resulta la función transferencia:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\left( \frac{K_T * r}{R * (J_m + M * r^2)} \right)}{s * \left( s + \left( \frac{R * (b + b_c * r^2) + K_T * K_v}{R * (J_m + M * r^2)} \right) \right)}$$

Luego, la función transferencia que relaciona la velocidad del carro con la tensión aplicada al motor, resulta:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\left( \frac{K_T * r}{R * (J_m + M * r^2)} \right)}{s + \left( \frac{R * (b + b_c * r^2) + K_T * K_v}{R * (J_m + M * r^2)} \right)} = \frac{A}{s + B} \quad (4)$$

Escribiendo a la ecuación (3) de la forma:

$$U = \alpha * \dot{x} + \beta * \ddot{x}$$

De la función transferencia  $V(s)/U(s)$  (ecuación (4)) se tiene que:

$$\beta = \frac{1}{A}$$

$$\alpha = \frac{B}{A}$$

### 8.2 Identificación del rozamiento del sistema carro - motor.

Debido a que el sistema carro motor presenta alinealidades producto del rozamiento entre el carro y el sistema de guías, mediante un ensayo, se procedió a identificar la influencia del mismo.

En primera instancia se procedió a colocar el carro en la posición central de la guía, y mediante la aplicación de una señal de entrada de tipo rampa de pendiente unitaria, se procedió a registrar el valor de posición del carro, para así poder determinar el valor de tensión mínimo requerido para garantizar el movimiento del mismo en ambos sentidos. A continuación se presentan en los siguientes gráficos los valores arrojados por las experiencias.

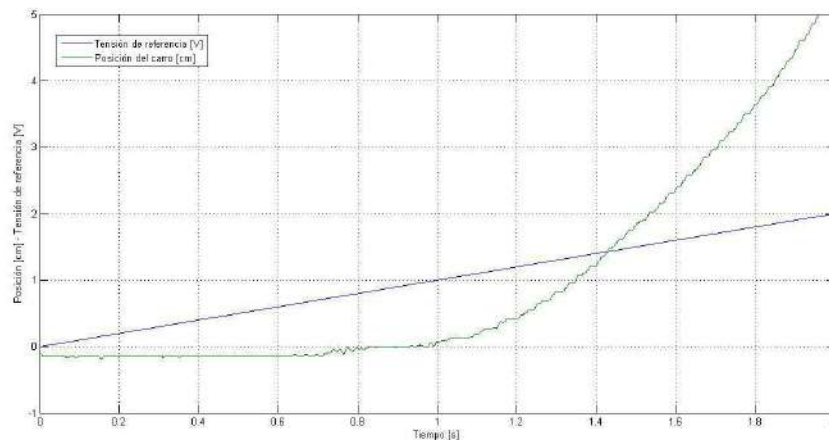
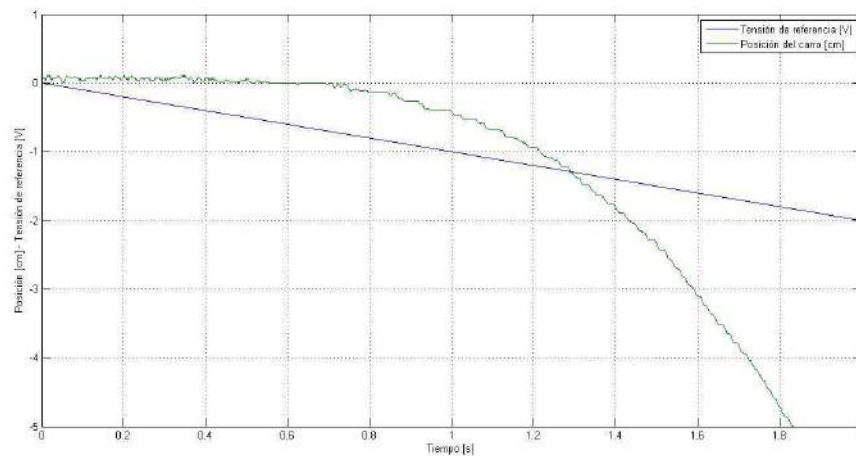


Gráfico N° 6: Identificación de tensión mínima de movimiento para posición creciente.





*Gráfico N° 7: Identificación de tensión mínima de movimiento para posición decreciente.*

De los gráficos anteriores se puede observar que la tensión mínima requerida para garantizar el movimiento en ambos sentidos es de aproximadamente de 1V. Este valor de tensión se deberá tener en cuenta al momento de aplicar una acción de control al sistema.

Cabe señalar que el valor de saturación de la señal de entrada es de 24V, con lo cual el valor de tensión mínima requerida para garantizar el movimiento del carro resulta ser significativamente más pequeña, lo cual evidencia que los efectos de rozamientos no son tan elevados.

### **8.3 Respuesta al escalón del sistema carro - motor.**

Para poder realizar la identificación del sistema carro motor, en primera instancia se procedió a realizar un ensayo al escalón del sistema con el fin de tener una primera aproximación de la dinámica del mismo.

A continuación se presenta un gráfico con los valores arrojados para ensayos al escalón de 7V, 10V, 12V, 15V y 20V.

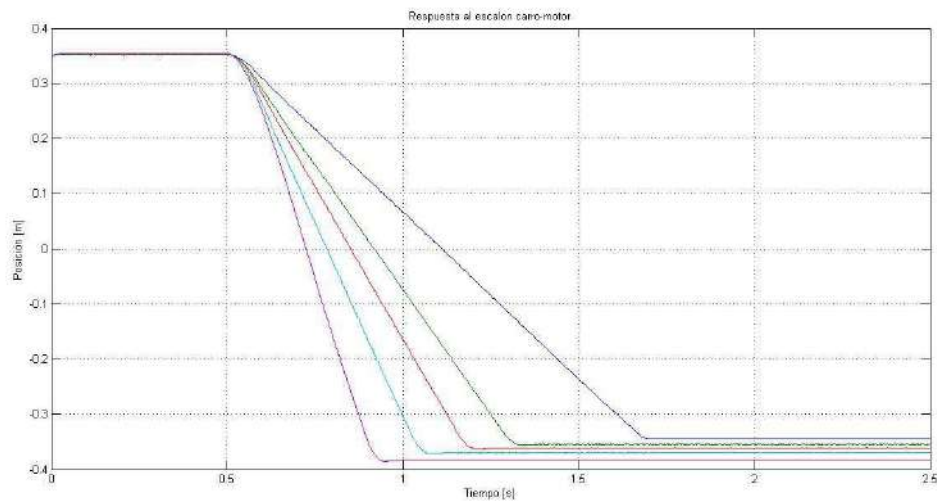


Gráfico N° 8: Posición del carro para escalones de 7V, 10V, 12V, 15V, 20V.

Debido a que no se cuenta con un sensor de velocidad del carro, a partir de las mediciones de posición del mismo se procedió a calcular la velocidad instantánea del carro utilizando el comando de Matlab *diff()*.

Debido a que los valores de velocidad obtenidos presentan grandes variaciones, se procedió a realizar un filtrado de los datos mediante el comando *smooth()*.

A continuación se presenta un gráfico con las respuestas temporales de velocidad para escalones de 7V, 10V, 12V, 15V y 20V de señal de entrada.

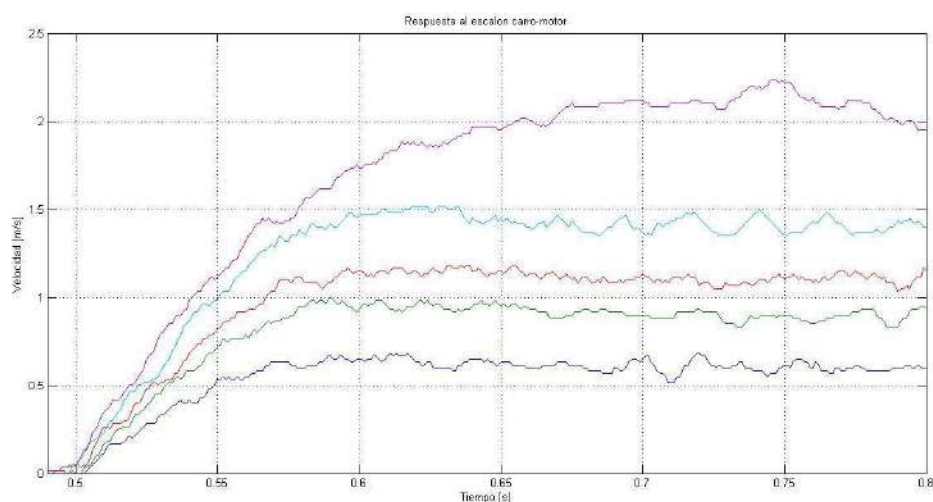


Gráfico N° 9: Velocidad del carro para escalones de 7V, 10V, 12V, 15V, 20V.

Como se puede observar de los gráficos anteriores, la respuesta temporal de la velocidad para diferentes escalones de tensión, se asocia a una respuesta de un sistema de primer orden, coincidiendo con el resultado obtenido con anterioridad en el modelado del sistema carro-motor.

De los gráficos anteriores se tiene que la constante de tiempo para cada una de las gráficas resultan ser las siguientes:

$$\tau_7 = 0.03 \text{ s}$$

$$\tau_{10} = 0.026 \text{ s}$$

$$\tau_{12} = 0.03 \text{ s}$$

$$\tau_{15} = 0.031 \text{ s}$$

$$\tau_{20} = 0.049 \text{ s}$$

Por lo tanto se estima que la constante de tiempo del sistema es aproximadamente:

$$\tau = 0.0332 \text{ s}$$

De donde se obtiene que la frecuencia natural del sistema es:

$$\omega_n = 30.12 \text{ rad/s}$$

#### ***8.4 Identificación no paramétrica del sistema carro - motor.***

Mediante la implementación de una entrada del tipo Chirp se procedió a relevar la respuesta en frecuencia de la planta en consideración, con el fin de poder determinar de manera aproximada los parámetros del modelo.

Teniendo en cuenta que la frecuencia del sistema es aproximadamente:

$$\omega_n = 30.12 \text{ rad/s} \quad (4.79 \text{ Hz})$$

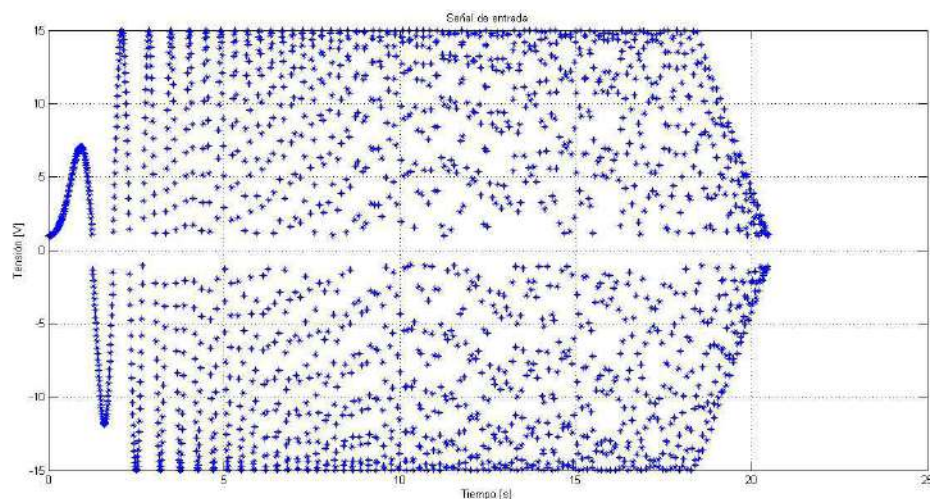
Se decidió realizar el muestreo con una frecuencia de 100 Hz ( $T=0,01$  s), la cual resulta ser lo suficientemente alta para realizar un muestreo satisfactorio.

Se relevaron una cantidad de 2048 datos siendo este múltiplo de una potencia en base 2 para realizar el análisis del espectro de frecuencias. Luego se procedió a seleccionar la frecuencia mínima y máxima de la función Chirp, asegurando que la frecuencia natural del sistema esté comprendida entre ambos valores.

La frecuencia mínima adoptada para la señal Chirp fue de 0,1 Hz y la frecuencia máxima de 15 Hz. La amplitud adoptada para la señal de entrada fue de 14V, la cual fue centrada en 0V.

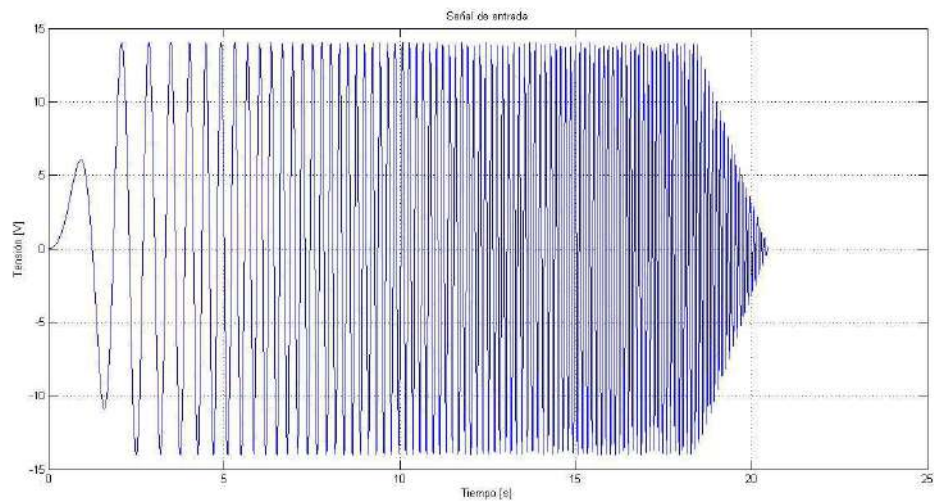
Cabe señalar que la señal enviada a la planta presenta un offset de 1 V para los valores positivos y de -1 V para valores negativos, ya que se desea eliminar el efecto del rozamiento.

A continuación se presenta la gráfica temporal de la señal de entrada enviada a la planta:



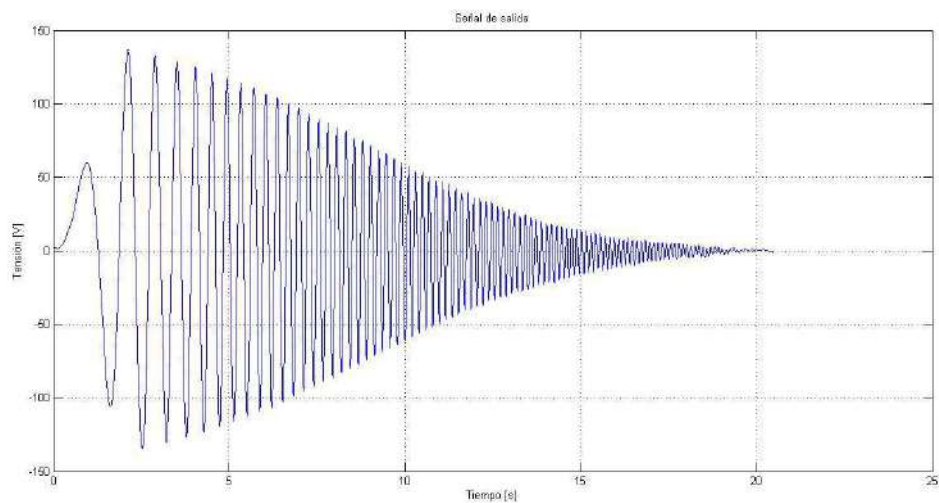
*Gráfico N° 10: Señal de entrada enviada a la planta.*

Para la realización de la identificación no paramétrica se debió quitar el correspondiente offset de la señal de entrada enviada a la planta, para la utilización en el script de identificación no paramétrica. A continuación se muestra la gráfica temporal de la señal Chirp utilizada para realizar la identificación no paramétrica.



*Gráfico N° 11: Señal de entrada utilizada para la identificación no paramétrica.*

A continuación se presenta la señal de salida registrada en el ensayo:

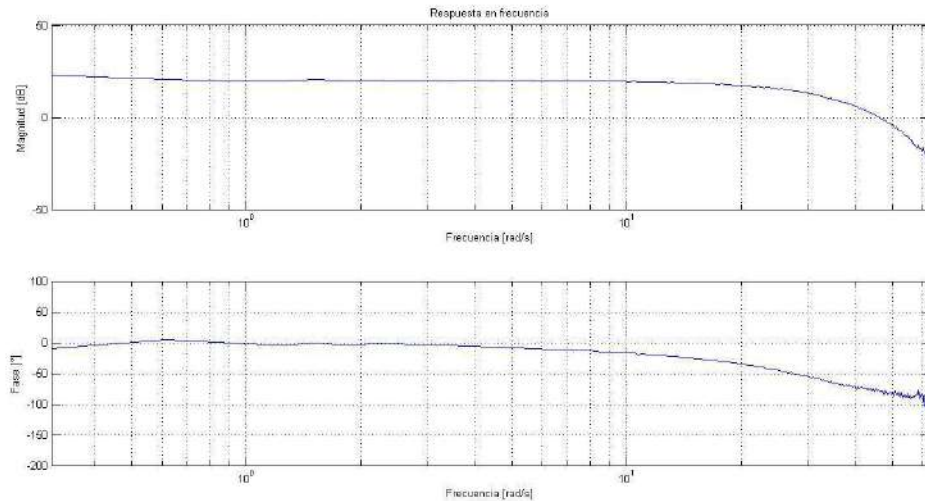


*Gráfico N° 12: Señal de salida registrada.*

De la gráfica anterior, se observa que la respuesta del sistema no presenta ningún pico de resonancia, siendo la misma modulada en amplitud por una exponencial decreciente, asociada a un sistema de primer orden.

A partir de los datos obtenidos, se procedió a realizar la división punto a punto de las transformadas discretas de Fourier de las señales de entrada y salida para poder así determinar la respuesta en frecuencia del sistema.

A continuación se presenta la respuesta en frecuencia obtenida para el sistema carro-motor.



*Gráfico N° 13: Respuesta en frecuencia obtenida para el sistema carro-motor.*

Del gráfico anterior se puede observar que el sistema presenta una respuesta en frecuencia correspondiente a un sistema de primer orden que consta de un polo rápido, cuya ubicación está alrededor de los 30 rad/s.

### **8.5 Identificación paramétrica del sistema carro - motor.**

Mediante la implementación de una serie de entradas del tipo Chirp se procedió a excitar al sistema carro-motor, con el fin de poder realizar la identificación paramétrica del modelo matemático que describe su dinámica.

Teniendo en cuenta que la frecuencia natural del sistema es aproximadamente  $w_n = 30.12 \text{ rad/s}$  (4.79 Hz) se decidió realizar el muestreo con una frecuencia de 100 Hz ( $T=0,01 \text{ s}$ ), la cual resulta ser lo suficientemente alta para realizar un muestreo satisfactorio.

La frecuencia mínima adoptada para las distintas señales Chirp fue de 0,1 Hz y la frecuencia máxima de 15 Hz. Se realizaron diferentes ensayos en donde se varió la amplitud de la señal de entrada, tomando valores de 10V, 12V y 14V.

