



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PAMPA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

TESINA PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO
ACADÉMICO DE LICENCIADO EN FÍSICA

**Índices q De Tsallis En Un Sistema De No
Equilibrio: La Capa De Ozono Estratosférico**

María Fernanda Reynoso Savio

Santa Rosa, La Pampa
República Argentina

2012

Esta Tesina es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Licenciado en Física, en la Universidad Nacional de La Pampa. Se llevó a cabo en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, durante el período comprendido entre julio de 2009 y Diciembre de 2011, bajo la dirección del Dr. Gustavo Luis Ferri. Es trabajo propio y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad ni en otra Institución Académica.

María Fernanda Reynoso Savio

Agradecimientos

Fueron muchas las personas que a través de su ayuda generosa, hicieron posible que hoy me encuentre concluyendo mi carrera. Con sinceridad y aprecio a todos ellos, muchísimas gracias:

- A mi Director de Tesis, Gustavo L. Ferri, por depositarme su confianza, por brindarme su asesoramiento, su incondicional disposición, su servicialidad, sus oportunas sugerencias y orientaciones a todo momento, y principalmente por sus palabras de aliento que fueron en mí un estímulo constante.
- A Angel Plastino, por su contribución a este trabajo.
- A todos los docentes que fueron participes en mi formación, por la generosidad con que atendieron mis requerimientos.
- A mis compañeros de cursada, que facilitaron e hicieron ameno este transitar por la carrera.
- A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UNLPam) por haberme dado esta posibilidad de estudiar, investigar y desarrollarme.
- A mi Profesor Carlos López, por inculcarme su amor por la Física.
- A mi familia, por la paciencia y el afecto con que acompañaron mi recorrido.

Resumen

La Mecánica Estadística de Boltzmann Gibbs (BG) trata con sistemas en equilibrio. Se basa en la hipótesis de sensibilidad exponencial a condiciones iniciales, “mixing” y ergodicidad en el espacio de fases de Gibbs. Muchos sistemas dinámicos, en estados estacionarios o en equilibrio metaestable fallan en cumplir con algunas de estas hipótesis, y la Mecánica Estadística no es aplicable a ellos. En 1989, Constantino Tsallis propone una generalización de la Entropía de BG para tratar estos sistemas cuya característica es la no extensividad. En 2004 introduce un conjunto de índices q que caracterizan a los sistemas no extensivos. Dan cuenta de la sensibilidad a condiciones iniciales, la relajación de cantidades macroscópicas hacia sus valores en los estados estacionarios y la distribución de la energía en el espacio de fases. Estos tres índices convergen a la unidad en el caso de sistemas en equilibrio. El apartamiento de la unidad de los índices q son una medida de la no extensividad del sistema.

En este trabajo estudiamos la serie temporal con los valores diarios del espesor de la capa de ozono estratosférico, sistema estacionario, pero no en equilibrio, y evaluamos los tres índices q . Hasta el momento de nuestro trabajo solamente ha sido reportado un caso de evaluación de estos índices en sistemas naturales. El nuestro fue el segundo, hasta donde sabemos.

Esta tesina está organizada como sigue: En el primer capítulo hacemos una revisión de los conceptos fundamentales de la Mecánica Estadística BG y de la generalización propuesta por Tsallis. En el segundo capítulo explicamos el significado de cada índice q . En el tercer capítulo detallamos el cálculo de los tres índices que caracterizan al

sistema del ozono estratosférico.

Los principales resultados de este trabajo han sido publicados en:

G.L. Ferri, **M.F. Reynoso Savio**, Ángel Plastino, “*Tsallis’q-triplet and the ozone layer*”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **389** (2010), pp. 1829-1833. Elsevier Science, B. V., Amsterdam. ISSN 0378-4371.
(doi:10.1016/j.physa.2009.12.020).

Índice general

Resumen	III
1. Mecánica Estadística y teoría de la información	1
1.1. Mecánica Estadística	1
1.2. La Entropía	4
1.3. Propiedades de la Entropía Estadística	6
1.4. Axiomas de Shannon y Khinchin	8
1.5. El Principio de Máxima Entropía de Jaynes	9
1.6. Mecánica Estadística no Extensiva y Entropía Generalizada	11
1.7. Axiomas Generalizados	15
2. Índices entrópicos	16
2.1. Triplete de Índices Entrópicos q	16
2.1.1. Índice Sensible a las Condiciones Iniciales, q_{sens}	16
2.1.2. Índice de Relajación, q_{rel}	17
2.1.3. Índice Estacionario, q_{stat}	18
2.2. Triplete de Índices q y Sistemas Dinámicos	19
3. Aplicación al estudio de la dinámica de una serie temporal	23
3.1. El Ozono Estratosférico	23
3.2. Los Datos	28
3.3. Resultados y Discusiones	30

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VI
3.3.1. Índice Estacionario, q_{stat}	30
3.3.2. Índice Sensible a las Condiciones Iniciales, q_{sens}	32
3.3.3. Índice de Relajación, q_{rel}	35
Conclusiones	36
Bibliografía	37

Capítulo 1

Mecánica Estadística y teoría de la información

1.1. Mecánica Estadística

La mecánica estadística tiene por objeto explicar el comportamiento macroscópico de los sistemas físicos usando las leyes de la física microscópica subyacentes, aún cuando los estados microscópicos tales como la posición y la velocidad de cada una de las partículas que lo componen sea desconocida.

Los fenómenos microscópicos están muy lejos de nuestra experiencia cotidiana, puesto que los sistemas que observamos a nuestra escala contienen un número enorme de partículas. Las propiedades colectivas de un sistema no tienen nada en común con las propiedades individuales de sus constituyentes. Si bien teóricamente es posible derivar las propiedades macroscópicas a partir de las propiedades individuales de cada partícula, esto se enfrenta a dificultades completamente insuperables. Por ejemplo, un centímetro cúbico de grafito puede ser considerado como una molécula que contiene 10^{22} átomos de carbono ligados entre ellos. Aunque, en principio, sus propiedades puedan ser descritas por la ecuación de Schrödinger de sus núcleos, sus electrones y la interacciones Coulombianas entre ellos, es imposible concebir la posibilidad de resolver

esa ecuación con tal número de variables. Es de destacar también que la mayoría de las propiedades de los sólidos, los líquidos, los gases, toda la Química, y hasta la Biología, virtualmente están contenidas en la simple ecuación de Schrödinger de núcleos y electrones y de sus interacciones Coulombianas. La diversidad del mundo que nos rodea es un indicador de la inutilidad, siquiera de pensar en la posibilidad de extender a las sustancias macroscópicas los métodos de la mecánica cuántica, aún cuando ésta ha sido extraordinariamente exitosa en el estudio de los átomos y pequeñas moléculas. El puente entre las dos escalas lo tiende la Física Estadística. Esencialmente teórica, está en contacto directo con otras ciencias, teóricas o experimentales que tratan con distintos materiales y diversas clases de propiedades: física de sólidos, de líquidos, de plasmas, materia condensada, sustancias amorfas, electromagnetismo en la materia, mecánica de medios continuos, termodinámica o físicoquímica.

La Mecánica Estadística trata con sistemas con muchos grados de libertad, tales como moléculas de gas en un recipiente o spins en una red. Un *microestado* del sistema es el estado detallado de todos sus componentes. Por ejemplo, las N coordenadas y N momentos de las partículas en un gas. El espacio de los posibles microestados es el *espacio de fases*. Para un gas monoatómico, el espacio de fases es $6N$ -dimensional. Un microestado del sistema completo corresponde a un único punto en ese espacio. La Mecánica Estadística supone la existencia de esos estados aunque sea completamente imposible conocer sus valores. La única información que tenemos sobre ellos, proviene de cantidades macroscópicas, que son propiedades globales, como la energía total, la temperatura, el volumen, la presión o la magnetización. Debido a nuestra ignorancia sobre los microestados es que debemos tratarlos en términos estadísticos. Pero el conocimiento de cantidades macroscópicas junto con las leyes físicas que rigen los microestados restringen la cantidad de microestados posibles. Una vez que se han fijado las variables macroscópicas, queda sólo un subconjunto de microestados que son compatibles con ellas, los *estados accesibles*.