Se utilizó el modelo ARX para la realización de la identificación paramétrica el cual, dado un sistema dinámico descrito por:

$$Y(z) = G(z) * U(z) + H(z) * E(z)$$

Y teniendo en cuenta la estructura ARX:

$$H(z) = \frac{1}{A(z)}$$

$$G(z) = z^{-r} * \frac{B(z)}{A(z)}$$

Reemplazando en la expresión anterior, resulta:

$$A(Z) * Y(z) = z^{-r} * B(z) * U(z) + E(z)$$

Donde

$$A(z) = 1 + a_{n-1} * z^{-1} + \dots + a_0 * z^{-n}$$

$$B(z) = b_m + b_{m-1} * z^{-1} + \dots + b_0 * z^{-m}$$

Aplicando la anti transformada Z se obtiene:

$$y_k + a_{n-1} * y_{k-1} + \dots + a_0 * y_{k-n} = b_m * u_{k-r} + b_{m-1} * u_{k-r-1} + \dots + b_0 * u_{k-r-m} + e_k$$

El conjunto de parámetros que se desean identificar son:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ \dots \\ a_0 \\ b_m \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Como se pudo observar con anterioridad, la respuesta temporal del sistema se asemeja a la de un sistema de primer orden, con lo cual, la función transferencia a identificar es:

$$G(z) = \frac{b}{z - a}$$

Obteniéndose los siguientes parámetros:

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A continuación se presentan las distintas funciones transferencias obtenidas en cada uno de los ensayos.

- Señal de entrada Chirp  $V_o=10V$ .

$$G(z) = \frac{0,024761}{z - 0,7432}$$

$$G(s) = \frac{2,8617}{s + 29,68}$$

- Señal de entrada Chirp  $V_o=12V$ .

$$G(z) = \frac{0,024953}{z - 0,7517}$$

$$G(s) = \frac{2,8684}{s + 28,54}$$



- Señal de entrada Chirp  $V_0=14V$ .

$$G(z) = \frac{0,024499}{z - 0,7607}$$

$$G(s) = \frac{2,8003}{s + 27,35}$$

Con el fin de obtener una buena aproximación de la función transferencia de la planta, se procedió a promediar el  $K_p$  y la inversa de la constante de tiempo que fueron obtenidos en los distintos ensayos.

A continuación se presenta una tabla con lo expuesto anteriormente:

Amplitud Chirp [V]	$K_p$ [m/s]	$1/\tau_{ao}$ [rad/s]
10	0,0964	29,6800
12	0,1005	28,5400
14	0,1024	27,3500
Promedio	0,0998	28,5233

*Tabla N° 4: Promediación de  $K_p$  y  $1/\tau_{ao}$ .*

Teniendo en cuenta los valores obtenidos anteriormente, se obtiene la siguiente función transferencia:

$$G(s) = \frac{2,8456}{s + 28,5233}$$

### 8.6 Validación del modelo del sistema carro - motor.

Con el fin de poder validar el modelo obtenido con anterioridad, se procedió a realizar un ensayo en el cual se le inyectó a la planta una señal del tipo *Pseudo Random Binary Sequence* de amplitud 10V, con pulsos de duración de entre  $t_0 = 0,1$  s y  $t_1 = 0,3$  s, y se procedió a registrar la señal de salida.

Con la misma señal de entrada se simuló la excitación del modelo y luego se procedió a realizar la comparación de las respectivas salidas. A continuación se presenta un gráfico con la evolución temporal de la planta y del modelo ante una entrada del tipo *PRBS*.

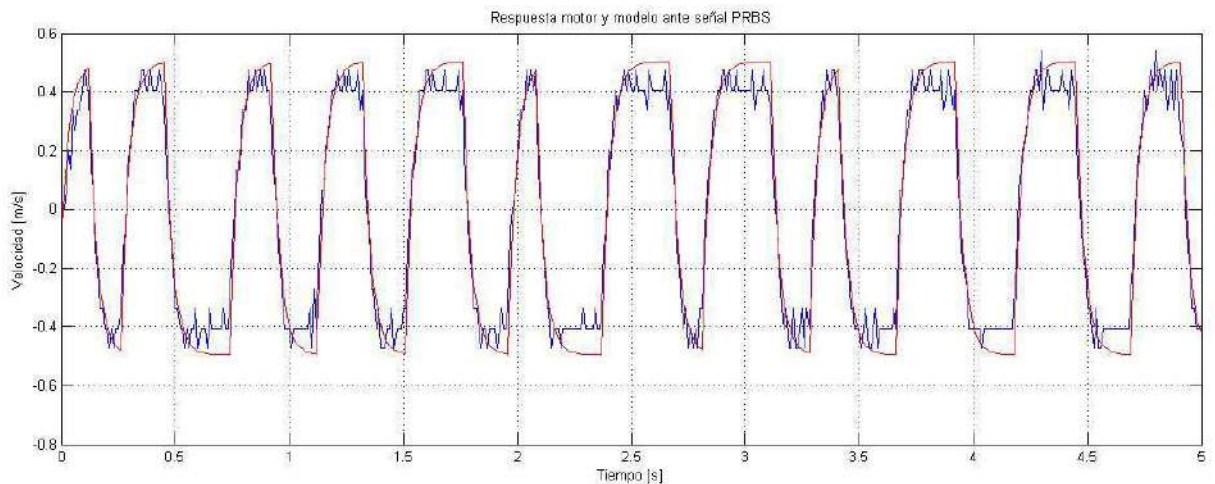


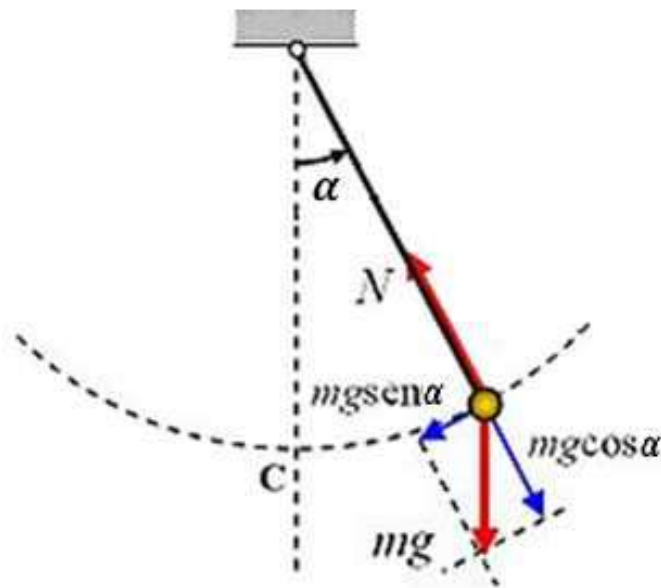
Gráfico N° 14: Validación del modelo ante entrada PRBS.

Como se puede observar del gráfico anterior, el modelo obtenido presenta una respuesta satisfactoria.

## 9- Modelado e identificación del sistema Péndulo.

### 9.1 Modelado matemático del sistema Péndulo en el semiplano inferior.

Atendiendo a la siguiente figura:



*Figura N° 2: Sistema péndulo.*

Realizando la sumatoria de momentos respecto al centro de giro, se tiene:

$$\sum M_o = J_o * \ddot{\alpha}$$

De donde resulta:

$$\ddot{\alpha} = \frac{m * g * l}{J_o} * \text{sen}(\alpha) - \frac{K_f}{J_o} * \dot{\alpha} + \frac{m * l}{J_o} * \ddot{x} * \text{cos}(\alpha) - \frac{m * g}{J_o} * |\text{cos}(\alpha)| * \text{signo}(\dot{\alpha})$$

Considerando el ángulo respecto a la vertical superior ( $\theta$ ), resulta:

$$\alpha = \theta + \pi$$

Luego, se tiene que:

$$\ddot{\theta} = -\frac{m * g * l}{J_o} * \text{sen}(\theta) - \frac{K_f}{J_o} * \dot{\theta} - \frac{m * l}{J_o} * \ddot{x} * \cos(\theta) - \frac{m * g}{J_o} * |\cos(\theta)| * \text{signo}(\dot{\theta})$$

Denominando:

$$C_1 = \frac{K_f}{J_o}$$

$$C_2 = \frac{m * g * l}{J_o}$$

$$C_3 = \frac{m * g}{J_o}$$

$$C_4 = \frac{m * l}{J_o} = \frac{C_2}{g}$$

La ecuación anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\ddot{\theta} = -C_2 * \text{sen}(\theta) - C_1 * \dot{\theta} - C_4 * \ddot{x} * \cos(\theta) - C_3 * |\cos(\theta)| * \text{signo}(\dot{\theta})$$

## 9.2 Identificación de los parámetros del sistema Péndulo.

Para la identificación de los parámetros del modelo del sistema péndulo se procedió a realizar una serie de ensayos, en los cuales desde diferentes condiciones iniciales de ángulo y con el carro detenido, se dejó oscilar libremente el mismo y se registró la evolución de su movimiento.

Luego se procedió a realizar la implementación del modelo del sistema péndulo en el entorno de simulación Matlab Simulink, donde se ajustaron las constantes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  para que la respuesta simulada coincida con las mediciones obtenidas. Cabe señalar que, bajo estas condiciones no es posible ajustar la constante de acople  $C_4$ , puesto que la aceleración del carro resulta ser nula.

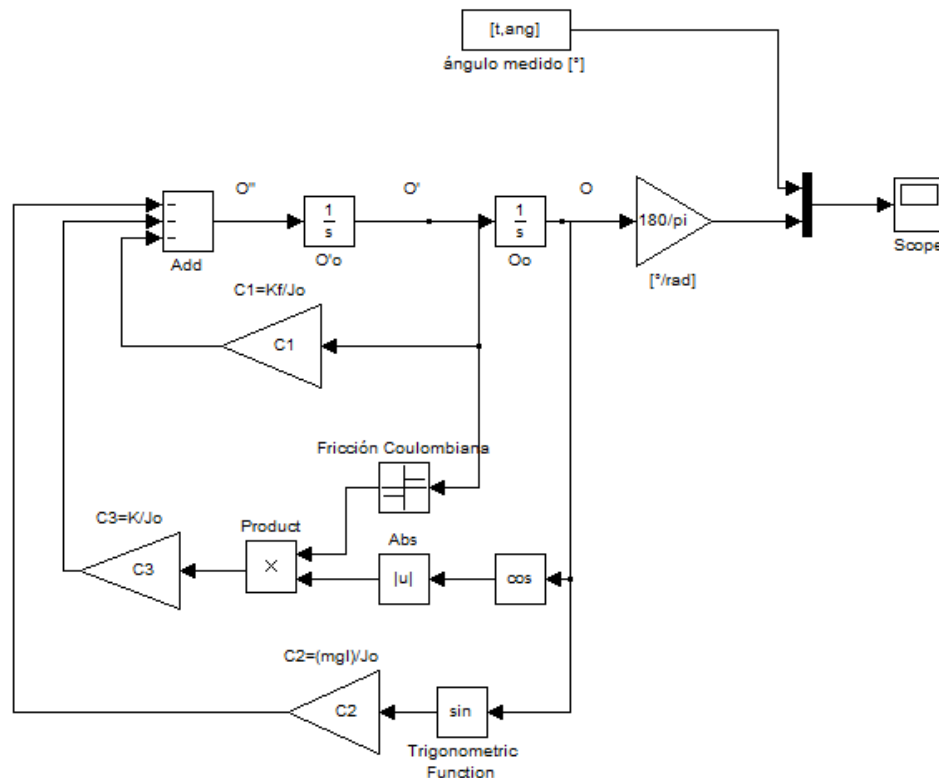
Las constantes del modelo obtenidas fueron las siguientes:

$$C_1 = 0,1$$

$$C_2 = 38,5$$

$$C_3 = 0,55$$

A continuación se presenta una imagen con el correspondiente diagrama de simulación.



Esquema N° 1: Diagrama de simulación del sistema péndulo.

### 9.3 Validación del modelo del sistema Péndulo.

Con el fin de validar el modelo obtenido para el sistema péndulo se procedió a comparar la evolución temporal del movimiento del péndulo en oscilaciones libres con la del modelo de simulación para distintos valores de condiciones iniciales. A continuación se muestran los gráficos de evolución temporal obtenidos en diferentes ensayos.

- **Ángulo inicial: -78 grados.**

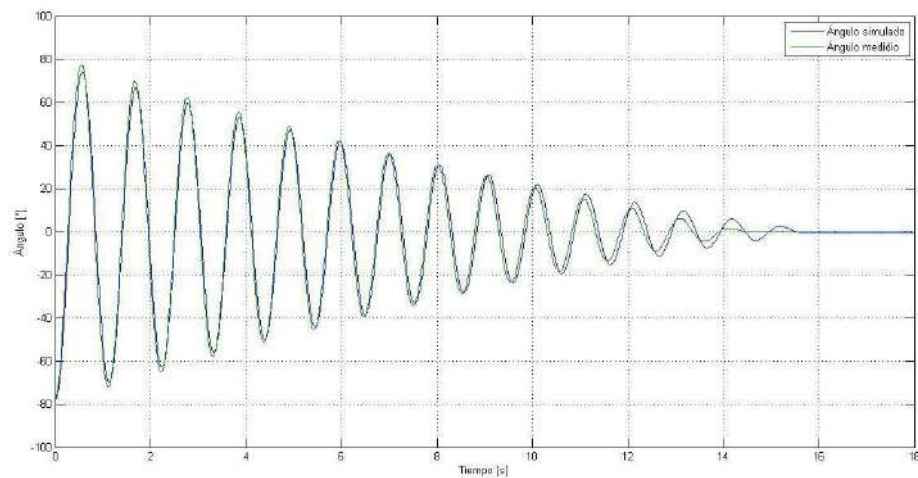


Gráfico N° 15: Evolución temporal para ángulo inicial -78°.

- **Ángulo inicial: -88.9 grados.**

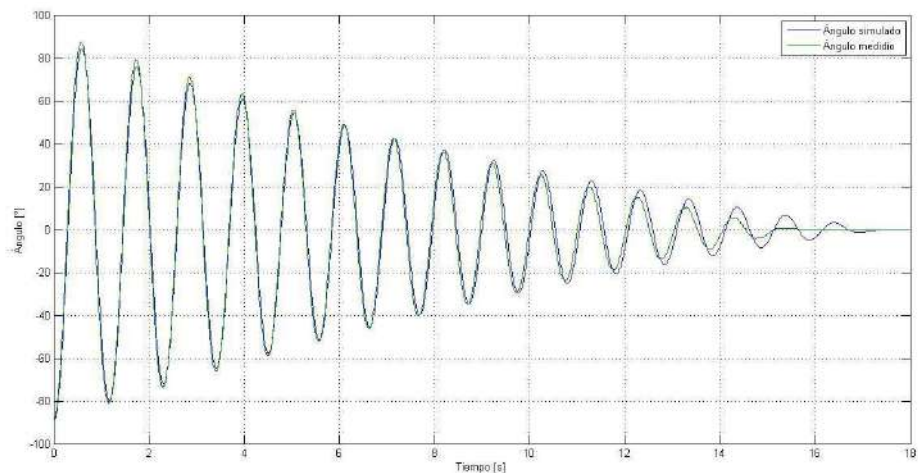
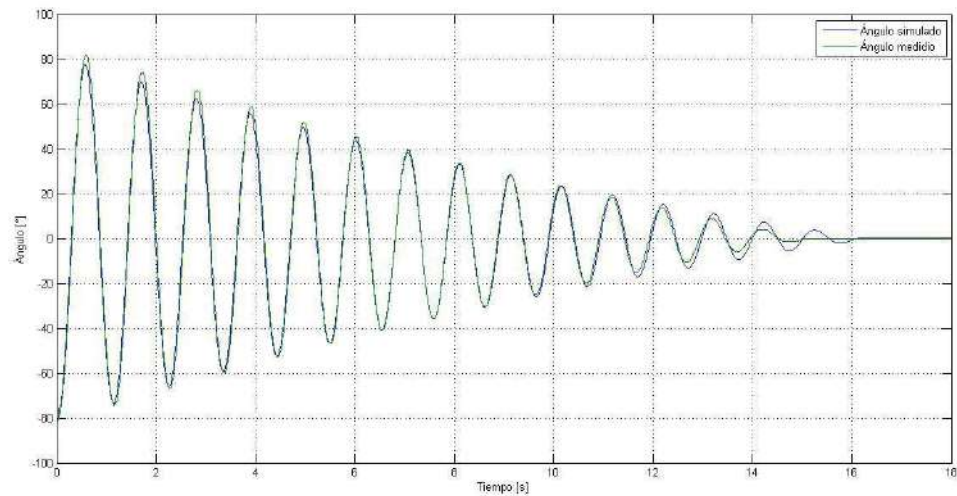


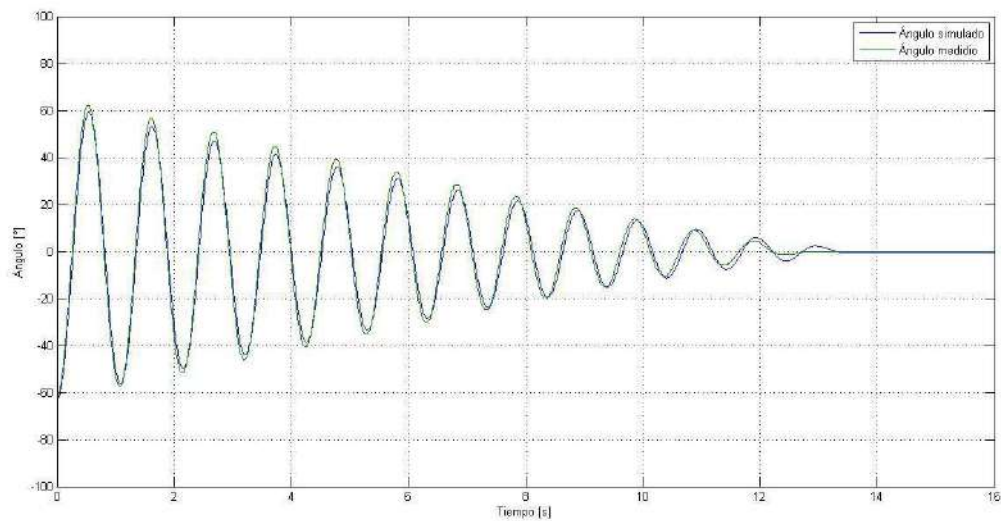
Gráfico N° 16: Evolución temporal para ángulo inicial -88.9°.

- **Ángulo inicial:**-81.8 grados



*Gráfico N° 17: Evolución temporal para ángulo inicial -81.8°.*

- **Ángulo inicial:** -62.8 grados.



*Gráfico N° 18: Evolución temporal para ángulo inicial -62.8°.*

Como se puede observar de los gráficos anteriores, el modelo de simulación ajusta satisfactoriamente a la respuesta del sistema péndulo. También puede observarse que para ángulos pequeños, la simulación no ajusta tanto a los datos medidos, lo cual se debe a que la componente de rozamiento Coulombiano toma un mayor peso relativo.

## 10- Modelado e identificación del sistema acoplado.

### 10.1 Modelo del sistema acoplado en semiplano superior.

En la siguiente figura se muestra un péndulo invertido y el correspondiente diagrama de cuerpo libre.

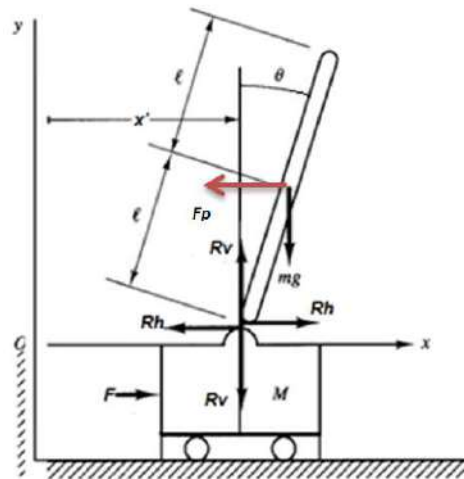


Figura N° 3: Sistema péndulo invertido.

Teniendo en cuenta la figura anterior, y atendiendo que en la misma se considera un valor de  $\theta$  negativo, se deducen las siguientes expresiones que describen la dinámica del sistema.

$$x_G = x - l * \text{sen}(\theta)$$

$$y_G = l * \text{cos}(\theta)$$

$$\begin{cases} R_H = m * \ddot{x}_G \\ R_V - m * g = m * \ddot{y}_G \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_H = m * \frac{d^2}{dt^2} (x - l * \text{sen}(\theta)) \\ R_V - m * g = m * \frac{d^2}{dt^2} (l * \text{cos}(\theta)) \end{cases}$$



Por otro lado, tomando momento sobre el centro de gravedad del péndulo:

$$J_o * \ddot{\theta} = m * g * l * \text{sen}(\theta) - T_f + F_p * \cos(\theta) - m * g * |\cos(\theta)| * \text{signo}(\dot{\theta})$$

Dónde:

$$T_f = K_f * \dot{\theta}$$

$$F_p = m * \ddot{x}$$

Luego resulta:

$$J_o * \ddot{\theta} = m * g * l * \text{sen}(\theta) - K_f * \dot{\theta} + m * \ddot{x} * l * \cos(\theta) - m * g * |\cos(\theta)| * \text{signo}(\dot{\theta})$$

Dónde:

- $J_o$ : momento de inercia de la barra alrededor del punto de giro.
- $K_f$ : constante del torque ejercido por el rozamiento viscoso.

Despejando la velocidad angular, se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \frac{m * g * l}{J_o} * \text{sen}(\theta) - \frac{K_f}{J_o} * \dot{\theta} + \frac{m * l}{J_o} * \ddot{x} * \cos(\theta) - \frac{m * g}{J_o} * |\cos(\theta)| * \text{signo}(\dot{\theta})$$

Teniendo en cuenta que para ángulos pequeños se verifica que:

$$\cos(\theta) \approx 1 \text{ y } \text{sen}(\theta) \approx \theta$$

Linealizando, se obtiene:

$$R_H = m * (\ddot{x} - l * \ddot{\theta})$$

$$R_V - m * g = 0$$

Por otro lado:

$$\ddot{\theta} = \frac{m * g * l}{J_o} * \theta - \frac{K_f}{J_o} * \dot{\theta} - \frac{m * l}{J_o} * \ddot{x}$$

La cual, empleando la notación impuesta con anterioridad, puede expresarse como:

$$\ddot{\theta} = -C_1 * \dot{\theta} + C_2 * \theta + C_4' * \ddot{x}$$

Dónde:

$$C_4' = cte * C_4$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones lineales que gobiernan la dinámica del sistema acoplado carro-péndulo para posiciones inferiores:

$$\begin{cases} U = \alpha * \dot{x} + \beta * \ddot{x} \\ \ddot{\theta} = -C_1 * \dot{\theta} + C_2 * \theta + C_4' * \ddot{x} \end{cases}$$

Luego, considerando el siguiente set de variables de estado:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$x_3 = \theta$$

$$x_4 = \dot{\theta}$$

La representación en variables de estado del sistema continuo, puede expresarse:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha * C_4'/\beta & C_2 & -C_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\beta \\ 0 \\ C_4'/\beta \end{bmatrix} * u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

## 10.2 Modelo del sistema acoplado en semiplano inferior.

Teniendo en cuenta las ecuaciones lineales que relacionan la tensión aplicada al motor, con la velocidad y posición del carro; y la ecuación que describe la dinámica del péndulo en la posición vertical, para ángulos inferiores, se tiene:

$$\begin{cases} U = \alpha * \dot{x} + \beta * \ddot{x} \\ \ddot{\theta} = -C_1 * \dot{\theta} - C_2 * \theta - C_4' * \ddot{x} \end{cases}$$

Atendiendo al sistema de ecuaciones anterior, la representación en variables de estado en continuo, considerando el siguiente set de variables de estado:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$x_3 = \theta$$

$$x_4 = \dot{\theta}$$

Resulta ser:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha * C_4'/\beta & -C_2 & -C_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\beta \\ 0 \\ -C_4'/\beta \end{bmatrix} * u$$

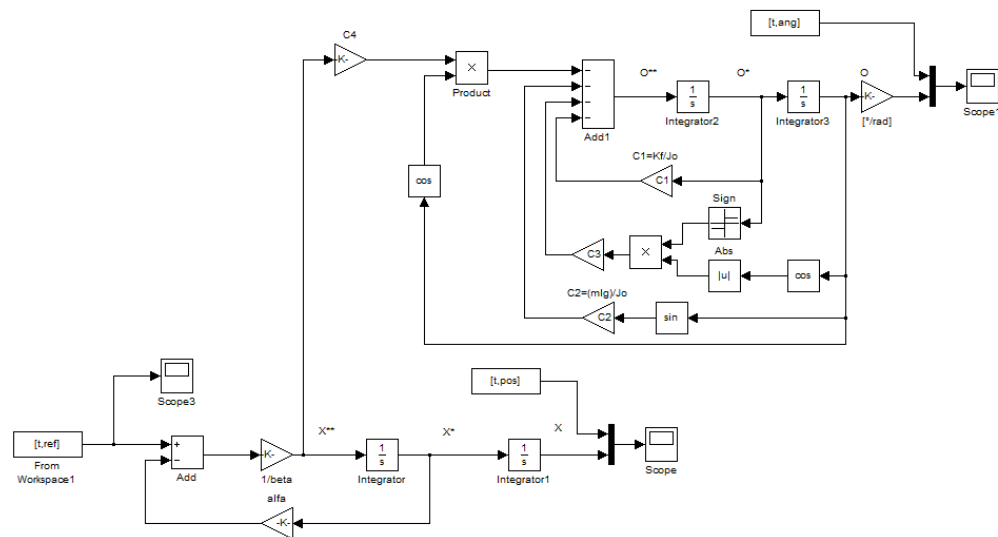
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

### 10.4 Identificación de parámetros del sistema acoplado.

Para la identificación de los parámetros del modelo del sistema acoplado, con el péndulo en semiplano inferior, se procedió a realizar una serie de ensayos en los cuales a partir de una posición inicial del carro, se aplica una señal de entrada de tipo escalón y se registra la evolución temporal de la posición del mismo y el ángulo del péndulo.

Luego se procedió a realizar la implementación del modelo del sistema acoplado en el entorno de simulación Matlab Simulink., donde se ajustó la constante de acoplamiento  $C_4$ , la cual del modelado resulta ser igual a  $C_2/g$ .

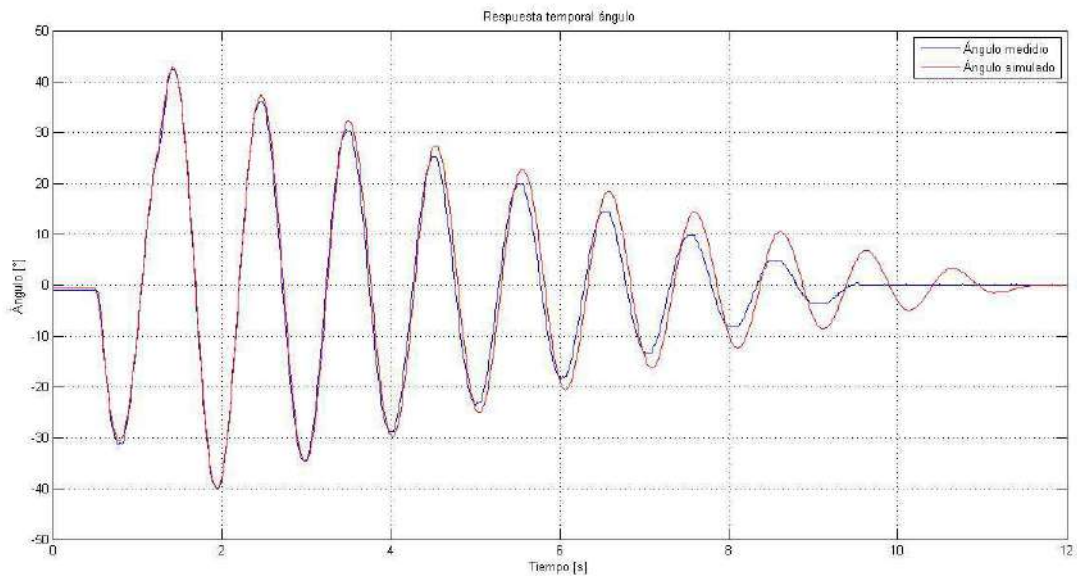
A continuación se presenta una imagen con el correspondiente diagrama de simulación.



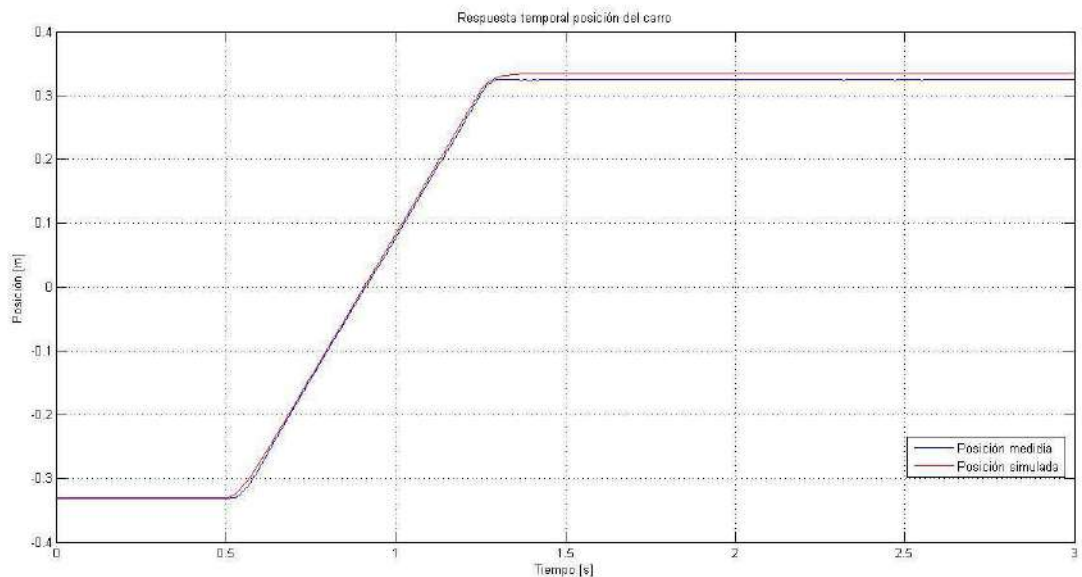
*Esquema N° 2: Diagrama de simulación del sistema acoplado.*

En los siguientes gráficos se muestra la evolución temporal del movimiento angular del péndulo y del movimiento lineal del carro, tanto para el sistema físico como para el simulado, para diferentes pulsos de tensión aplicados al motor. Teniendo en cuenta que la tensión mínima requerida para garantizar el movimiento en ambos sentidos resulta ser de 1V, en el código generado para la implementación de este ensayo, se inyectó al motor una tensión 1V por encima de la especificada.

➤ **Escalón de 9V:**



*Gráfico N° 19: Ángulo del péndulo vs simulación del modelo ante escalón de 9V.*



*Gráfico N° 20: Posición del carro vs simulación del modelo ante escalón de 9V.*

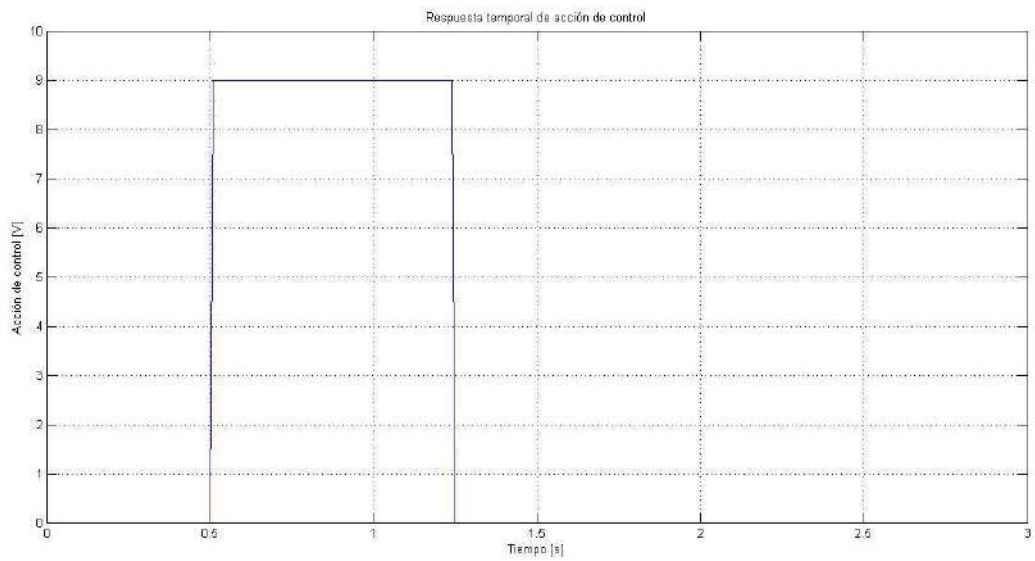


Gráfico N° 21: Acción de control de 9V aplicada.

➤ **Escalón de 13V:**

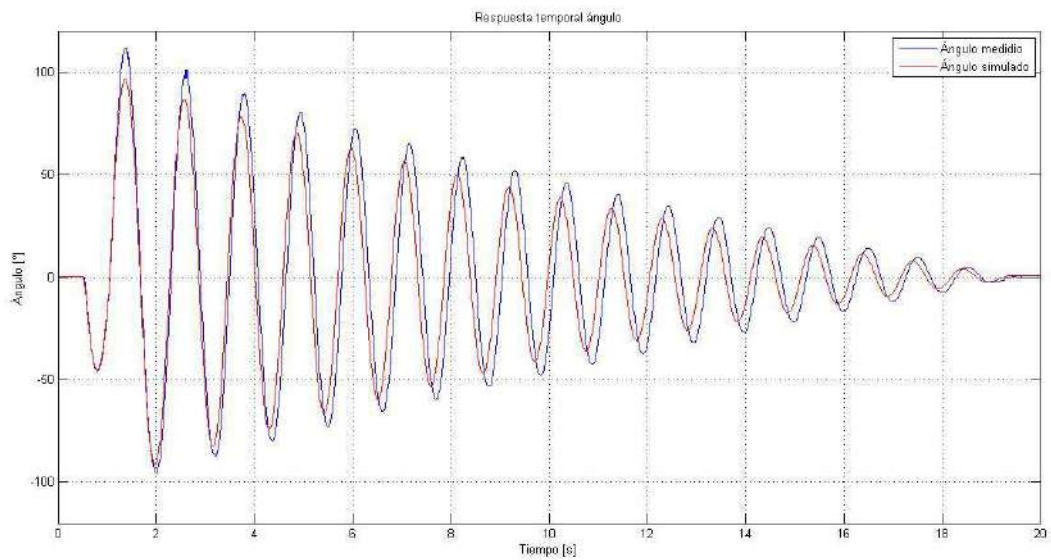


Gráfico N° 22: Ángulo del péndulo vs simulación del modelo ante escalón de 13V.

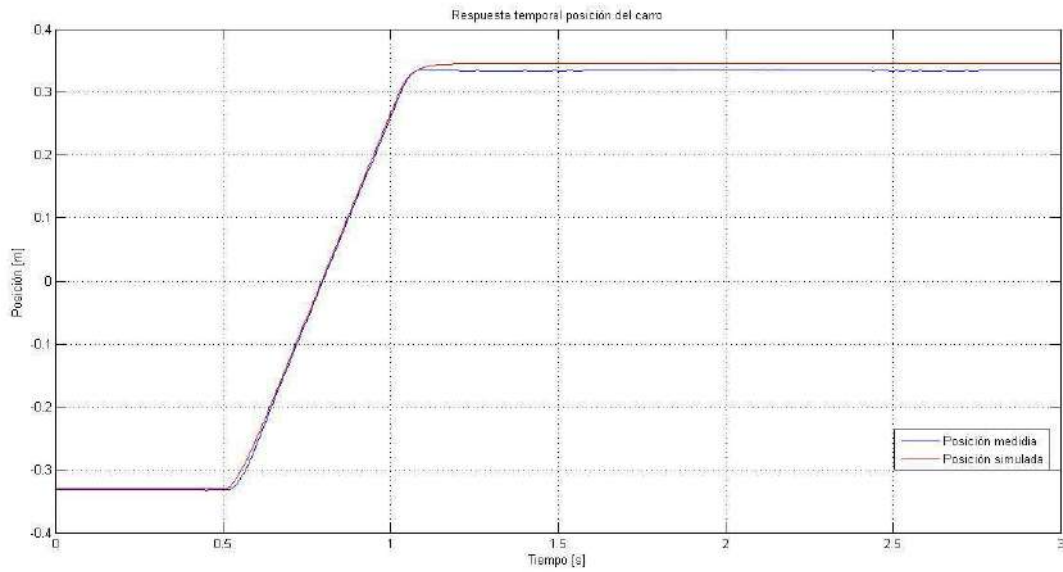


Gráfico N° 23: Posición del carro vs simulación del modelo ante escalón de 13V.

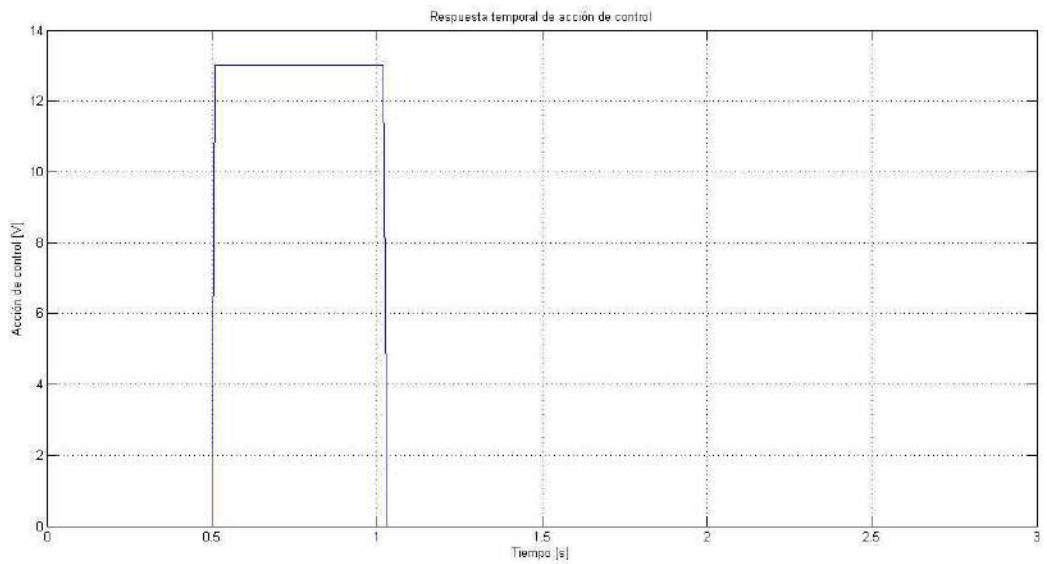


Gráfico N° 24: Acción de control de 13V aplicada.