El primero de los postulados fundamentales de la Mecánica Estadística es que, en equilibrio, un sistema aislado tiene igual prioridad a priori de estar en cualquiera de

sus estados accesibles. Para sistemas que no son cerrados, por ejemplo, porque están en contacto térmico con otro sistema, o su número de partículas no es constante, el conjunto de estados accesibles será distinto, y sus probabilidades deben ser calculadas. El segundo de los postulados fundamentales es el de *ergodicidad*. Esto significa que los promedios temporales se corresponden con promedios en *ensembles*, conjuntos de sistemas idénticos. Esto significa que uno puede hacer un promedio temporal siguiendo el movimiento determinista de todas las variables microscópicas de todas las partículas que componen el sistema. Por otro lado, en un instante dado de tiempo se puede tomar un promedio sobre todos los estados accesibles pesados por su probabilidad de ocurrencia. La hipótesis ergódica dice que estos dos promedios son lo mismo.

Partir de los componentes microscópicos para explicar propiedades macroscópicas hace que sea necesario el uso de ideas probabilísticas, aún cuando las leyes que gobiernan el mundo microscópico sean conocidas exactamente y cuando la teoría microscópica sea determinista. En consecuencia, las predicciones de la mecánica estadística son *probabilísticas por naturaleza* e involucran *promedios*. No obstante, como los sistemas bajo estudio son muy grandes, la “ley de grandes números”, tal como se prueba en teoría de probabilidades, conduce a predicciones precisas, cuyo cumplimiento es casi una certeza, y en esta circunstancia el sistema considerado es a todos los efectos, completamente determinista. Por ejemplo, en un fluido de N partículas que están aleatoriamente distribuidas en un volumen grande Ω , el número n de moléculas en un volumen v es una variable aleatoria. Su valor esperado es vN/Ω y su fluctuación estadística relativa es $1/\sqrt{\langle n \rangle}$. Para 1 mm^3 de gas, esta cantidad es igual a 0.6×10^{-8} , por lo tanto, podemos considerar n/v como una cantidad exactamente determinada, e igual a la densidad N/Ω ya que la fluctuación estadística es despreciable comparada al error experimental. Esta clase de argumentos es la que posibilita reconciliar la naturaleza estadística de la física microscópica con el determinismo macroscópico [1].

1.2. La Entropía

El concepto de entropía S fue introducido en 1865 por Clausius sin hacer referencia alguna al aspecto microscópico. No se consideraba, al momento, la existencia de átomos y moléculas. Es justamente la segunda ley de la termodinámica la que establece una conexión estrecha entre los puntos de vista estadístico y fenomenológico. La segunda ley es la que formula el hecho bien conocido de que todos los sistemas físicos aislados convergen hacia un estado de equilibrio donde las cantidades de estado ya no cambian más después de un cierto tiempo de relajación, y afirma que este proceso es irreversible. Un ejemplo de esto es el de un gas al que espontáneamente se le permite ocupar un volumen más grande al que llenará homogéneamente después de un cierto período de tiempo. La concentración espontánea de todas las moléculas del gas en un rincón del volumen nunca ha sido observada aunque esto no contradiga la ley de conservación de la energía. La entropía es la variable de estado que caracteriza unívocamente esta tendencia. Los procesos que ocurren espontáneamente y conducen a un estado de equilibrio están vinculados a un aumento en la entropía. En el equilibrio, la entropía alcanza su máximo valor y no cambia más. Ludwig Boltzmann fue el primero en mostrar, en su famoso teorema H que esta tendencia se puede fundamentar en una descripción estadística. Para un sistema en el cual el número de microestados compatibles con su estado es W , la entropía debe ser $S \sim \ln W$. Esta es la relación fundamental entre la Termodinámica y la Mecánica Estadística. El estado de equilibrio es el estado con mayor cantidad de posibilidades macroscópicas de realizar ese estado [2].

Dado un sistema físico, sea W el número de eventos compatibles con las propiedades macroscópicas del sistema en estudio y p_i la probabilidad de que el sistema esté en el i -ésimo microestado, entonces la entropía se define como:

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (1.1)$$

donde el subíndice BG indica “Boltzmann-Gibbs” y k es una constante arbitraria.

En termodinámica, la constante de Boltzmann ($k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$). La condición de normalización viene dada por:

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1, \quad (1.2)$$

En la equiprobabilidad, $p_1 = p_2 = \dots = \frac{1}{W}$

$$S = k \ln W. \quad (1.3)$$

La entropía de Boltzmann-Gibbs trascendió su origen en mecánica estadística. Se puede usar para describir cualquier sistema con estados $\{\phi_i\}$ con una distribución de probabilidad $\{p_i\}$. Medio siglo después de los trabajos de Gibbs y Boltzmann, la expresión para la entropía fue introducida por Shannon [3] en el ámbito de la teoría de la comunicación. Su objetivo fue intentar cuantificar la cantidad de información contenida en un mensaje. Esto permite contar la cantidad de información faltante cuando el conocimiento del sistema es probabilístico y sólo se conoce la distribución de probabilidades. Esta cantidad de información faltante se identifica con el grado de desorden de un sistema preparado aleatoriamente. Cada mensaje m puede ser transmitido desde un emisor a un receptor como un evento de probabilidad p_m . Las probabilidades dependen del lenguaje utilizado, es decir, del conjunto de mensajes posibles. Por ejemplo, si en un país de habla hispana un señor inglés entra a un bar y siempre llama al mozo y le pide *beer*, en su día de franco, ese mozo podría decirle a su reemplazante que si viene el inglés y pide *beer* le sirva cerveza [4]. El único mensaje es *beer*, por lo que el reemplazante no necesita mucha información (ni saber inglés) para reconocerlo. Si en caso contrario, el cliente pidiera siempre cosas distintas, el mozo tendría que enseñarle inglés a su reemplazante, es decir, debería darle la cantidad de información necesaria para reconocer todas las cosas que se pueden pedir en ese idioma.

La información puede percibirse como el grado de libertad para elegir los mensajes, símbolos, señales, configuraciones. En el ejemplo anterior, se observa que la información de un mensaje depende del número de mensajes que se podrían haber recibido

(del número de opciones diferentes, en el caso que el inglés las tuviera). Expresado de otro modo, la información se necesita para elegir, para reconocer ese mensaje entre todos los posibles. Vale aclarar que *mensaje* no se refiere sólo a un mensaje oral o escrito, se aplica a cualquier cosa que pueda ser reconocida por su estructura como, por ejemplo, la posición de las agujas del reloj, un gusto particular, una melodía. En este contexto, la expresión 1.1 puede considerarse como la información ganada en promedio al recibir uno de los posibles mensajes.

1.3. Propiedades de la Entropía Estadística

La expresión para la entropía estadística dada por la ecuación 1.1, presenta propiedades que permiten su tratamiento como una medida de incerteza o falta de información.

Sea W un número de eventos microscópicos con probabilidades asociadas p_i , tal que $\sum_{i=1}^W p_i = 1$, entonces la entropía S satisface las siguientes condiciones:

- S es una función continua de $\{p_i\}$ con $0 < p_i < 1; i = 1, \dots, W$. Para un número fijo W de eventos equiprobables, la S alcanza un máximo igual a:

$$S\left(\frac{1}{W}, \dots, \frac{1}{W}\right) = k \log W \quad (1.4)$$

En este caso se conoce poco sobre el sistema. La proximidad entre dos eventos p_l y p_m determinan un aumento en la entropía. Por otro lado, la entropía alcanza un mínimo igual a 0 cuando uno de los eventos es una incerteza

$$S(1, 0, \dots, 0) = 0 \quad (1.5)$$

- Para W eventos equiprobables con $p_i = \frac{1}{W}$, la $S = k \log W$ es monótonamente creciente de W . Cuanto mayor sea el número de eventos, mayor será la falta de información.