➤ Escalón de 17V:

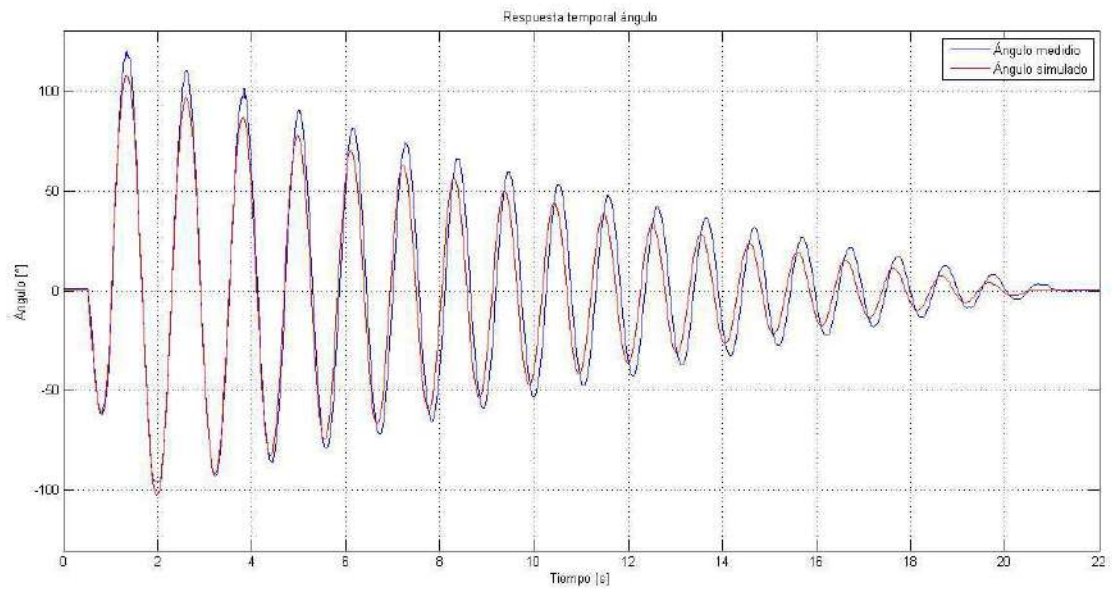


Gráfico N° 25: Ángulo del péndulo vs simulación del modelo ante escalón de 17V.

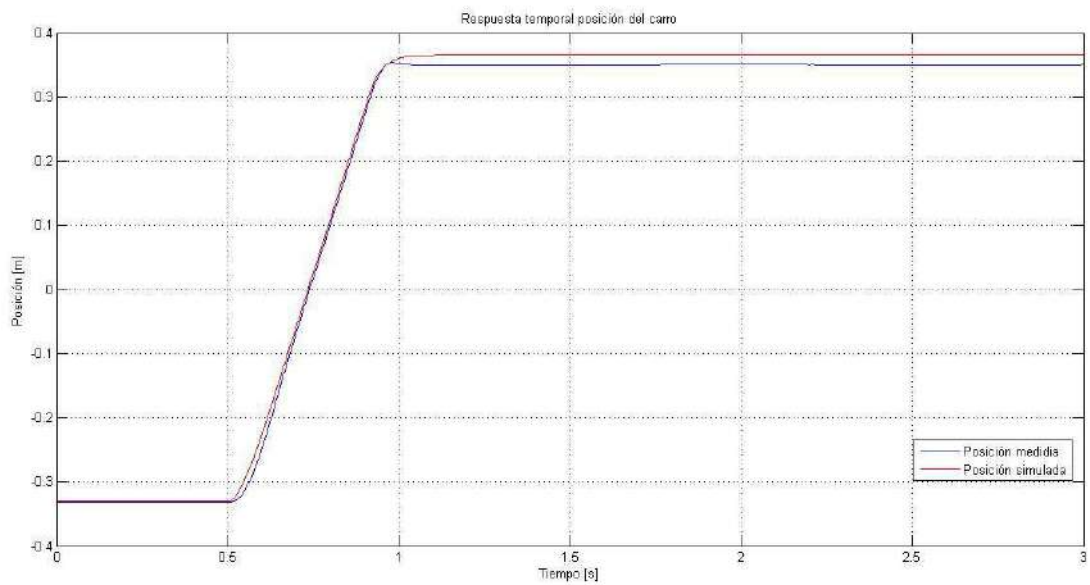
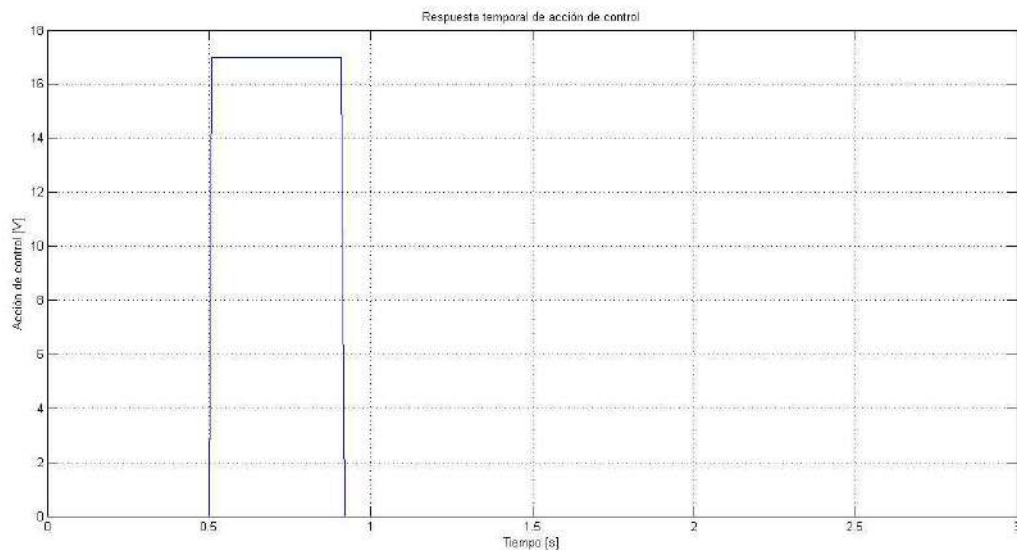


Gráfico N° 26: Posición del carro vs simulación del modelo ante escalón de 17V.



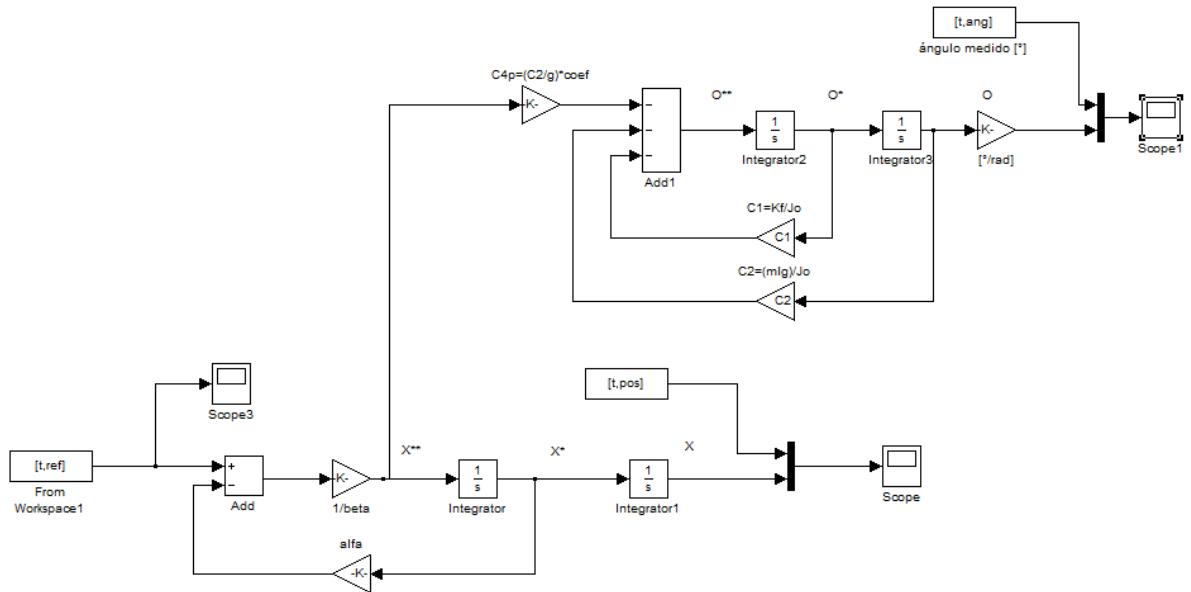


*Gráfico N° 27: Acción de control de 17V aplicada.*

Como se puede observar de los gráficos anteriores, se observa que la constante de acoplamiento  $C_4$  proveniente del modelo matemático, ajusta satisfactoriamente la respuesta del modelo simulado con la obtenida en el ensayo.

### **10.5 Modelo de control del sistema con péndulo en semiplano inferior.**

Debido a que el sistema real presenta alinealidades, para poder realizar un diseño de control, se tuvieron que eliminar dichas alinealidades y ajustar nuevamente los parámetros de simulación. A continuación se presenta una imagen con el correspondiente diagrama de simulación del sistema linealizado para control.



*Esquema N° 3: Diagrama de simulación del sistema acoplado para control.*

Para lograr un mejor ajuste de los parámetros del sistema se procedió a aplicar un coeficiente de ajuste a la constante de acoplamiento entre los sistemas carro y péndulo, es decir:

$$C_4' = C_4 * cte$$

Donde la constante obtenida mediante sucesivos ensayos, resulta ser:

$$cte = 1,12$$

Por lo tanto, las constantes de ajuste del modelo de control resultan ser las siguientes:

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 38,5$$

$$C_4' = 4,3955$$

En los siguientes gráficos se muestra la evolución temporal del movimiento angular del péndulo y el pulso de tensión aplicado al motor, para diferentes amplitudes.

➤ **Escalón de 4V**

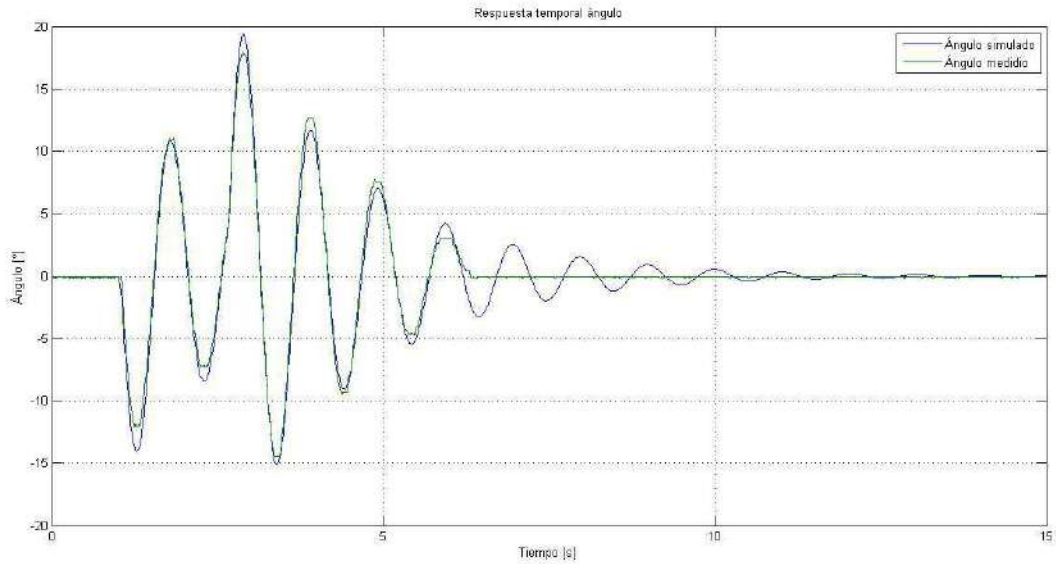


Gráfico N° 28: *Ángulo del péndulo vs simulación del modelo de control ante escalón de 4V.*

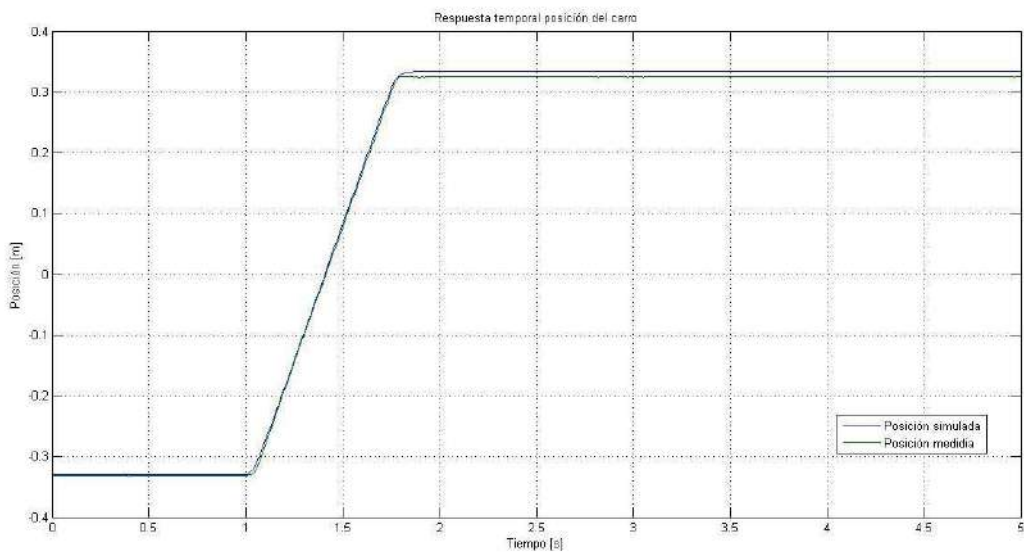


Gráfico N° 29: *Posición del carro vs simulación del modelo de control ante escalón de 4V.*

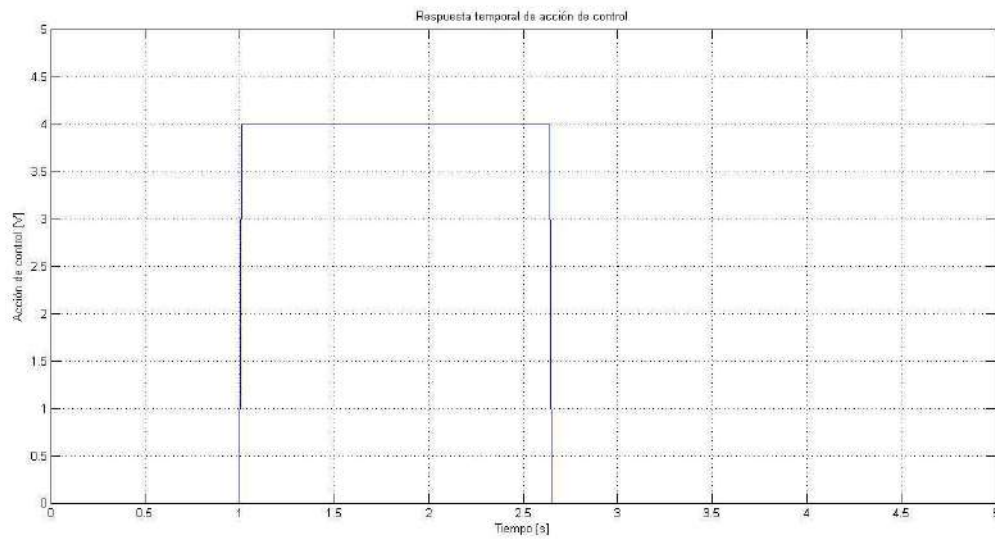


Gráfico N° 30: Acción de control de 4V aplicada.

➤ Referencia de 9V

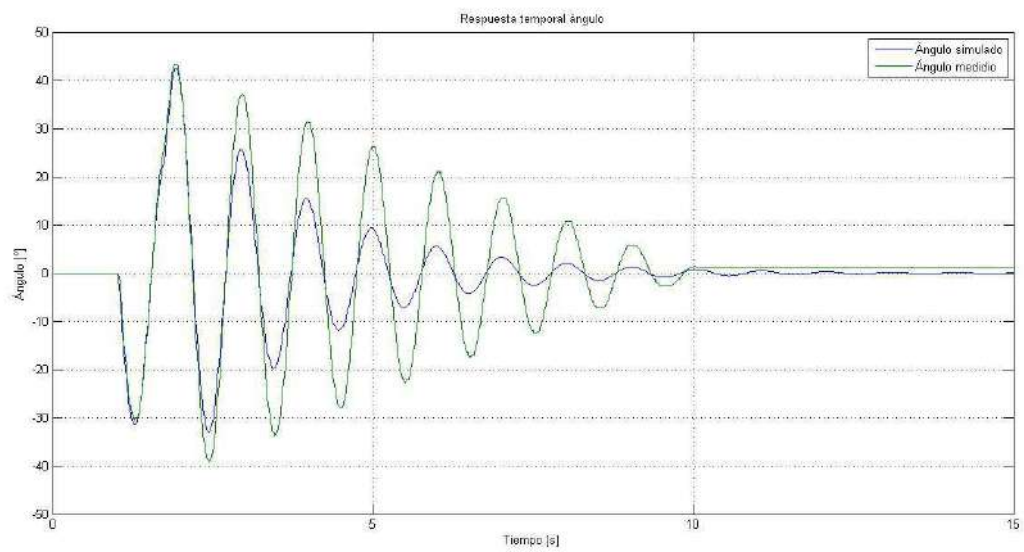


Gráfico N° 31: Ángulo del péndulo vs simulación del modelo de control ante escalón de 9V.

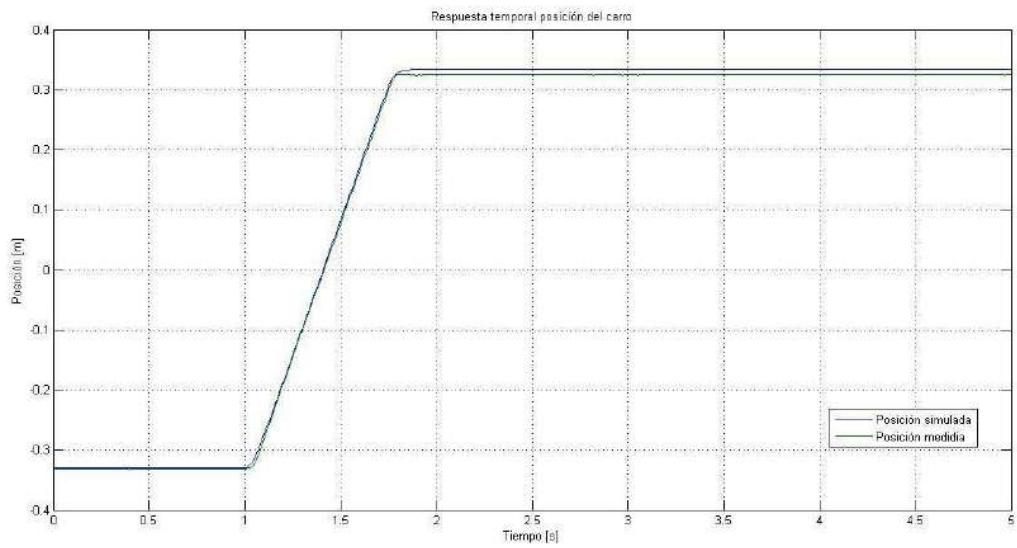


Gráfico N° 32: Posición del carro vs simulación del modelo de control ante escalón de 9V.

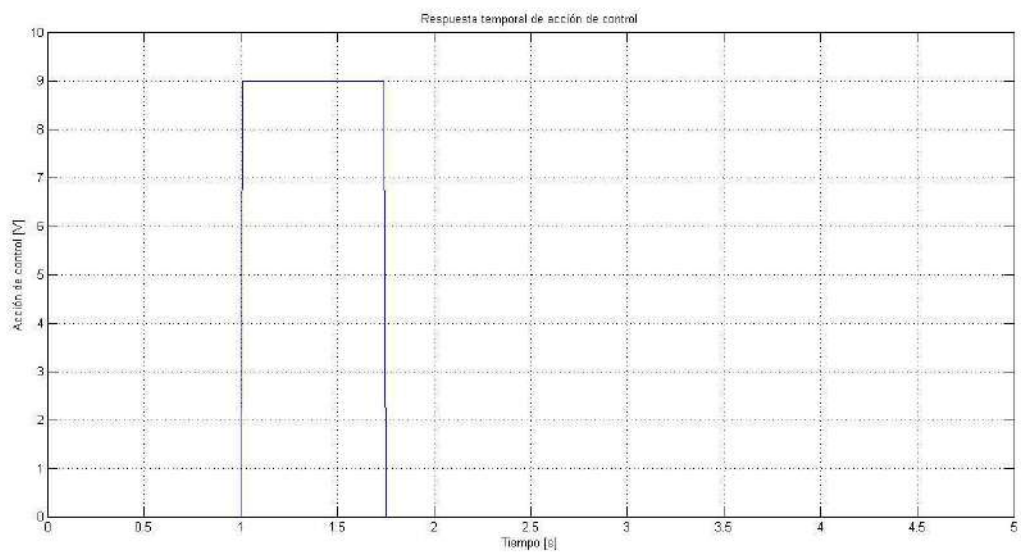


Gráfico N° 33: Acción de control de 9V aplicada.

➤ **Referencia de 17V**

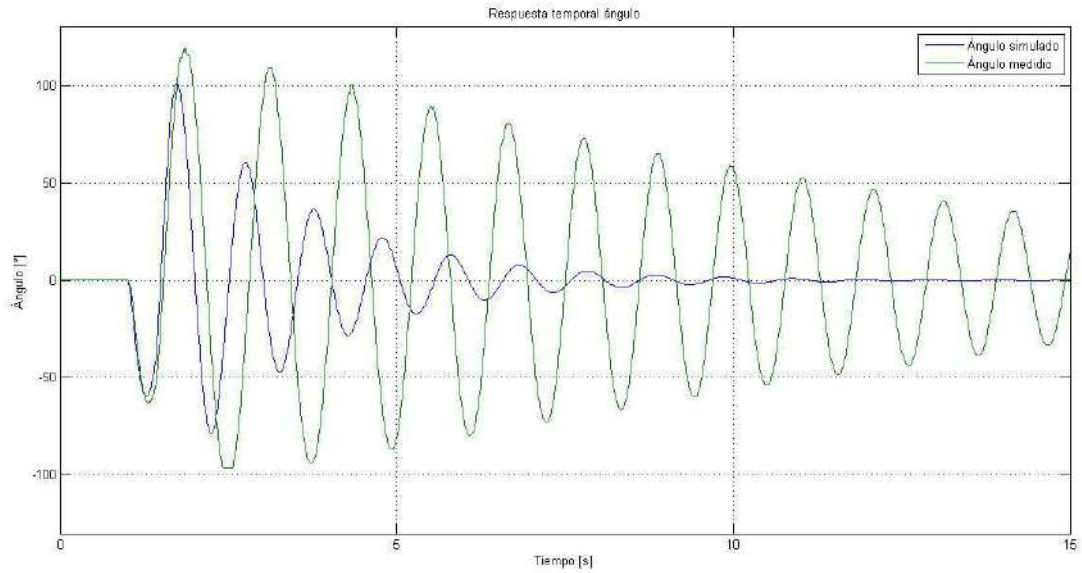


Gráfico N° 34: *Ángulo del péndulo vs simulación del modelo de control ante escalón de 17V.*

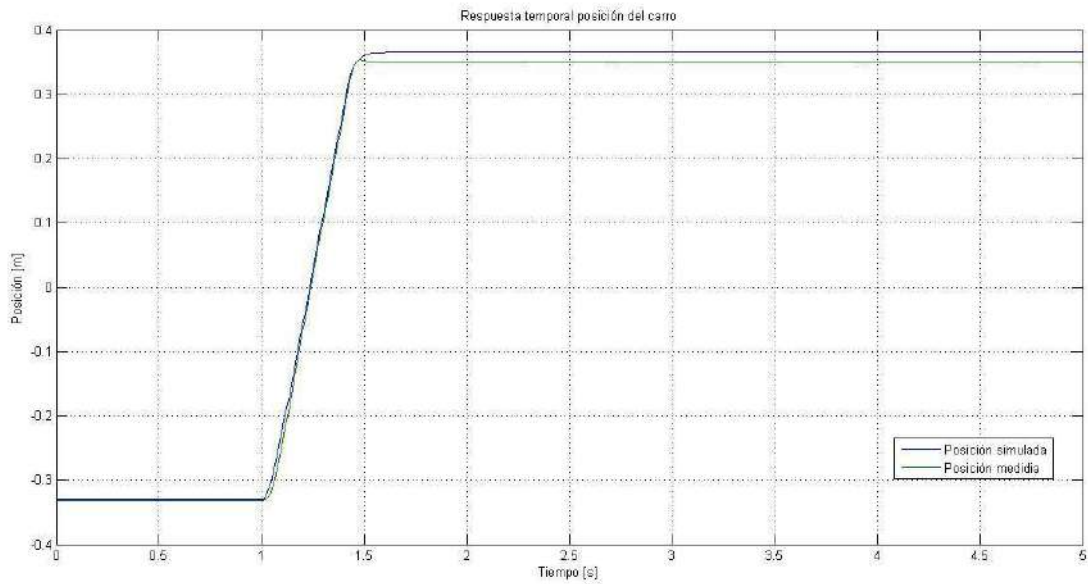
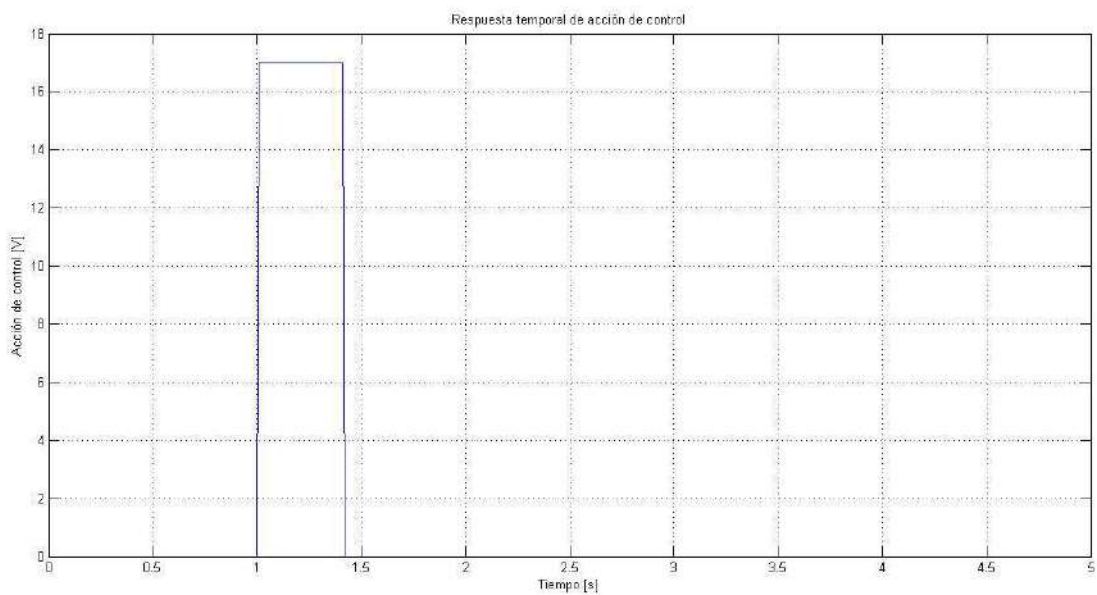


Gráfico N° 35: *Posición del carro vs simulación del modelo de control ante escalón de 17V.*



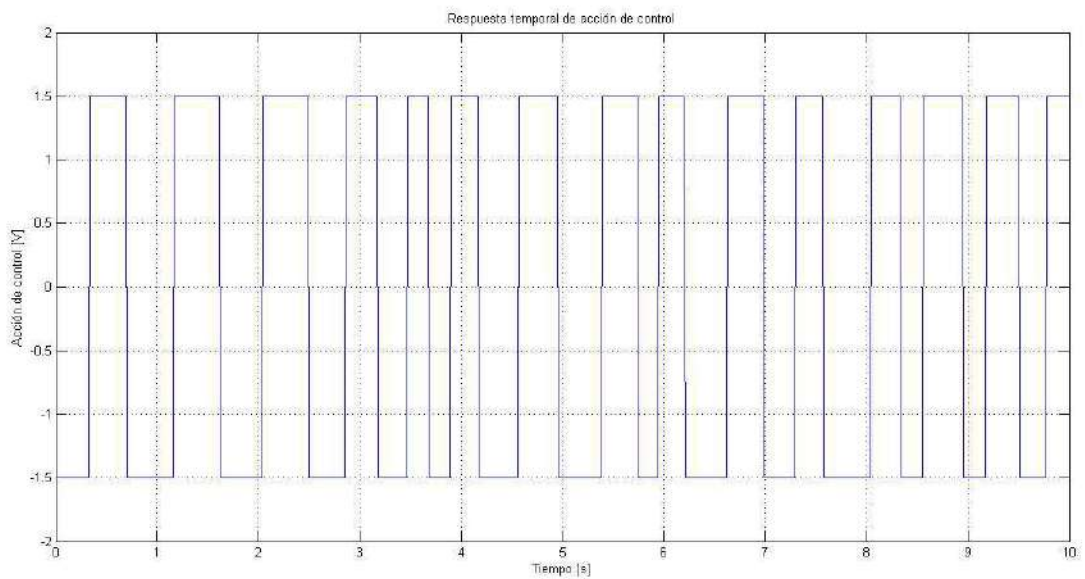
*Gráfico N° 36: Acción de control de 17V aplicada.*

Como se puede apreciar de las gráficas anteriores, el modelo de control ajusta satisfactoriamente en el lapso de tiempo donde el carro le aplica un impulso al péndulo. Luego de este periodo, el modelo no ajusta con los datos relevados puesto que no se contemplan las diferentes alinealidades que presenta el sistema.

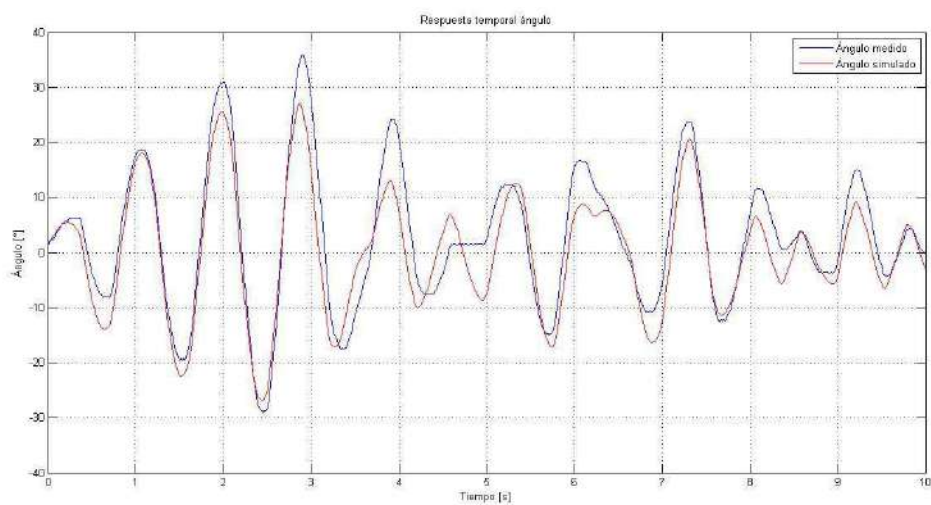
### **10.6 Validación del modelo de control con péndulo en semiplano inferior.**

Con el fin de poder validar el modelo obtenido con anterioridad, se procedió a realizar un ensayo en el cual se le aplicó a la planta una señal del tipo *Pseudo Random Binary Sequence* de amplitud 5V, con pulsos de duración de entre  $t_0 = 0,1$  s y  $t_1 = 0,5$  s, y se procedió a registrar las señales de salida.

Con la misma señal de entrada se simuló la excitación del modelo y luego se procedió a realizar la comparación de las respectivas salidas. A continuación se presenta un gráfico con la evolución temporal de la planta y del modelo ante una entrada del tipo *PRBS*.

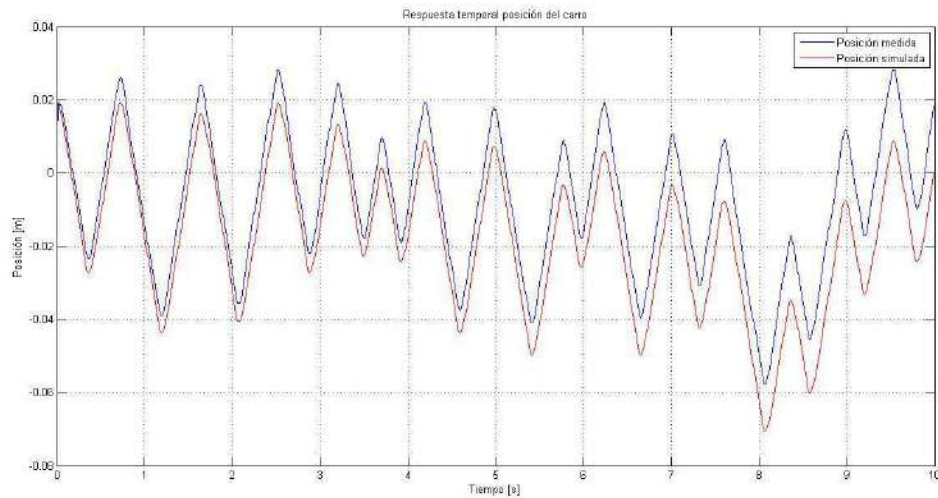


*Gráfico N° 37: Acción de control generada.*



*Gráfico N° 38: Evolución temporal péndulo y modelo de control.*





*Gráfico N° 39: Evolución temporal posición del carro y del modelo de control.*

Como se puede apreciar de las gráficas anteriores, el modelo de control ajusta satisfactoriamente con los datos obtenidos en la experiencia.

## 11- Filtro de Kalman.

### 11.1 Ecuaciones para el algoritmo del Filtro de Kalman.

Dado que del sistema real solo se cuenta con la medición de la posición angular del péndulo y de la posición del carro, para la realización de un control mediante las técnicas de variable de estado es necesario implementar un observador para poder tener acceso a una estimación de las variables que no se pueden medir, las cuales resultan ser la velocidad del carro y velocidad angular del péndulo.

En este caso se optó por la utilización de un estimador óptimo variante en el tiempo, el cual es denominado filtro de Kalman.

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo, el cual se realiza en dos pasos:

➤ **Predicción:**

$$\hat{x}_k^- = \bar{x}_k$$

$$P_k^- = \Phi * P_{k-1} * \Phi^T + Q$$

Dónde:

- $\hat{x}_k^-$ : Estimación a priori de los estados.
- $\bar{x}_k$ : Simulación de estado.
- $P_k^-$ : Covarianza del error de estimación antes de la medición.
- $P_{k-1}$ : Covarianza del error de estimación después de la medición.
- $Q$ : Covarianza del ruido del proceso.

➤ Corrección:

$$K_k = P_k^- * H^T * (H * P_k^- * H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k * (y_k - H * \hat{x}_k^-)$$

$$P_k = (I - K_k * H) * P_k^-$$

Dónde:

- $K_k$ : Ganancia de Kalman.
- $R$ : Covarianza del ruido de medición.
- $\hat{x}_k$ : Estimación.

Debido a la necesidad de utilizar las matrices de covarianza del error de los ruidos de medición y del proceso, se determinaron los valores de las diagonales de dichas matrices, a partir del cuadrado del rango de variación de dichas variables. Para determinar estos valores, se realizó un ensayo en el cual se inyectó al sistema una entrada del tipo escalón y se obtuvieron los siguientes datos:

$$x = \pm 0,3[m]$$

$$v = \pm 0,5[m/s]$$

$$\theta = \pm 0,1 [rad]$$

$$\dot{\theta} = \pm \frac{\pi}{2} [rad/s]$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se obtuvo que la matriz de covarianza del ruido del proceso resulta ser:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,09 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la matriz de covarianza del ruido de medición, resulta:

$$R = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Debido a que el sistema presenta alinealidades, en este caso se optó por la implementación de un filtro de Kalman extendido.