- Si un cierto evento tiene probabilidad 0, no influye en el cálculo de la entropía:

$$S(p_1, \dots, p_W, 0) = S(p_1, \dots, p_W) \quad (1.6)$$

- La entropía es una función simétrica de sus w argumentos:

$$S(p_1, \dots, p_i, p_j, \dots, p_W) = S(p_1, \dots, p_j, p_i, \dots, p_W) \quad (1.7)$$

- Sean L y M dos subconjuntos con W_L y W_M configuraciones respectivamente tal que

$$W = W_L + W_M \quad (1.8)$$

y sean $\{p_1, \dots, p_{W_L}\}$ y $\{p_1, \dots, p_{W_M}\}$ los conjuntos de probabilidades correspondiente; definiendo

$$p_L = \sum_{i=1}^{W_L} p_i \quad (1.9)$$

y

$$p_M = \sum_{i=W_L+1}^{W_M} p_i \quad (1.10)$$

Entonces se verifica que

$$S(p_1, \dots, p_{W_L}, p_{W_L+1}, \dots, p_W) = S(p_L, p_M) + p_L S\left(\frac{p_1}{p_L}, \dots, \frac{p_{W_L}}{p_L}\right) + p_M S\left(\frac{p_{W_L+1}}{p_L}, \dots, \frac{p_{W_M}}{p_L}\right) \quad (1.11)$$

Esta ecuación expresa que la información adquirida en dos etapas debe sumarse. El primer término cuantifica la incerteza de no saber si el evento será parte del grupo L o del M . El segundo término determina que si el evento pertenece al subconjunto L , se desconoce cuál es de los W_L eventos posibles. La cantidad $S\left(\frac{p_1}{p_L}, \dots, \frac{p_{W_L}}{p_L}\right)$ es la falta de información *condicional*, dado que ha ocurrido L , y p_L es la probabilidad para el subconjunto L . En forma equivalente, el tercer y último término indica la falta de conocimiento de cuál es, de los $W_L + 1, \dots, W$ eventos posibles, dado que el evento pertenece al subconjunto M . Tiene un peso p_M y $S\left(\frac{p_{W_L+1}}{p_L}, \dots, \frac{p_{W_M}}{p_L}\right)$ es la falta de información condicional. Esta propiedad determina la misma ganancia de información recibiendo un mensaje de los W posibles o realizando la observación en dos etapas.

- Sean $M.N$ eventos equiprobables con $1 \leq n \leq M$ y $1 \leq m \leq N$. Si ocurre uno de los eventos (n, m) se gana la misma cantidad de información que si se encuentran en forma sucesiva

$$S_{MN} = S_N + S_M \quad (1.12)$$

- La entropía es una función cóncava de las probabilidades. Sean p_1, \dots, p_W y p'_1, \dots, p'_W leyes de probabilidades asociadas con los mismos eventos. Si λ es un número tal que $0 < \lambda < 1$, se puede construir una nueva ley de probabilidades

$$[p''_1 = \lambda p_1 + (1 - \lambda p'_1)]; \dots; [p''_W = \lambda p_W + (1 - \lambda p'_W)] \quad (1.13)$$

La concavidad se expresa por

$$S(p''_1, \dots, p''_W) > \lambda S(p_1, \dots, p_W) + (1 - \lambda)S(p'_1, \dots, p'_W) \quad (1.14)$$

Da una medida cuantitativa del desorden y de su incremento. De esta propiedad se deduce la irreversibilidad.

1.4. Axiomas de Shannon y Khinchin

Shannon y Khinchin, a mediados del siglo XX, desarrollaron sus propios argumentos para la implementación de la expresión para la entropía dada por la ecuación 1.1. Instituyeron, mediante dos teoremas, las condiciones necesarias para aceptar el concepto de entropía como una medida adecuada de información [5, 6].

Teorema de Shannon

1. $S(p_1, \dots, p_W)$ es una función continua con respecto a todos sus argumentos;
2. $S(p_1 = p_2 = \dots = p_W = \frac{1}{W})$ es monótonamente creciente con W ;
3. $S(A + B) = S(A) + S(B)$ si $p_{ij}^{A+B} = p_i^A \cdot p_j^B$, siendo A y B dos subsistemas independientes con distribuciones de probabilidades p_i^A y p_j^B respectivamente;

$$4. S(p_1, \dots, p_W) = S(p_L, p_M) + p_L \cdot S\left(\frac{p_1}{p_L}, \dots, \frac{p_{W_L}}{p_L}\right) + p_M \cdot S\left(\frac{p_{W_L+1}}{p_M}, \dots, \frac{p_W}{p_M}\right) \text{ donde } W = W_L + W_M; p_L = \sum_{i=1}^{W_L} p_i; p_M = \sum_{i=W_L+1}^W p_i \text{ (con } p_L + p_M = 1);$$

si y sólo si $S(p_1, \dots, p_W)$ está dada por la ecuación 1.1.

Teorema de Khinchin

1. $S(p_1, \dots, p_W)$ es una función continua con respecto a todos sus argumentos;
2. $S(p_1 = p_2 = \dots = p_W = \frac{1}{W})$ es monótonamente creciente con W ;
3. $S(p_1, \dots, p_W, 0) = S(p_1, \dots, p_W)$;
4. $S(A + B) = S(A) + S(B/A)$ siendo $S(B/A)$ la entropía condicional;

si y sólo si $S(p_1, \dots, p_W)$ está dada por la ecuación 1.1.

1.5. El Principio de Máxima Entropía de Jaynes

Existen dos postulados equivalentes que pueden utilizarse para derivar una distribución de equilibrio en Mecánica Estadística [7]. En el primero, el equilibrio se corresponde con un mínimo en la energía. El segundo, responde a un máximo en la entropía. El principio de máxima entropía fue introducido por Jaynes en la década del '50. Mientras que la teoría de la información otorga una cuantificación de la incerteza que se tiene ante un hecho probabilístico, Jaynes propone cómo construir una distribución de probabilidades lo más insesgada posible y compatible con la escasa información con la que se cuenta. Establece que bajo el supuesto de equilibrio, la expresión 1.1 para la entropía, es única. Además, cualquier problema de equilibrio se reduce a encontrar un conjunto de probabilidades p_i tal que la entropía sea máxima bajo un conjunto de restricciones que especifican las condiciones macroscópicas provenientes de la teoría o de los datos observados.

El formalismo de máxima entropía alcanza validez más allá de la mecánica estadística. Se utiliza por ejemplo, en la estadística inferencial para optimizar la transferencia de datos y en áreas como la química y la biología.

Sea Σ un sistema con $i = 1, \dots, W$ estados microscópicos, y A un observable con valores A_i cuando el sistema se encuentra en el microestado i . La distribución de probabilidades $\{p_i\}$ se desconoce y sólo se cuenta con el dato experimental correspondiente al valor medio de A

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^W p_i A_i \quad (1.15)$$

Suponiendo conocidos los valores medios de varias cantidades $A^{(r)}$, la información sobre Σ se limita a un conjunto de valores medios

$$\langle A^{(r)} \rangle = \sum_{i=1}^W p_i A_i^{(r)}; r = 1, \dots, M \quad (1.16)$$

Siendo generalmente $M < W$ existen muchas distribuciones $\{p_i\}$ compatibles con la información 1.16. Se debe optar por aquella que maximiza la entropía estadística.