Dadas las ecuaciones de estado del sistema, expresadas bajo el set de variables de estado seleccionado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\alpha}{\beta} * x_2 + \frac{1}{\beta} * u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -C_1 * x_4 - C_3 * |\cos(x_3)| * \text{signo}(x_4) + C_2 * \text{sen}(x_3) + C_4 * \cos(x_3) * \left(-\frac{\alpha}{\beta} * x_2 + \frac{1}{\beta} * U\right)$$

Se procedió a hacer una discretización por diferencias hacia delante, teniendo en cuenta que:

$$\dot{x}(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$$

$$x(k+1) = x(k) + T * \dot{x}(k)$$

Luego, la simulación de los estados viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x}_1(k+1) = \bar{x}_1(k) + T * \bar{x}_2(k)$$

$$\bar{x}_2(k+1) = \bar{x}_2(k) + T * \left( -\frac{\alpha}{\beta} * \bar{x}_2(k) + \frac{1}{\beta} * u(k) \right)$$

$$\bar{x}_3(k+1) = \bar{x}_3(k) + T * \bar{x}_4(k)$$

$$\bar{x}_4(k+1) = \bar{x}_4(k)$$

$$+ T * \left( -C_1 * \bar{x}_4(k) - C_3 * |\cos(\bar{x}_3(k))| * \text{signo}(\bar{x}_4(k)) + C_2 * \text{sen}(\bar{x}_3(k)) + C_4 * \cos(\bar{x}_3(k)) * \left( -\frac{\alpha}{\beta} * \bar{x}_2(k) + \frac{1}{\beta} * u(k) \right) \right)$$

Debido a que en el algoritmo se requiere la utilización de la matriz de estados discretizada, se tiene que:

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{T} = F_l * x(k) + G * u(k)$$

$$x(k+1) = (T * F_l + I) * x(k) + T * G * u(k)$$

De lo cual se observa que la matriz de estado discretizada resulta ser:

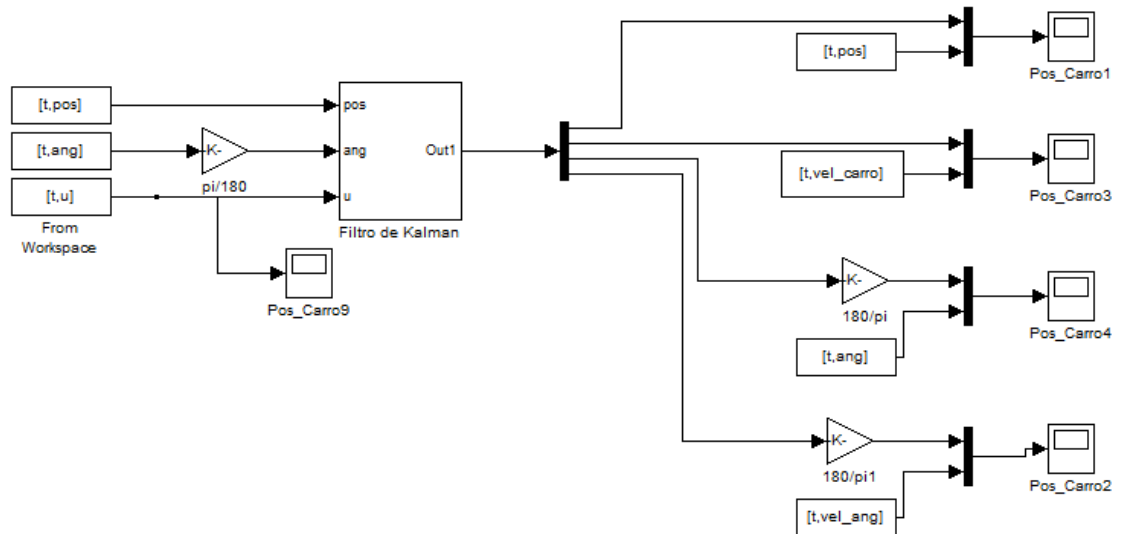
$$\Phi = T * F_l + I$$

Luego, linealizando el sistema, obtenemos la siguiente matriz de estados continua:

$$F_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\alpha * C_4}{\beta} * \cos(x_3) & C_2 * \cos(x_3) + \frac{\alpha * C_4}{\beta} * \text{sen}(x_3) * x_2 & -C_1 \end{bmatrix}$$

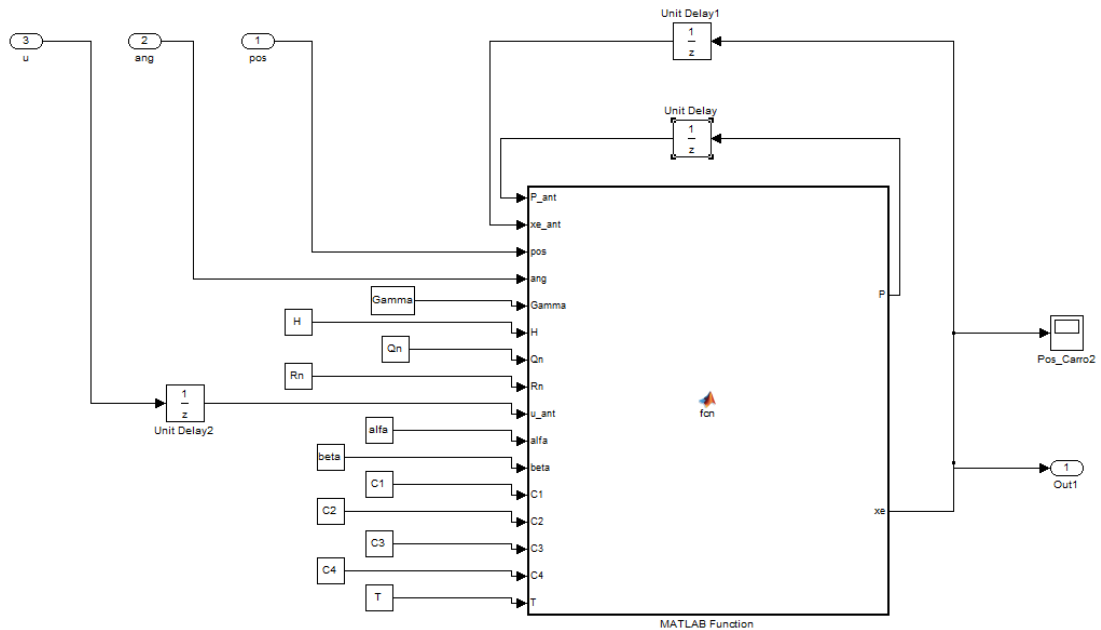
## 11.2 Diseño y simulación del Filtro de Kalman.

En primer lugar se procedió a realizar una simulación del estimador diseñado en el entorno Matlab Simulink. En las siguientes imágenes se muestra el diagrama de simulación utilizado.



*Esquema N° 4: Diagrama de simulación del Filtro de Kalman.*

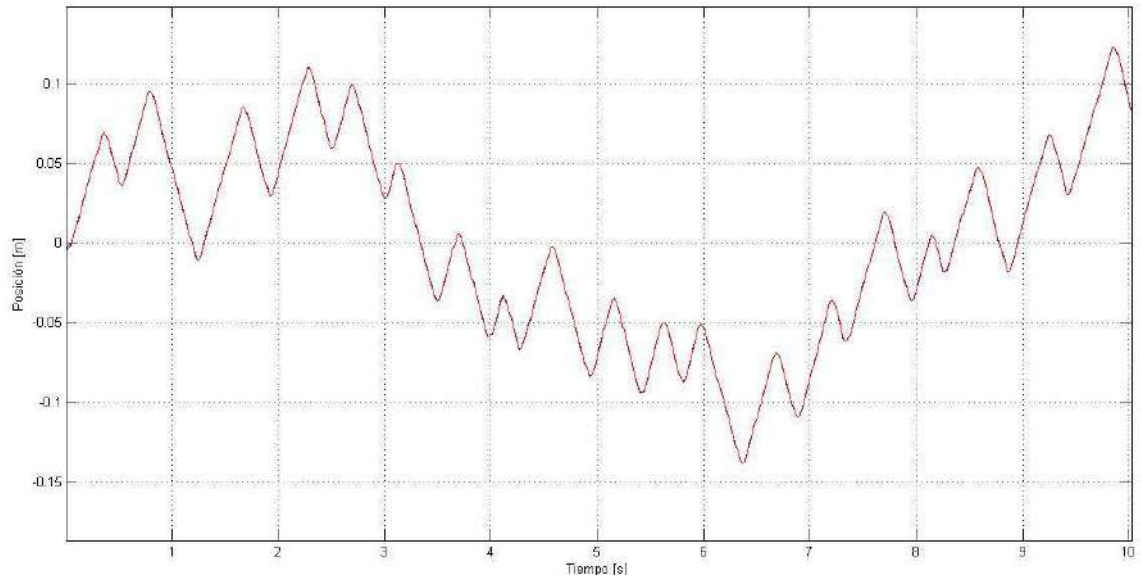
Donde dentro del bloque de filtro de Kalman, se empleó un bloque *fcn* para la implementación del algoritmo.



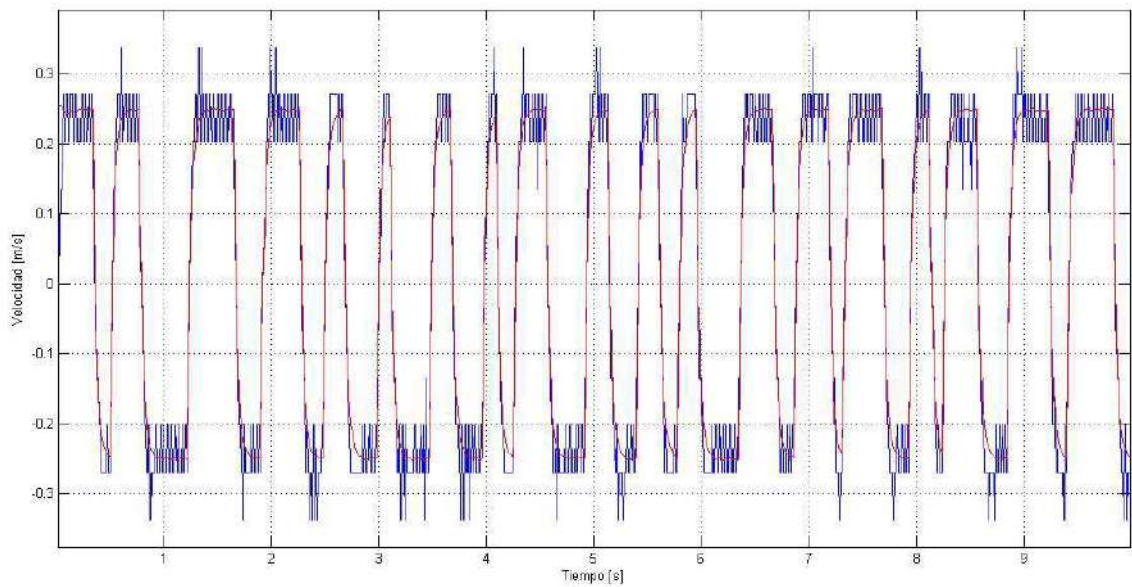
*Esquema N° 5: Bloque de simulación del Filtro de Kalman.*

Para evaluar el desempeño del estimador implementado en el entorno de simulación, mediante la implementación de un programa en lenguaje C se aplicó al sistema una señal *PRBS* con pulsos de duración comprendidos entre 0,1 y 0,5 segundos, incorporando en dicho código el algoritmo de estimación, relevando las mediciones obtenidas y los valores de las variables estimadas.

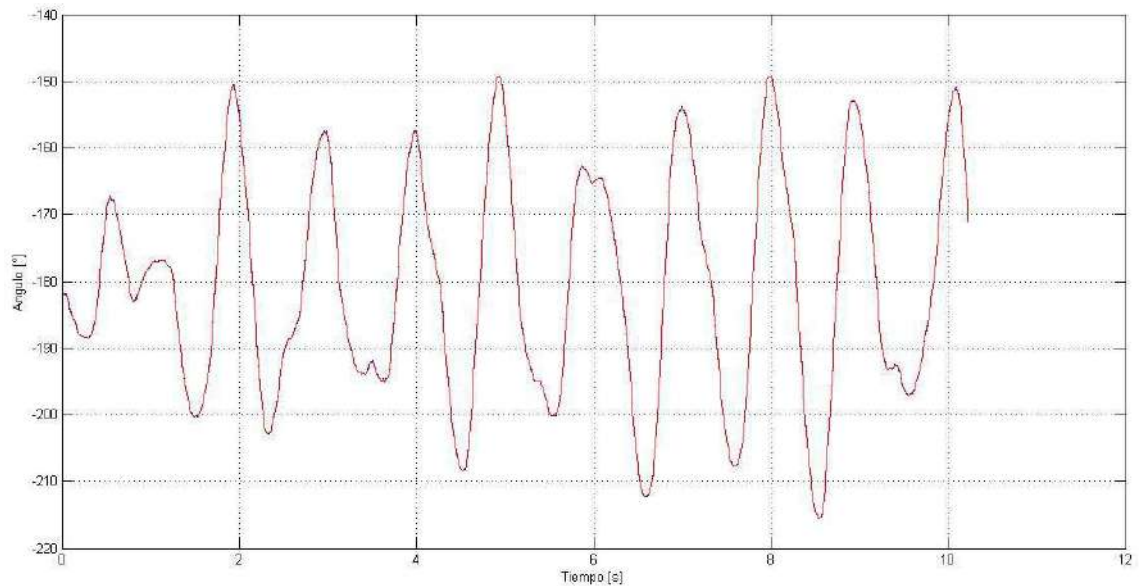
A continuación se muestran en distintos gráficos comparativos, las variables medidas y estimadas durante el ensayo anterior. Dado que no se tiene acceso a la medición de la velocidad del carro y de la velocidad angular del péndulo, se procedió a calcularlas mediante diferencias finitas.



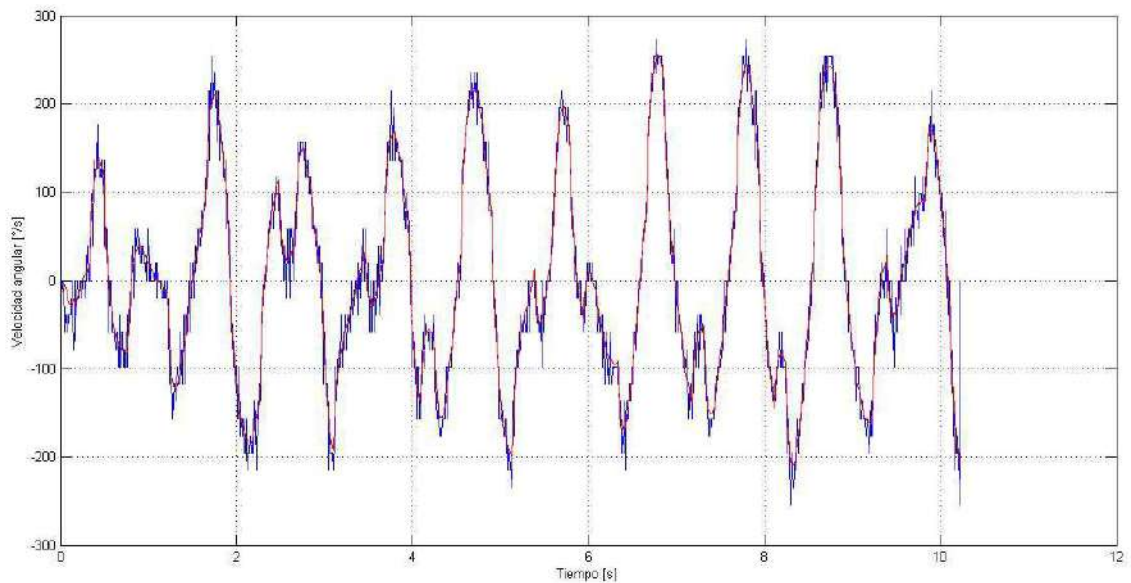
*Gráfico N° 40: Evolución temporal posición del carro medida y estimada.*



*Gráfico N° 41: Evolución temporal velocidad del carro calculada por diferencias finitas y estimada.*



*Gráfico N° 42: Evolución temporal ángulo del péndulo medido y estimado.*



*Gráfico N° 43: Evolución temporal velocidad angular del péndulo calculada por diferencias finitas y estimada.*

Como se puede apreciar, los resultados obtenidos en la implementación del estimador resultan ser satisfactorios, observándose un correcto ajuste entre las variables medidas y las estimadas.



## 12- Control del péndulo en semiplano inferior.

### 12.1 Descripción en VE para control del péndulo en semiplano inferior.

Para la realización del control, se consideró una realimentación de estado utilizando las mediciones y las estimaciones arrojadas por el filtro de Kalman para las variables a las cuales no se tiene acceso.

Teniendo en cuenta el sistema linealizado para la posición del péndulo en el semiplano inferior, y utilizando las constantes de ajuste del modelo, se obtuvo la siguiente ecuación de estado discretizada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,0087 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7518 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0057 & 0,9981 & 0,0099 \\ 0 & 1,0844 & -0,3828 & 0,9881 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,0248 \\ -0,0006 \\ -0,1082 \end{bmatrix} * u(k)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

### 12.2 Análisis de controlabilidad y observabilidad en semiplano inferior.

Teniendo en cuenta la representación por variable de estados expuesta anteriormente, se procede a realizar un análisis sobre la controlabilidad y observabilidad de dicho sistema.

➤ *Matriz de controlabilidad:*

$$C = [\Gamma \quad \phi * \Gamma \quad \phi^2 * \Gamma \quad \phi^3 * \Gamma]$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0003 & 0,0005 & 0,0006 \\ 0,0248 & 0,0186 & 0,0140 & 0,0105 \\ -0,0006 & -0,0015 & -0,0022 & -0,0027 \\ -0,1082 & -0,0798 & -0,0581 & -0,0414 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que el rango de la matriz de controlabilidad resulta ser 4, con lo cual, el sistema es completamente controlable.

➤ *Matriz de observabilidad:*

$$O = \begin{bmatrix} H \\ H * \phi \\ H * \phi^2 \\ H * \phi^3 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0,0087 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0057 & 0,9981 & 0,0099 \\ 1 & 0,0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0207 & 0,9924 & 0,0198 \\ 1 & 0,0202 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0427 & 0,9829 & 0,0294 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que el rango de la matriz de observabilidad resulta ser 4, con lo cual, el sistema es completamente observable.