Se procede a extremizar la entropía por el método de Lagrange bajo las condiciones de restricción 1.16 y de normalización 1.2. Se introducen tantos multiplicadores de Lagrange como cantidad de ligaduras, en esta situación $(M + 1)$: λ_0 (multiplicador que garantiza la normalización) y $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ (asociados a restricciones 1.16),

$$\delta_{\{p_i\}} \left[- \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i - \lambda_0 \left\{ \sum_{i=1}^W p_i - 1 \right\} - \sum_{r=1}^M \lambda_{(r)} \left\{ \sum_{i=1}^W p_i A_i^{(r)} \right\} - \langle A^{(r)} \rangle \right] \quad (1.17)$$

Resolviendo analíticamente

$$p_i = e^{-(1-\lambda_0) - \sum_{r=1}^M \lambda_{(r)} A_i^{(r)}} \quad (1.18)$$

Reemplazando en la condición de normalización 1.2

$$\lambda_0 + 1 = \ln \sum_{i=1}^W e^{-\sum_{r=1}^M \lambda_{(r)} A_i^{(r)}} = \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_M) \quad (1.19)$$

Donde Z es la función de partición

$$Z(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \sum_{i=1}^W e^{-\sum_{r=1}^M \lambda_{(r)} A_i^{(r)}} \quad (1.20)$$

La distribución de probabilidad queda

$$p_i = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^W e^{-\sum_{r=1}^M \lambda_{(r)} A_i^{(r)}} \quad (1.21)$$

Reemplazando 1.18 y 1.19 en 1.16 se obtienen las M ecuaciones acopladas para la determinación de los multiplicadores de Lagrange

$$\frac{\partial \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_M)}{\partial \lambda_r} = -\langle A^{(r)} \rangle \quad (1.22)$$

con $r = 1, \dots, M$. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la distribución de probabilidades que hace máxima la entropía. La entropía puede expresarse como

$$S = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i = \sum_{r=0}^M \lambda_{(r)} \langle A^{(r)} \rangle \quad (1.23)$$

Por 1.19, λ_0 y S se relacionan por una transformación de Legendre

$$1 + \lambda_0 \equiv \ln Z = S - \sum_{r=1}^M \lambda_{(r)} \langle A^{(r)} \rangle \quad (1.24)$$

Estableciendo que si Z es función de los multiplicadores de Lagrange, S debe ser función de los valores medios.

Con este análisis, Jaynes demostró que la mecánica estadística puede reformularse de una manera más elegante utilizando el principio de Máxima Entropía y haciendo a un lado la idea de ensamble.

1.6. Mecánica Estadística no Extensiva y Entropía Generalizada

La mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs es uno de los pilares de la física contemporánea. Como se ha dicho, establece el puente entre las leyes de la mecánica microscópica y la termodinámica clásica. Esta conexión la hace a través de la entropía (1.1). Sin embargo, la teoría de Boltzmann-Gibbs no es universal. Tiene un dominio de aplicabilidad delimitado. Fuera de ese dominio, sus predicciones pueden

ser levemente, o aún fuertemente inadecuadas, lo cual no debe ser una sorpresa. La teoría aborda el estudio de un estado estacionario muy especial, el *equilibrio térmico*. Este estado tiene propiedades destacadas y es de fundamental importancia. El fundamento profundo del estado de equilibrio térmico y de la hipótesis del caos molecular, de Boltzman, del año 1871, yace en la dinámica no lineal, más específicamente en el caos fuerte, y por lo tanto en la ergodicidad. Sin embargo, muchos importantes fenómenos en sistemas naturales, artificiales, y aún sociales no se encuadran dentro de esta hipótesis simplificante. Esto es particularmente frecuente, tanto en la Física como también en Biología y Economía cuando los estados estacionarios de no equilibrio son la regla. Entonces, a nivel microscópico el caos fuerte es reemplazado por su versión débil, cuando la sensibilidad a las condiciones iniciales no crece exponencialmente con el tiempo sino más bien como una ley de potencia. La cuestión que surge naturalmente es la siguiente: *¿es posible abordar algunos de estos importantes -aunque anómalos en el sentido BG- sistemas con conceptos y métodos similares a los de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs?* Actualmente existen muchos indicadores tanto teóricos como experimentales u observacionales que apuntan hacia una respuesta afirmativa. La teoría que aparece jugando ese rol es la *Mecánica Estadística No Extensiva* y su desarrollo subsecuente. Este enfoque fue propuesto por primera vez por Constantino Tsallis en 1988 [8] y está basado en la generalización de la entropía de Boltzmann-Gibbs, mediante la expresión:

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad (1.25)$$

donde el índice $q \in \Re$ y $S_1 = S_{BG}$. La teoría de Boltzmann-Gibbs queda contenida como caso particular cuando $q = 1$.

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = S_1 = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i) \quad (1.26)$$

Esta generalización, junto con la termoestadística aplicada, ha sido útil para abordar escenarios de no equilibrio como el estudio de la radiación cósmica de fondo del univer-

so [9,10], la intensidad del campo helio magnético distante [11,12], El Niño Southern Oscillation [13], la Hydra viridissima [14], el electroencefalograma durante una crisis epiléptica [15,16], las finanzas [17], la turbulencia defectuosa [18], los sistemas Hamiltonianos de largo rango [19], las redes asintóticamente libres de escala [20–26]. La entropía generalizada introducida por Tsallis, viene dada por la expresión:

$$S_q = k \frac{(1 - \sum_{i=1}^W p_i^q)}{(q - 1)} \quad (1.27)$$

donde W se corresponde con los microestados de un sistema y $\{p_i\}$ es la distribución de probabilidades correspondiente, donde $\sum_{i=1}^W p_i = 1$. k es una constante positiva (la constante de Boltzmann) y q es un número real [6].

El comportamiento entrópico depende del valor que asume q :

- Si $q < 0$ y $p_i = 0$ para algún $i = 1, \dots, W$, la entropía diverge.
- Si $q > 0$, se dice que la entropía es expansible; esto es $S(p_1, \dots, p_w, 0) = S(p_1, \dots, p_w)$ para todo $q > 0$.
- Si $q \rightarrow 1$, la $S_q \rightarrow S_{BG}$ como

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i = S_{BG} \quad (1.28)$$

La versión mecánico cuántica de la ecuación 1.27 es

$$S_q = k \frac{(1 - \text{Tr} \rho^q)}{(q - 1)} \quad (1.29)$$

donde ρ es el operador densidad.

La entropía no extensiva, según Tsallis en [27]:

- Verifica ($\forall q > 0$) tres propiedades matemáticas que no necesariamente satisfacen en forma trivial otras expresiones entrópicas. De [5] son:

1. Concavidad: Sean $\{p_i\}$ y $\{p'_i\}$ dos distribuciones de probabilidades para un sistema dado ($i = 1, \dots, W$), se define la suma de ambas distribuciones como:

$$p''_i \equiv \mu p_i + (1 - \mu)p'_i \quad (1.30)$$

$S(\{p''_i\})$ se dice cóncava si $\forall \mu$, y $\forall \{p_i\}$ y $\{p'_i\}$, $S(\{p''_i\}) \geq \mu S(\{p_i\}) + (1 - \mu)S(\{p'_i\})$

2. Estabilidad: Una función $S(\{p_i\})$ es estable si y sólo si, para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists \delta \varepsilon > 0$ tal que independientemente de W

$$\sum_{i=1}^W |p_i - p'_i| \leq \delta \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{S(\{p_i\}) - S\{p'_i\}}{S_{max}} \right| < \varepsilon \quad (1.31)$$

Esto implica que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{W \rightarrow 0} \left| \frac{S(\{p_i\}) - S\{p'_i\}}{S_{max}} \right| = \lim_{W \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{S(\{p_i\}) - S\{p'_i\}}{S_{max}} \right| = 0 \quad (1.32)$$

Expresado de otro modo, ante variaciones arbitrariamente pequeñas de las probabilidades, la variación de entropía permanece pequeña.

3. Producción finita de entropía por unidad de tiempo: Como explica Ferri [6], ante la existencia de caos en el espacio de fases, si se efectúa un promedio sobre la evolución de muchas condiciones iniciales distintas, la entropía tiene una producción finita, independientemente de si la ocupación del espacio de fases es uniforme o no.

- Alcanza una distribución estacionaria (la función q -exponencial es asintóticamente una ley de potencia), que es encontrada en sistemas naturales y artificiales.
- Está completamente determinada una vez hallado su índice entrópico q .

De aquí, la ecuación 1.27 es una expresión fuerte para la generalización a sistemas que no cumplen con los requisitos usuales de ergodicidad.

1.7. Axiomas Generalizados

Con el desarrollo de la mecánica estadística no extensiva surgen generalizaciones a los teoremas de Shannon y Khinchin. Estas fueron realizadas por Santos y Abe en 1997 y 2000, respectivamente [6].

Teorema de Santos

1. $S(p_1, \dots, p_W)$ es una función continua con respecto a todos sus argumentos,
2. $S(p_1 = p_2 = \dots = p_W = 1/W)$ es monótonamente creciente con W ,
3. $\frac{S(A+B)}{k} = \frac{S(A)}{k} + \frac{S(B)}{k} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}$ si $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$,
4. $S(p_1, \dots, p_W) = S(p_L, p_M) + p_L^q S(\frac{p_1}{p_L}, \dots, \frac{p_{W_L}}{p_L}) + p_M^q S(\frac{p_{W_L+1}}{p_L}, \dots, \frac{p_W}{p_L})$, donde $W = W_L + W_M$; $p_L = \sum_{i=1}^{W_L} p_i$; $p_M = \sum_{i=W_L+1}^W p_i$, (con $p_L + p_M = 1$),

si y sólo si $S(p_1, \dots, p_W)$ está dada por la ecuación 1.27.

Teorema de Abe

1. $S(p_1, \dots, p_W)$ es una función continua con respecto a todos sus argumentos,
2. $S(p_1 = p_2 = \dots = p_W = 1/W)$ es monótonamente creciente con W ,
3. $S(p_1, \dots, p_W, 0) = S(p_1, \dots, p_W)$,
4. $\frac{S(A+B)}{k} = \frac{S(A)}{k} + \frac{S(B/A)}{k} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B/A)}{k}$ siendo $S(B/A)$ la entropía condicional,

si y sólo si $S(p_1, \dots, p_W)$ está dada por la ecuación 1.27.

Estos teoremas permiten demostrar que la entropía de Tsallis es la única que extiende la estadística de Boltzmann-Gibbs para $q \neq 1$, manteniendo las propiedades básicas.

Capítulo 2

Índices entrópicos

2.1. Triplete de Índices Entrópicos q

La carencia de conocimiento sobre cómo la entropía de Boltzmann Gibbs descende de la dinámica o de qué modo debe satisfacer las premisas restrictivas de la dinámica microscópica, no impiden a Tsallis asegurar que se trata de la forma entrópica natural [28]. Permite su aplicación a dinámicas no integrales y lo suficientemente caóticas (exponentes de Lyapunov positivos). Sin embargo, existen situaciones en las que los exponentes de Lyapunov se desvanecen o se hacen nulos. Aquí adquiere su rol la mecánica estadística no extensiva. La entropía q es una entropía física adecuada y presenta un acercamiento con la termodinámica.

2.1.1. Índice Sensible a las Condiciones Iniciales, q_{sens}

Se considera un sistema dinámico no lineal unidimensional, caracterizado por $x(t)$. La sensibilidad a las condiciones iniciales se define como

$$\xi \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)} \quad (2.1)$$

donde $\Delta x(t) \equiv x(t) - x'(t)$ es la diferencia entre dos trayectorias inicialmente próximas.

Diferenciando, queda

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi \quad (2.2)$$

donde λ_1 es el exponente de Lyapunov. Por lo tanto, su solución viene dada por

$$\xi(t) = e^{\lambda_1 t} \quad (2.3)$$

Fácilmente se observa que $\ln \xi \propto t$. Sin embargo, esto únicamente se alcanza si $\lambda_1 \neq 0$.

En caso contrario (donde existe mezcla) se generaliza la ecuación 2.2 a

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_{q_{sen}} \xi^{q_{sen}} \quad (2.4)$$

donde *sen* proviene de sensibilidad.

Así la solución viene dada por

$$\xi(t) = e^{\lambda_{q_{sen}} t} \quad (2.5)$$

por lo tanto $\ln_{q_{sen}} \xi \propto t$.

Y

$$e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{(1-q)}} \quad (2.6)$$

donde $e_1^x = e^x$ y

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{(1-q)} - 1}{(1 - q)} \quad (2.7)$$

donde $\ln_q x = \ln x$.

$e_q^x \in \mathfrak{R}$, > 0 , para $q < 1$, se desvanece $\forall x$ tal que $[1 + (1 - q)x] \leq 0$.

De este modo, si $\lambda_1 = 0$ se espera que $q_{sen} < 1$ y $\lambda_{q_{sen}} > 0$. Aquí existe una mezcla en todo el espacio. Si en cambio no hay mezcla $q_{sen} > 1$ y $\lambda_{q_{sen}} < 0$.

Estudios particulares, [29], [30], analizan el comportamiento del Mapa Logístico, donde $q_{sen} = 0,2445\dots$ y $\lambda_{q_{sen}} = 1,3232\dots$

2.1.2. Índice de Relajación, q_{rel}

De igual modo que en los casos anteriores, se define una cantidad Ω dada por

$$\Omega(t) = \frac{\Theta(t) - \Theta(\infty)}{\Theta(0)\Theta(\infty)} \quad (2.8)$$

Siendo Θ un observable macroscópico relajándose a su valor de estado estacionario. Se asocia una ecuación diferencial

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{\tau_1}\Omega \quad (2.9)$$

con $\tau_1 > 0$ correspondiente al tiempo de relajación. Se halla la solución

$$\Omega(t) = e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (2.10)$$

Se espera que $1/\tau_1 \approx \lambda_1$ si $\lambda_1 > 0$. El ritmo de relajación viene establecido por el espectro de exponentes de Lyapunov. Particularmente si λ_1 se desvanece, τ_1 diverge. Por lo tanto se generaliza la expresión de Ω a

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{\tau_{qrel}}\Omega^{qrel} \quad (2.11)$$

donde el subíndice *rel* significa relajación.

Esto da lugar a la solución

$$\Omega(t) = e^{-\frac{t}{\tau_{qrel}}} \quad (2.12)$$

con $\tau_{qrel} > 0$.

Este parámetro esencialmente caracteriza la velocidad a la cual la dinámica no lineal hace que el sistema se aproxime a su estado estable estacionario, dando la clase de condiciones iniciales entre las cuales el sistema ha sido iniciado. Más específicamente, cuando $\lambda_1 = 0$ se espera que hipótesis como la ergodicidad en todo el espacio, no se cumpla. Se espera que el sistema posea una tendencia a vivir en una clase de atractor o pseudo atractor, como el caso de multifractales.

Retomando el ejemplo del Mapa Logístico, al límite del caos, el q de relajación toma el valor de aproximadamente 2,4 [31,32].

2.1.3. Índice Estacionario, q_{stat}

Se considera un sistema Hamiltoniano cuyos elementos solo interactúan localmente. Por ejemplo, un potencial atractivo entre dos cuerpos sin singularidad en el origen, y

que decae asintóticamente con la distancia r como $1/r^\alpha$ con $\alpha/d > 1$, donde d es la dimensión espacial del sistema. El estado estacionario en el equilibrio térmico viene dado por:

$$p_i = \frac{e^{-\beta_1 E_i}}{Z_1} \quad (2.13)$$

donde $\beta_1 = 1/(kT)$, $Z_1 = \sum_j e^{-\beta_1 E_j}$ y $\{E_i\}$ los eigenvalores del Hamiltoniano con condiciones de ligaduras especificadas.

Diferenciando

$$\frac{d(p_i)}{dE_i} = -\beta_1 (p_i Z_1) \quad (2.14)$$

Evidentemente, la condición de estado estacionario sigue una ley de potencia.

Generalizando para situaciones donde los elementos del sistema Hamiltoniano no interactúan localmente, pero sí globalmente, la expresión 2.14 se vuelve:

$$\frac{d(p_i Z_{q_{stat}})}{dE_i} = -\beta_1 (p_i Z_{q_{stat}})^{q_{stat}} \quad (2.15)$$

donde *stat* indica estacionario.