### 12.3 Ley de control en semiplano inferior.

El diseño del control se realizó mediante la ubicación de los polos de la ley de control en el plano  $S$ , de la siguiente manera:

$$P_{C_s} = [-5 + 0,5i \quad -5 - 0,5i \quad -20 \quad -20]$$

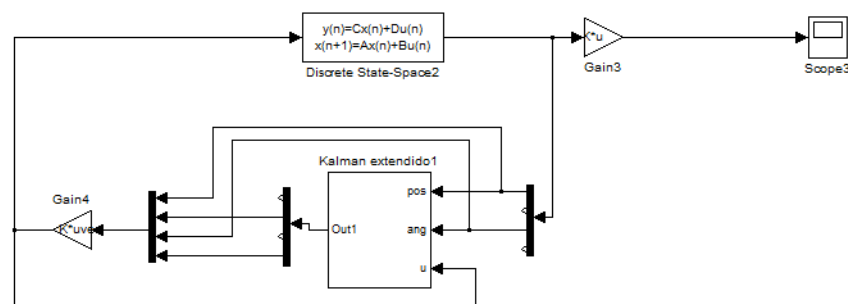
Llevando dichos polos al plano  $Z$  teniendo en cuenta un periodo de muestreo  $T=0,01s$ , los mismos resultan:

$$P_{C_z} = [0,9512 + 0,0048i \quad 0,9512 - 0,0048i \quad 0,8187 \quad 0,8187]$$

Obteniéndose las siguientes ganancias de realimentación:

$$K = [83,26 \quad 29,54 \quad -30,02 \quad 5,18]$$

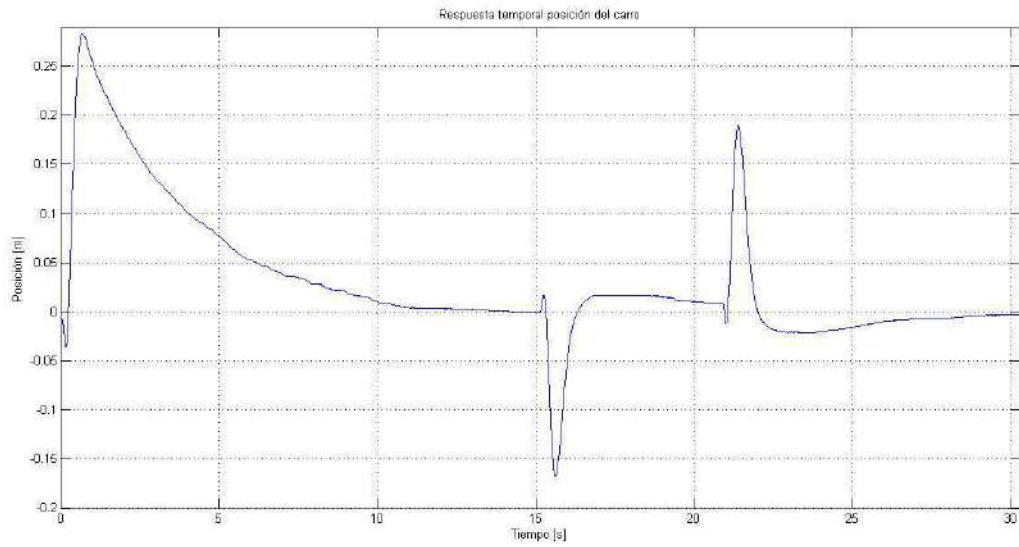
En la siguiente imagen se muestra un esquema de control implementando el filtro de Kalman y las correspondientes ganancias de realimentación.



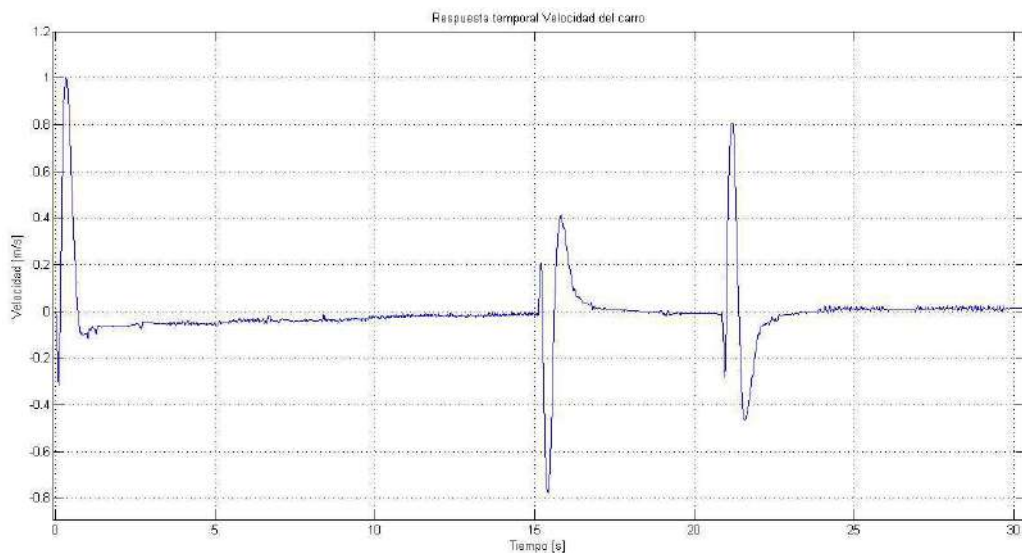
*Esquema N° 6: Sistema de control.*

Cabe señalar que la ubicación de los polos para la ley de control se eligió observando en la simulación aquellos polos que presenten un mejor desempeño, obteniéndose una respuesta rápida, pero atendiendo que la acción de control no supere el límite de saturación, el cual resulta ser de  $\pm 24$  V.

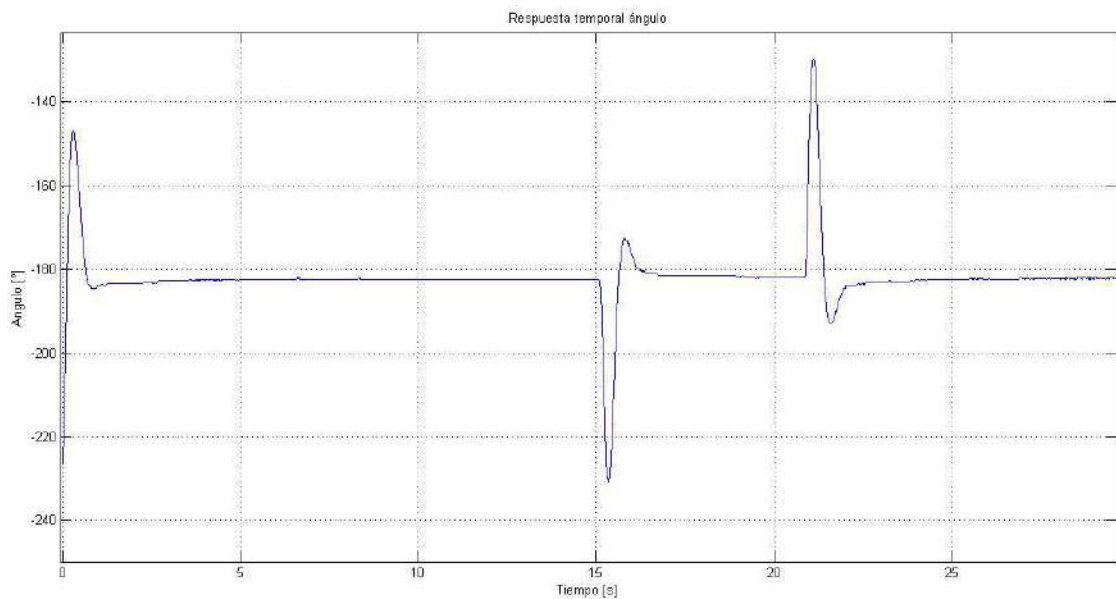
En las siguientes gráficas se muestran las respuestas temporales de las variables de estado utilizadas para realizar el control, como así también la acción de control generada al implementar la ley de control mencionada anteriormente.



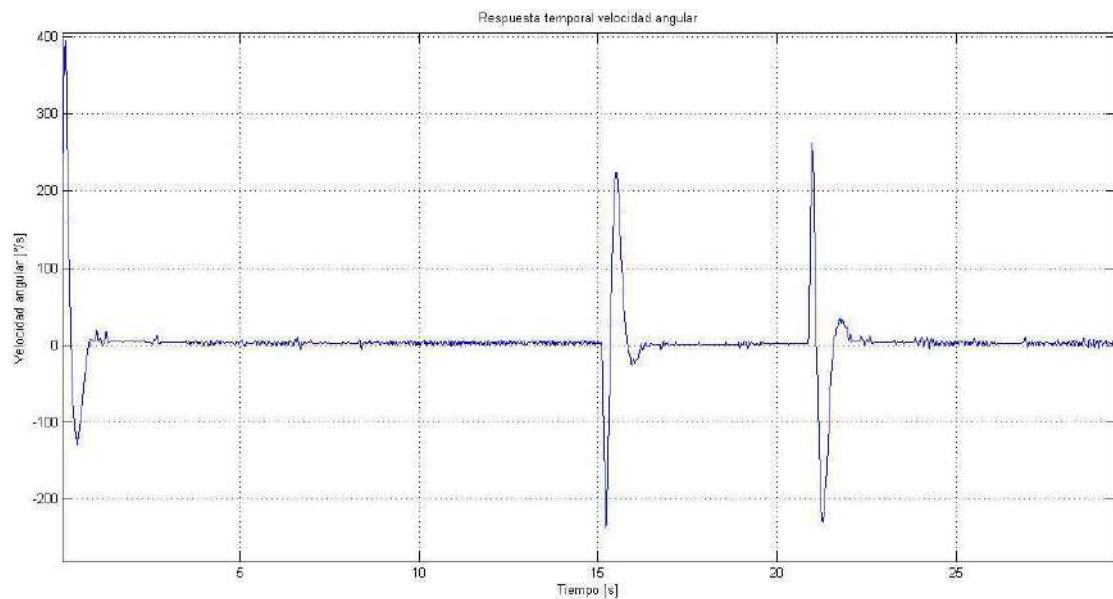
*Gráfico N° 44: Evolución temporal posición del carro durante el control del péndulo en semiplano inferior.*



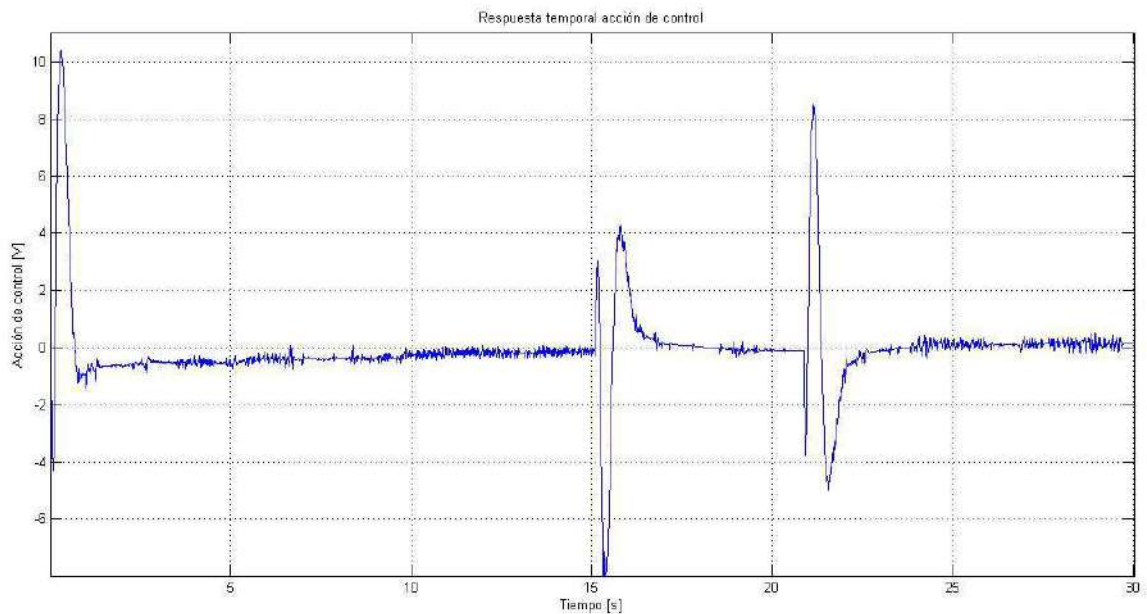
*Gráfico N° 45: Evolución temporal velocidad del carro estimada durante el control del péndulo en semiplano inferior.*



*Gráfico N° 46: Evolución temporal posición angular del péndulo medida durante el control del péndulo en semiplano inferior.*



*Gráfico N° 47: Evolución temporal velocidad angular del péndulo estimada durante el control del péndulo en semiplano inferior.*



*Gráfico N° 48: Acción de control aplicada al sistema durante el control del péndulo en semiplano inferior.*

## 13- Swing up.

### 13.1 Ecuaciones para la elevación del péndulo mediante el método de energía.

Para realizar el control del péndulo en el semiplano superior, se consideró la estrategia de elevar la vara desde la posición inicial en reposo hacia abajo, por medio del aporte de energía a la misma en forma progresiva, procurando realizar una elevación suave.

La expresión correspondiente a la energía del péndulo invertido se define como cero en la posición vertical superior ( $\theta=0$ ) y para una señal de control nula.

La expresión empleada para el cálculo de la energía del péndulo resulta ser:

$$E = \frac{1}{2} * J_p * \dot{\theta}^2 + m * g * l * (\cos(\theta) - 1)$$

La señal de control que permite llevar el péndulo hasta la posición donde  $\theta=0$ , viene dada por la siguiente expresión:

$$u = -kl * (E - E_o) * \text{signo}(\dot{\theta} * \cos(\theta))$$

Donde la función  $\text{signo}(x)$  representa la dirección que debe ser implementada para llevar la función de energía al valor deseado y  $kl$  es un parámetro de diseño.

Reemplazando la expresión de la energía en la ecuación de la acción de control y teniendo en cuenta el coeficiente  $C_2$  obtenido con anterioridad, se obtiene:

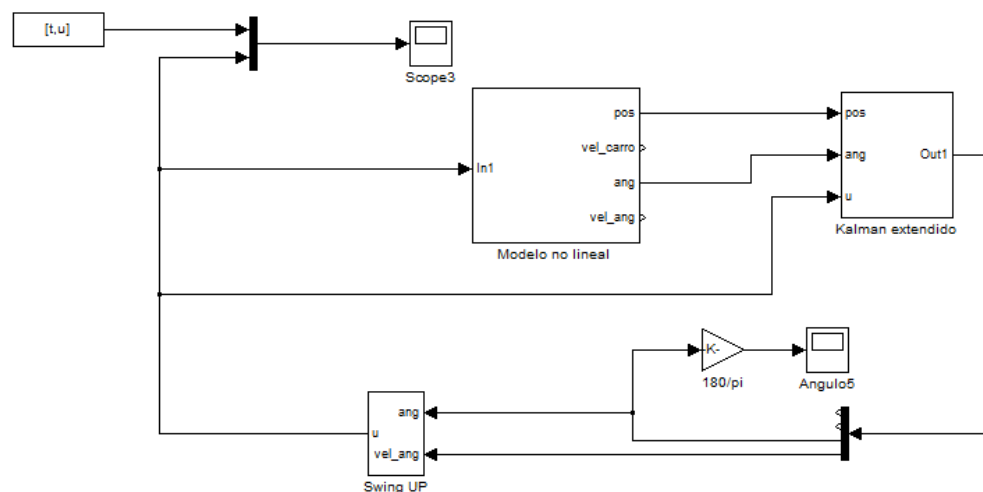
$$u = -kl * \text{signo}(\dot{\theta} * \cos(\theta)) * \left( (\cos(\theta) - 1) * m * g * l + \frac{m * g * l}{2 * C_2 * a} * \dot{\theta}^2 - E_o \right)$$

Donde la constante  $a$  es un parámetro de ajuste a determinar.

### 13.2 Simulación e implementación del algoritmo para el Swing up.

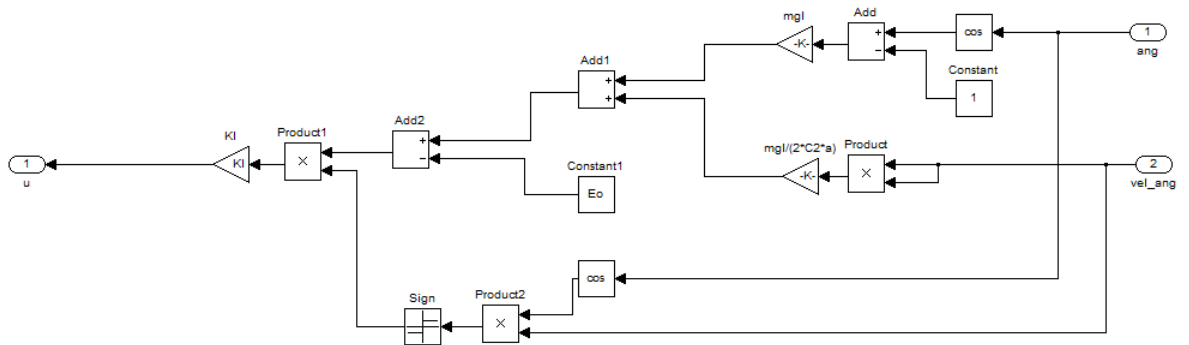
En una primera instancia, mediante un modelo de simulación desarrollado en Matlab Simulink, se procedió a determinar el valor correspondientes para  $kl$  y  $a$ .

En la siguiente imagen se muestra un esquema del diagrama de simulación empleado:



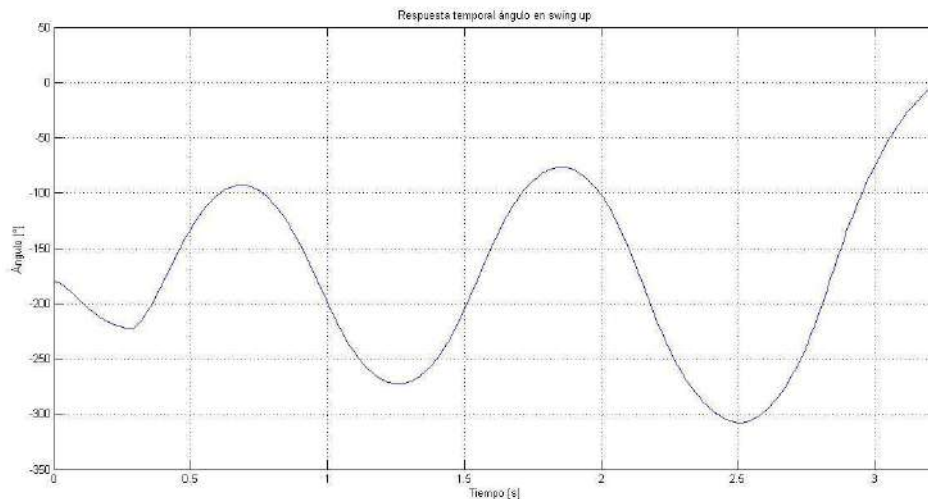
Esquema N° 7: Diagrama de simulación del Swing Up.

En donde dentro del sistema “modelo no lineal”, se encuentra el modelo representado en el *esquema N°2*, mientras que en el bloque “*Swing Up*” se encuentra implementado el algoritmo para la obtención de la acción de control requerida. Dicho bloque se muestra a continuación.



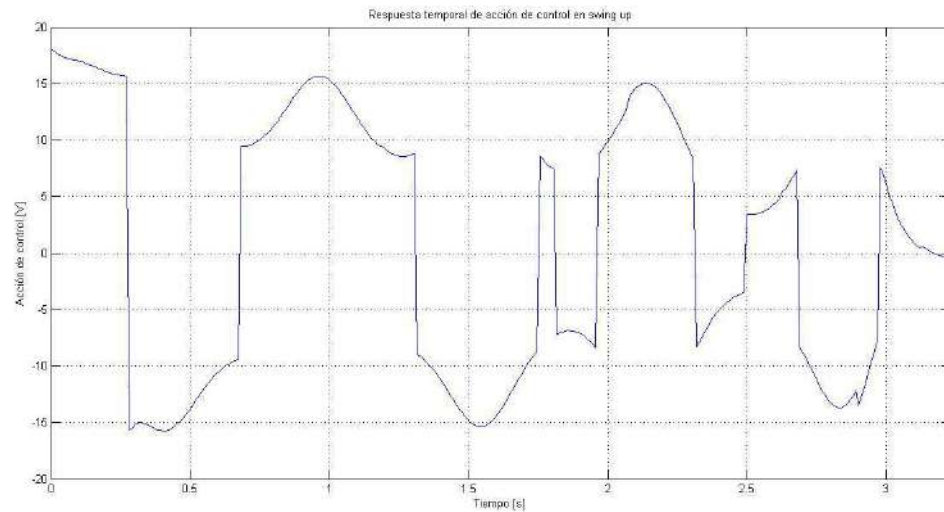
*Esquema N° 8: Bloque de simulación del Swing Up.*

A continuación, se muestran las gráficas de correspondientes a la respuesta temporal del ángulo del péndulo y la acción de control, obtenidas desde el modelo de simulación.