La solución queda

$$p_i = e^{-\beta_{q_{stat}} E_i} \quad (2.16)$$

siendo $\beta_{q_{stat}} = 1/(kT_{q_{stat}})$; $Z_{q_{stat}} = \sum_j e^{-\beta_{q_{stat}} E_j}$

donde se espera que $q_{stat} > 1$.

2.2. Triplete de Índices q y Sistemas Dinámicos

Los índices q y sus posibles interacciones están representados en la Figura 2.1. Son diferentes aspectos de un mismo fenómeno básico, que es cómo los sistemas prefieren evolucionar y mezclarse en parte o en todo el espacio de fases, dado sus condiciones iniciales.

Si el sistema es fuertemente caótico (Exponentes de Lyapunov positivos), que satisface la *hipótesis de caos molecular* de Boltzman, entonces el sistema será *mixing* y ergódico. En este caso, la mecánica estadística de BG describe apropiadamente al sistema.



Figura 2.1: Relación entre los índices entrópicos q

La expresión microscópica de la entropía será, sin duda, S_{BG} . Pero si el sistema es sólo debilmente caótico (Exponentes de Lyapunov nulos), entonces la ocupación del espacio de fases es más compleja (puede ser multifractal).

Mientras el sistema permanece en esta región la termoestadística puede describirse adecuadamente con la mecánica estadística no extensiva. Y la expresión microscópica para la entropía puede ser S_q .

Durante el estado metaestable o quasiestacionario tendríamos

$$(q_{sens} \ q_{rel} \ q_{stat}) = (1 \ 1 \ 1) \quad (2.17)$$

y en tiempos posteriores (en muchos casos in tiempo infinito después) los índices tienden a

$$q_{sens} = q_{rel} = q_{stat} = 1 \quad (2.18)$$

Hasta el momento del presente trabajo se ha reportado un único caso de cálculo empírico de existencia de un triplete de índices q , con referencia a la intensidad del campo helio magnético distante [11, 12].

El viento solar es un sistema no lineal en no equilibrio. El sol inyecta materia, momento, energía y campos magnéticos a la heliosfera en forma altamente variable. En la órbita terrestre hay grandes fluctuaciones en la velocidad y el campo magnético. Estas fluctuaciones aumentan con la distancia al Sol. Aproximadamente entre 40 y 90AU (AU: unidades astronómicas; 1AU es igual al radio de la órbita terrestre), las fluctuaciones pueden relajarse lentamente y el viento solar puede volverse cuasi-estacionario. Se seleccionaron promedios diarios del campo magnético obtenidos por el *Voyager*1 para los períodos de 1989 y 2002. Mediante su análisis se establecieron los valores de los índices q y sus respectivos errores

$$q_{stat} = 1,75 \pm 0,06; \quad q_{sens} = -0,6 \pm 0,2; \quad q_{rel} = 3,8 \pm 0,3 \quad (2.19)$$

corroborando la hipótesis de que el campo magnético de la heliosfera distante tiende a estar en un estado metaestable causi-estacionario.

Existen otros trabajos que exponen el cálculo de uno de los índices q . Bernui et al. en [9, 10], por ejemplo, interpretaron los mapas de temperatura de la radiación cósmica de fondo. Aseguran que este estudio constituye uno de los conjuntos de datos más precisos para corroborar hipótesis fundamentales de la cosmología moderna. Establecieron un valor de $q = 1,04 \pm 0,01$.

Petroni y Ausloos [13] en 2007 presentaron valores del índice q estacionario para las variaciones diarias del índice *ENSO* (El Niño Southern Oscillation). Considerando datos diarios entre 1999 y 2006 determinaron un modelo que se ajusta a la estadística no extensiva de Tsallis. Encontraron que q converge aproximadamente al valor de 1,01 para intervalos de tiempo de 36 (treinta y seis) días, empezando con q igual a 1,23 para intervalos de 1 (un) día.

Estudios similares que se pueden mencionar son: la Hydra viridissima [14] con el cálculo del $q_{stat} \cong 1,50 \pm 0,05$, el electroencefalograma durante una crisis epiléptica [15], [16], las finanzas [17] con $q_{stat} \cong 1,38 - 1,43$, la turbulencia defectuosa [18] con $q_{stat} \cong 1,50$, los sistemas hamiltonianos de largo rango [19] con $q_{stat} \cong 1,50 \pm 0,15$. En el siguiente capítulo se desarrolla nuestro trabajo en el cual se calculan los índices q para la Serie Temporal del ozono estratosférico. Hasta donde sabemos, es el segundo caso, después del Campo Heliomagnético, que se reporta el cálculo del triplete de índices q en una serie temporal de magnitudes físicas naturales.

Capítulo 3

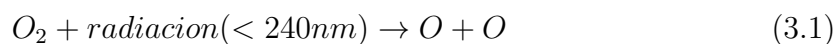
Aplicación al estudio de la dinámica de una serie temporal

3.1. El Ozono Estratosférico

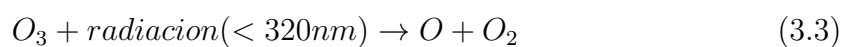
La estratósfera es la capa de la atmósfera que se encuentra entre los 15 y los 50km. Es una zona de alta temperatura debido a su altitud [33]. La acción de los rayos ultravioletas (UV) provenientes del sol generan la disociación de las moléculas de Oxígeno (O_2) en dos átomos, dando lugar a la formación de Ozono (O_3).

El ozono está en continua formación y destrucción como consecuencia misma de la radiación ultravioleta (UV), la que presenta una longitud de onda menor a los $290nm$.

Formación del Ozono



Destrucción del Ozono





Durante su formación (Figura 3.1), la molécula de oxígeno absorbe energía de un fotón UV de longitud de onda menor a los 240nm y forma dos átomos libres. Cada uno de estos, al unirse con otra molécula de oxígeno conforma una de ozono. En forma inversa, si una molécula de ozono absorbe radiación por debajo de los 320nm se genera un átomo libre y una molécula de oxígeno. Los átomos libres reaccionan entre sí formando nuevas moléculas de oxígeno.

La concentración de ozono en la atmósfera (Figura 3.2), es muy pequeña; de unas pocas moléculas por millón de moléculas de aire. Sin embargo, son de vital importancia porque actúan como filtro impidiendo el paso de la radiación UV proveniente del Sol. Según la longitud de onda, la radiación penetra en forma distinta. Existen tres tipos de radiación:

- UV-a (azul): alcanza la superficie pero no es peligrosa,
- UV-b (verde): causa daños a los organismos vivos generando cáncer de piel, quemaduras y daño ocular (por ejemplo cataratas). Sólo el 10 % alcanza la superficie de la Tierra,
- UV-c (roja): es reflejada por el ozono a los 35km de altitud.

La radiación $UV - b$ es la más perjudicial de las tres. Si la capa de ozono estratosférico decrece, mayor radiación podría alcanzar la superficie, y generar más daño.

Los valores de espesor de la capa de ozono se miden en unidades Dobson (UD); 100UD equivalen a una capa de gas de 1mm de espesor a presión atmosférica.

En 1920, Dobson fue el primero en medir una variación en la cantidad de la columna de ozono [33]. Observó la existencia de una variación diaria significativa superpuesta a una variación estacional. Esta variación a corto plazo se repite anualmente recibiendo el nombre de oscilación anual o estacional. Es análoga al ciclo de temperatura cercana a la superficie. Así como ciertos días de invierno son más fríos que otros, o días de verano son más calurosos que otros, las cantidades de ozono fluctúan en forma similar.

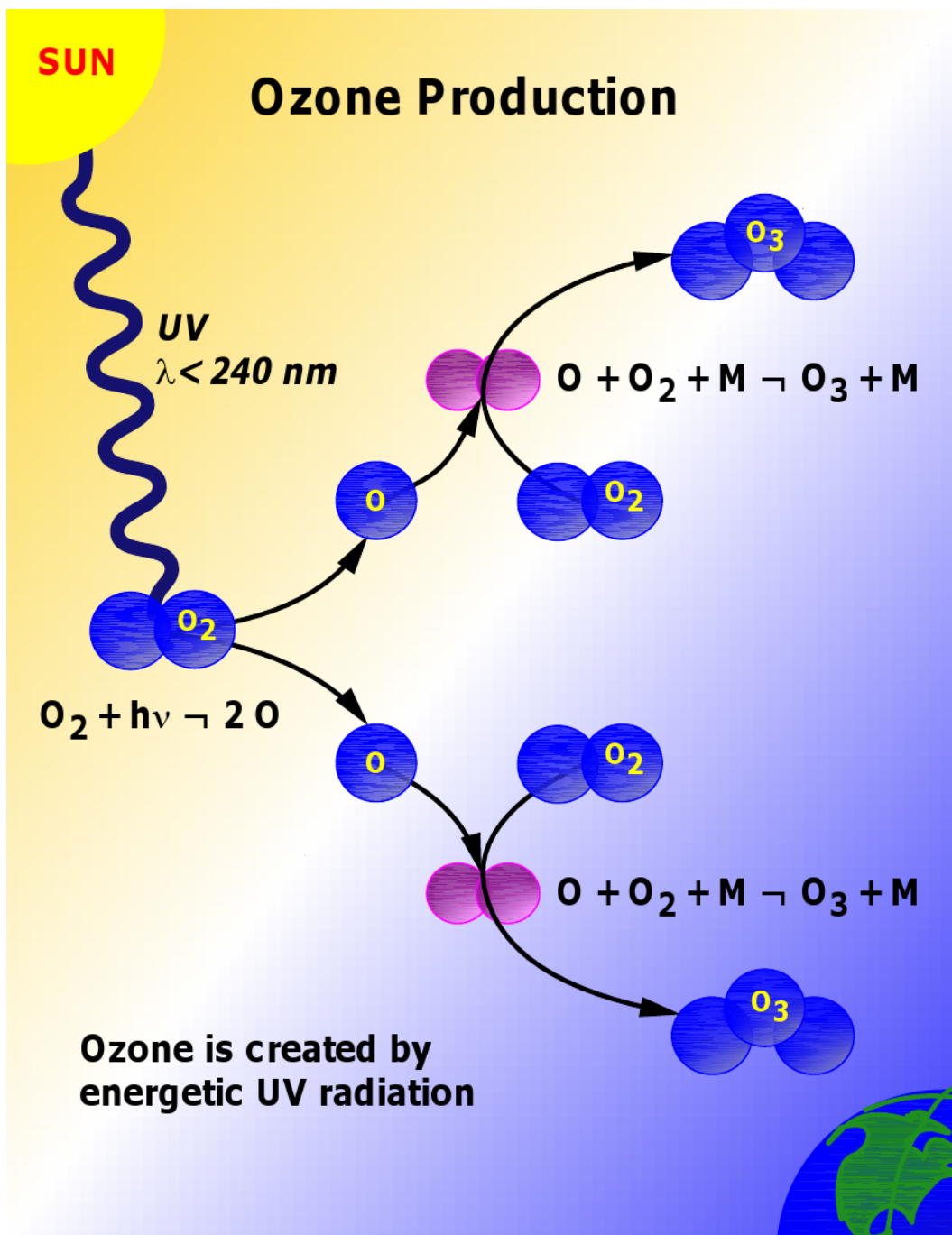


Figura 3.1: Producción de Ozono

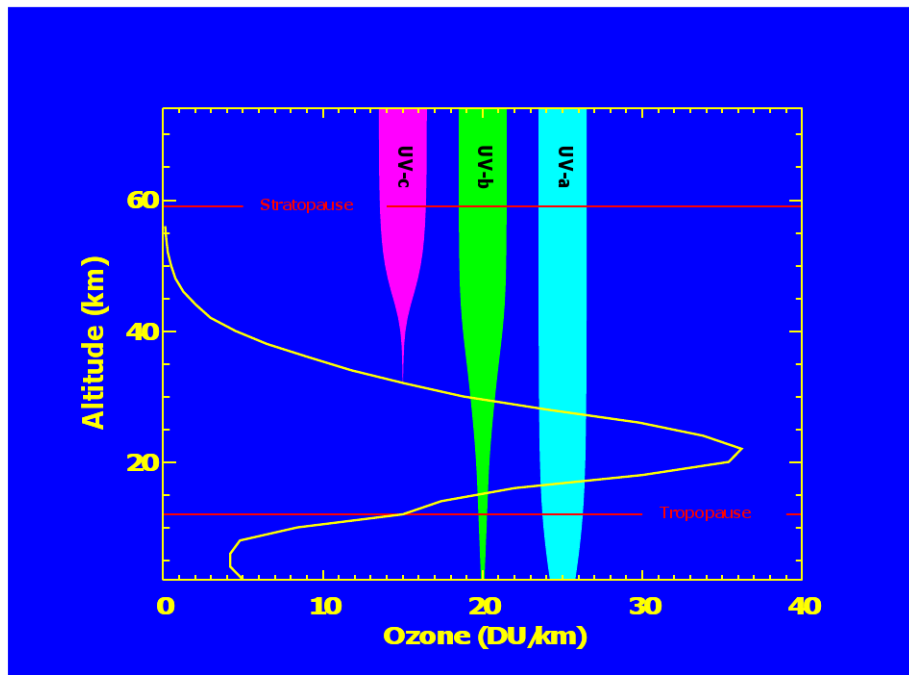


Figura 3.2: Concentración de ozono en la atmósfera

La variabilidad en el espesor de la capa de ozono está influenciada en forma no lineal por la radiación solar y los cambios climáticos, de modo que nunca se alcanza el equilibrio [34–36]. Fue el mismo Dobson quien estableció esta relación y determinó que la cantidad de ozono está anticorrelacionada con la presión del aire. Cuando un sistema de alta presión está sobre una cierta región, se observan bajas cantidades de ozono y viceversa. Para explicarlo más detenidamente, se esperaría que ocurra una menor radiación en los polos terrestres y una mayor radiación en los trópicos. Las evidencias muestran lo contrario. La cantidad de ozono no depende únicamente del balance entre producción y pérdida, también depende de los vientos que transportan el ozono. El viento es el principal responsable de la evolución estacional. La columna aumenta desde los trópicos hacia regiones de mayor latitud en ambos hemisferios. Particularmente, la concentración se hace más grande en el hemisferio norte que en el sur. En el Ártico, hay un aumento durante la primavera norte (Marzo-Abril), alcanzando la máxima concentración mundial. Disminuye en el transcurso del verano norte y vuelve a ascender en el invierno. Mientras, en la Antártida se alcanzan los valores mínimos en el mundo en los meses de Septiembre y Octubre (primavera sur). Es aquí donde ocurre el fenómeno del agujero de ozono.

La forma y la amplitud de la distribución anual no es la misma año tras año. Esta variación recibe el nombre de oscilación interanual. Frecuentemente, la variación puede presentar alguna regularidad como una oscilación bianual. En otras situaciones es irregular sin mantener ningún patrón. Se debe, por ejemplo, a erupciones volcánicas o a variaciones en la dinámica estratosférica. Un caso puntual es la oscilación sur generada por el fenómeno de *El Niño* (ENSO), dada en períodos entre 4 y 7 años. Grandes variaciones en la temperatura de superficie del océano Pacífico modifican los patrones globales de circulación de las corrientes de aire afectando el transporte de ozono en estas regiones [33].

La oscilación bianual se debe a vientos en la estratósfera tropical. En un rango entre $10mb$ y $100mb$ de altura se registran vientos de oeste a este que luego invierten su sentido. Estos cambios modifican, consecuentemente, las corrientes de aire en zonas

de mayor altitud. Al ser el transporte el componente principal en la variación de la columna de ozono, su concentración se ve alterada.