*Gráfico N° 49: Respuesta temporal del ángulo del péndulo obtenida de simulación de Swing Up.*





*Gráfico N° 50: Acción de control obtenida de simulación de Swing Up.*

## 14- Control del péndulo en semiplano superior.

### 14.1 Descripción en VE para control del péndulo en semiplano superior.

Para la realización del control, se consideró una realimentación de estado utilizando las mediciones y las estimaciones arrojadas por el filtro de Kalman para las variables a las cuales no se tiene acceso.

Teniendo en cuenta el sistema linealizado para la posición del péndulo en la posición superior, y utilizando las constantes de ajuste del modelo, se obtuvo la siguiente ecuación de estado discretizada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,0087 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7518 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0057 & 1,0019 & 1,0014 \\ 0 & -1,0969 & 0,3872 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,0248 \\ 0,0006 \\ 0,1094 \end{bmatrix} * u(k)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

## 14.2 Análisis de controlabilidad y observabilidad en semiplano superior.

Teniendo en cuenta la representación por variable de estados expuesta anteriormente, se procede a realizar un análisis sobre la controlabilidad y observabilidad de dicho sistema.

➤ *Matriz de controlabilidad:*

$$C = [\Gamma \quad \phi * \Gamma \quad \phi^2 * \Gamma \quad \phi^3 * \Gamma]$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0003 & 0,0005 & 0,0006 \\ 0,0248 & 0,0186 & 0,0140 & 0,0105 \\ 0,0006 & 0,0015 & 0,0022 & 0,0028 \\ 0,1094 & 0,0827 & 0,0629 & 0,0486 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que el rango de la matriz de controlabilidad resulta ser 4, con lo cual, el sistema es completamente controlable.

➤ *Matriz de observabilidad:*

$$O = \begin{bmatrix} H \\ H * \phi \\ H * \phi^2 \\ H * \phi^3 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0,0087 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0057 & 1,0019 & 0,01 \\ 1 & 0,0152 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0210 & 1,0077 & 0,02 \\ 1 & 0,0202 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0436 & 1,0175 & 0,0302 \end{bmatrix}$$

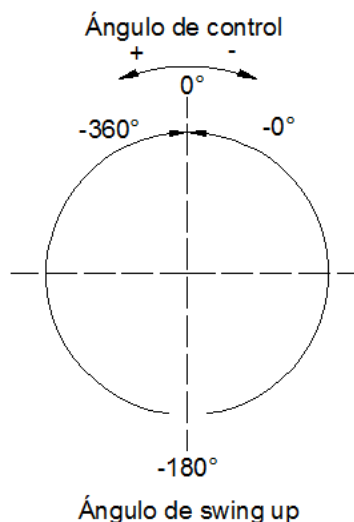
De donde se obtiene que el rango de la matriz de observabilidad resulta ser 4, con lo cual, el sistema es completamente observable.

### 14.3 Metodología de acople entre etapa de Swing up y control.

Para realizar el control del péndulo en la posición vertical superior, se implementó un programa en lenguaje C donde en una primera instancia se generó la acción de control requerida para lograr la elevación del péndulo desde la posición de reposo en el semiplano inferior. Cabe señalar que para obtener una elevación suave del péndulo, se consideró implementar una saturación sobre la acción de control generada comprendida entre  $\pm 7V$ , e imponiendo que la misma sea cero cuando la velocidad angular sea mayor en módulo a  $645 \text{ [}^\circ/\text{s]}$  y retomando el valor correspondiente al obtenido mediante la utilización de la ecuación de energía, cuando la velocidad angular es menor en módulo que  $620 \text{ [}^\circ/\text{s]}$ .

Una vez alcanzado un rango de  $\pm 5^\circ$  medido desde la vertical del semiplano superior, el programa acopla el control implementado.

Durante la etapa de elevación del péndulo (swing up), el mismo se encuentra oscilando en el rango de  $(-360^\circ, 0^\circ)$ , mientras que el control implementado para el plano superior actúa dentro de un rango de  $(-30^\circ, 30^\circ)$  dada la limitación en posición que presenta el carro. En la siguiente imagen se muestra el rango tanto del swing up como de la etapa de control.



*Figura N° 4: Rango de ángulos utilizados en las etapas del control.*

Teniendo en cuenta lo anterior, se observa que existe una discontinuidad en el ángulo medido cuando el péndulo asciende hasta la zona de control desde los  $-360^\circ$  y se acopla la ley de control, impidiendo el correcto funcionamiento del estimador. Para obviar lo anterior, se implementó un algoritmo en el cual, si la planta se encuentra en la etapa del “swing up” y el ángulo medido es menor a  $-340^\circ$ , se le suma a la medición  $+360^\circ$  al igual que a la estimación realizada por el filtro de Kalman, salvando de esta manera la discontinuidad mencionada. Por otro lado, si el ángulo de elevación no fue suficiente para alcanzar el rango de acople del control ( $+5^\circ$ ), cuando el ángulo medido sumado a los  $+360^\circ$ , supera los  $50^\circ$ , se retorna a considerar la medida angular original para el cálculo de las estimaciones. Este proceso se repite hasta que se inicie el bucle de control, cualquiera fuese el sentido de elevación ocurrido en dicho ensayo.

#### 14.4 Ley de control en semiplano superior.

El diseño del control se realizó mediante la ubicación de los polos de la ley de control en el plano  $S$ , de la siguiente manera:

$$P_{c_s} = [-2 + 0,5i \quad -2 - 0,5i \quad -10 \quad -10]$$

Llevando dichos polos al plano  $Z$  teniendo en cuenta un periodo de muestreo  $T=0,01s$ , los mismos resultan:

$$P_{c_z} = [0,9802 + 0,0049i \quad 0,9802 - 0,0049i \quad 0,9048 \quad 0,9048]$$

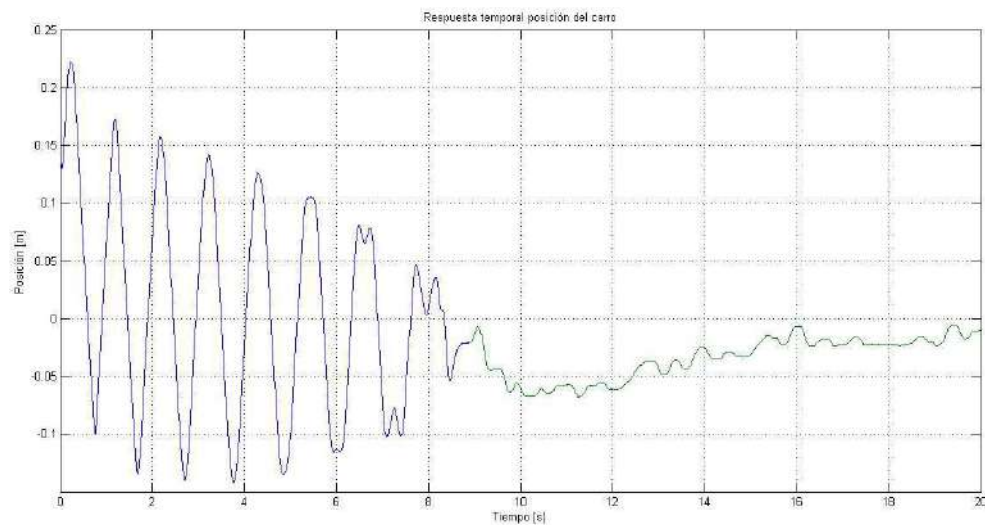
Obteniéndose las siguientes ganancias de realimentación:

$$K = [83,26 \quad 29,54 \quad -30,02 \quad 5,18]$$

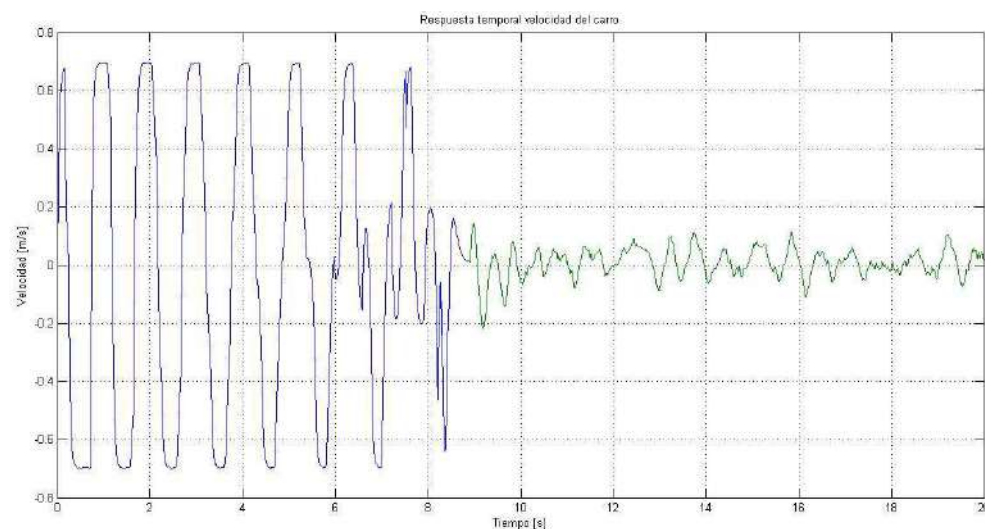
Cabe señalar que la ubicación de los polos para la ley de control se eligió observando en la simulación aquellos polos que presenten un mejor desempeño, obteniéndose una

respuesta rápida, pero atendiendo que la acción de control no supere el límite de saturación, el cual resulta ser de  $\pm 24$  V.

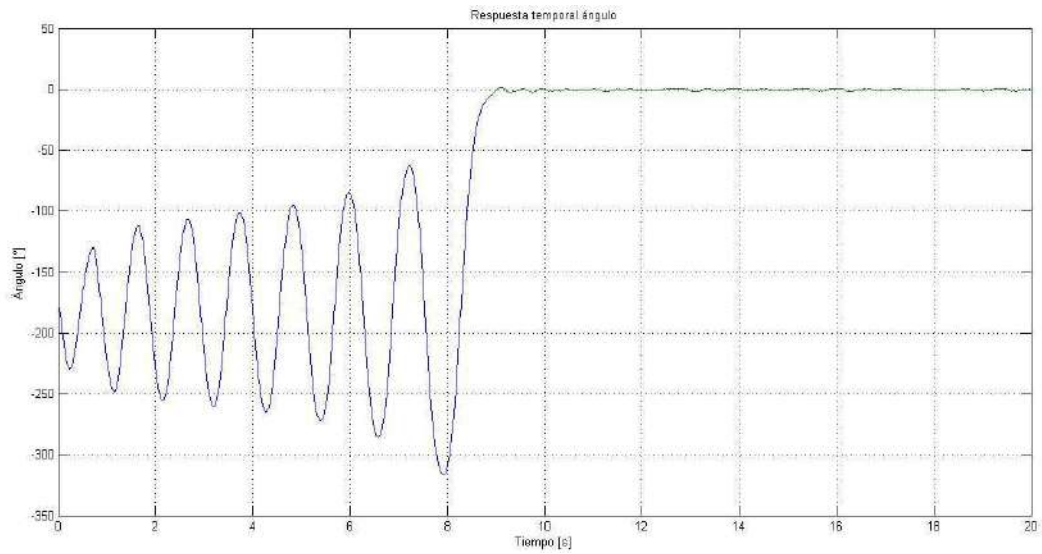
En las siguientes gráficas se muestran las respuestas temporales de las variables de estado utilizadas para realizar el control, como así también la acción de control generada al implementar en una primera instancia el algoritmo de Swing-Up, seguido del algoritmo de control.



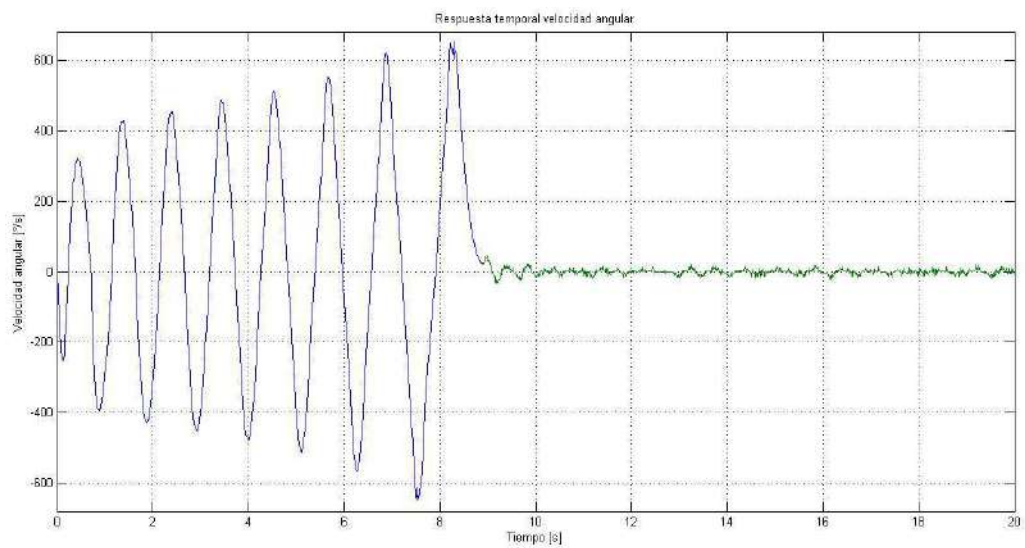
*Gráfico N° 51: Evolución temporal posición del carro medida durante el control en semiplano superior.*



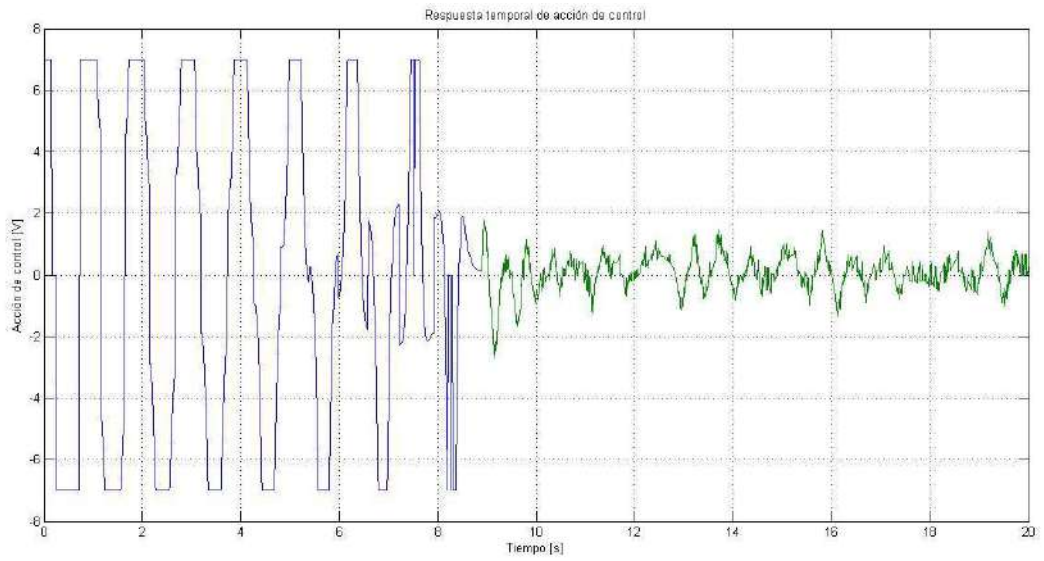
*Gráfico N° 52: Evolución temporal velocidad del péndulo estimada durante el control en semiplano superior.*



*Gráfico N° 53: Evolución temporal posición angular del péndulo medida durante el control en semiplano superior.*



*Gráfico N° 54: Evolución temporal velocidad angular del péndulo estimada durante el control en semiplano superior.*



*Gráfico N° 55: Acción de control aplicada al sistema.*

## 15- Conclusiones.

Atendiendo a los resultados obtenidos, se logró cumplir con el modelado, identificación y control del péndulo invertido. A pesar de las dificultades encontradas a lo largo del proyecto, se pudo lograr un modelo satisfactorio de la planta en estudio, teniendo en cuenta las alinealidades que presenta dicho sistema.

Cabe señalar que durante la etapa de control, surgieron algunos inconvenientes debido a la presencia de ruido en la lectura de los potenciómetros. Por consiguiente, se decidió realizar un filtrado digital de dichas señales como se expuso con anterioridad, lográndose resultados satisfactorios en la implementación del mismo.

Con respecto al control de posición del carro, se incorporó en el programa desarrollado tanto para el control en el semiplano superior como inferior, una acción integral en la posición, puesto que presentaba un error de aproximadamente 4 cm si sólo se utilizaba un control proporcional, debido a que no se compensó completamente el rozamiento. Para la elección de la constante de integración, mediante una serie de ensayos se observó el tiempo que demoraba el sistema en corregir 0,30 m en posición (longitud máxima desde uno de los extremos hasta la posición central sobre la guía). Con esta información orientativa, se realizó el ajuste de dicha constante.

Cabe señalar que para el control del péndulo en posición superior, se pudo observar el desempeño de varios controladores, colocando los polos de la ley de control en distintos lugares ajustando dicha ubicación teniendo en cuenta la tensión máxima que se le puede aplicar al motor de corriente continua, y la respuesta temporal obtenida. Para una ubicación de polos demasiados rápidos pero sin sobrepasar los límites de la acción de control, se observó una respuesta demasiado agresiva, provocando apreciables oscilaciones alrededor del punto de referencia. Mediante varios ensayos se logró obtener una ubicación de los polos satisfactoria.



Durante la experiencia se presentaron dificultades a la hora de realizar el control del péndulo invertido, realizando la elevación del mismo por medio del método de energía, dado que el rango de medición para las oscilaciones durante el ciclo de swing up resulta ser distinto al de control. Por otro lado, como se expuso en su momento, se debieron incorporar ciertas limitaciones sobre la acción de control a suministrarle a la planta durante la elevación del péndulo, y se tuvo que ajustar la ganancia de realimentación asociada con la velocidad angular de la barra, dado que dicha variable puede llegar a ser muy significativa a la hora de acoplar el control en el sistema.

## 16- Bibliografía.

- [1]. Balanceo y Estabilización del Péndulo Invertido Empleando Redes Neuronales Artificiales y un Regulador Lineal Óptimo con Criterio Cuadrático (LQR) - Oscar Giraldo, Juan Hernández, Didier Buitrago - Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia –Año: 2013.
- [2]. Manual de usuario PWM SERIE 25A.
- [3]. Manual de usuario de placa adquisidora PCI 1711U.
- [4]. Ingeniería de control moderna - Katsuhito Ogata – Tercera edición.
- [5]. Apuntes de cátedra Teoría de Control III.
- [6]. [https://es.wikipedia.org/wiki/Filtro\\_de\\_Kalman](https://es.wikipedia.org/wiki/Filtro_de_Kalman)