Estas tres variaciones no son las únicas. Existe una tendencia a largo plazo que incluye variaciones en escalas de tiempo mayores, del orden de las décadas. Mediciones independientes realizadas en las últimas décadas, sobre la columna de ozono, dan cuenta de una importante disminución en la concentración [33]. Una de las causas a la cual se le atribuye la tendencia a largo plazo es el cambio químico debido a la actividad humana.

3.2. Los Datos

Desde 1978, la capa de ozono es monitoreada diariamente por el programa *Total Ozone Metering Spectrometer* de la NASA [37] y están disponibles largas series temporales con los datos de una gran cantidad de puntos geográficos del planeta [33].

Particularmente, se seleccionaron para este trabajo, los datos satelitales correspondientes a la ciudad de Buenos Aires (Argentina). Los valores diarios empleados comprenden los períodos *Noviembre de 1978 - Marzo de 1993* y *Julio de 1996 - Diciembre de 2005*, por ser los valores disponibles. Debido a la existencia de datos faltantes, se completa la serie asignando en cada hueco un número aleatorio generado con igual media y varianza que los diez datos anteriores.

Teniendo en consideración los factores que influyen en el espesor de la capa de ozono, se descompuso la serie original en:

$$\text{Dato original} = \text{valor medio} + \text{tendencia a largo plazo} + \text{oscilación anual} + \text{oscilación bianual} + Z_n$$

Inicialmente se realizó un ajuste lineal de los datos reales de la forma $x_1 = a + bt$. A partir de los datos obtenidos se realizó la diferencia con los datos reales para eliminar la tendencia secular. A continuación se procedió a un ajuste por cuadrados mínimos, dos funciones periódicas con períodos de oscilación anual y bianual.

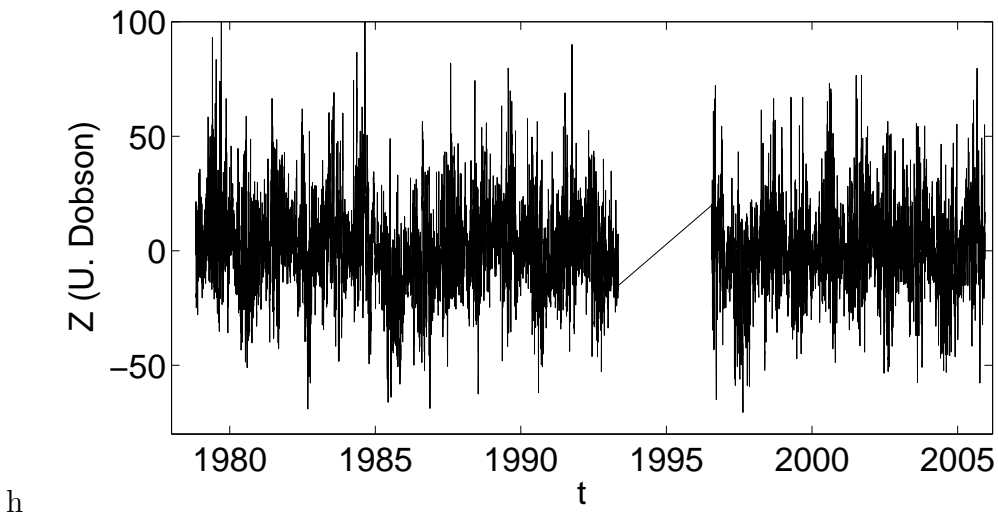


Figura 3.3: Serie Temporal Z_n . Valores diarios de la Capa de ozono sobre la ciudad de Buenos Aires.

$$\begin{aligned}
 x = & a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{b}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{b}\right) + a_3 \sin\left(\frac{4\pi t}{b}\right) + a_4 \cos\left(\frac{4\pi t}{b}\right) + \\
 & + a_5 \sin\left(\frac{6\pi t}{b}\right) + a_6 \cos\left(\frac{6\pi t}{b}\right) + a_7 \sin\left(\frac{8\pi t}{b}\right) + a_8 \cos\left(\frac{8\pi t}{b}\right)
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aquí $b = 1$ porque se ajustó por cuadrados mínimos con una función de período 1 año y armónicos superiores.

A continuación, se restó los valores de esta función resultante a la serie original, obteniendo una nueva serie Z_n . Esta serie constituye el atractor del sistema y refleja la dinámica no lineal debido a la variación diaria en la radiación solar y los cambios climáticos.

En la Figura 3.3 se puede apreciar el resultado de este ajuste para la ciudad de Buenos Aires.

3.3. Resultados y Discusiones

3.3.1. Índice Estacionario, q_{stat}

Las funciones de distribución de probabilidad (FDP) que describen estados estacionarios o metaestables son proporcionales a funciones llamadas q -exponenciales $exp_q(-\beta\mu)$. Si $q \rightarrow 1$ y $\mu = y^2$, $exp_q(-\beta\mu)$ es una gaussiana. En general, para $q \neq 1$, la FDP es una q -Gaussiana [38]. Esta generalización de la distribución normal de Gauss viene dada por:

$$G_q(\beta, x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q^{-\beta x^2} \quad 1 < q < 3 \quad (3.6)$$

donde β es un número entero positivo y C_q es la constante de normalización establecida por

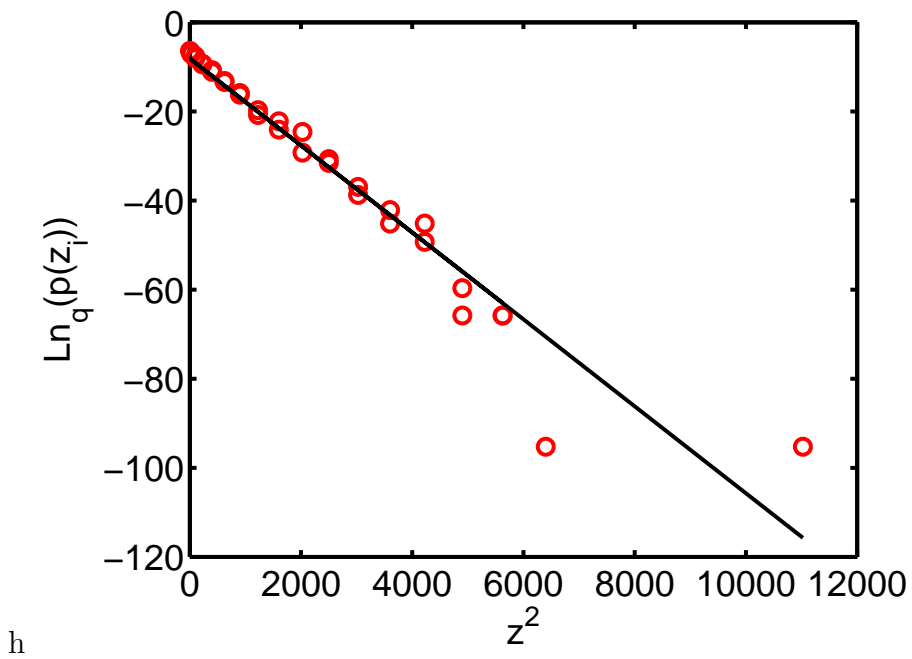
$$C_q = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3-q}{2(q-1)})}{\sqrt{q-1} \Gamma(\frac{1}{q-1})} \quad (3.7)$$

Se obtuvo el índice q estacionario a partir de la función de distribución de probabilidades (FDP) de las variaciones diarias en el espesor de la capa de ozono $\Delta Z_n = Z_{n+1} - Z_n$.

Para su realización, se dividió el rango de los ΔZ_n en pequeñas celdas de ancho δz centradas en z_i . Se contó la frecuencia con que los valores de ΔZ caen dentro en cada celda. Se seleccionó $\delta z = 5UD$. Se encontró, así, la FDP de estado estacionario mediante el histograma obtenido. Esta distribución representa el conjunto de probabilidades $\{p(z_i)\}_{i=1}^N$ donde cada p_i es la probabilidad de que ΔZ caiga en la i -ésima celda centrada en z_i y N es el número de celdas.

Para determinar q , graficamos $\ln_q[p(z_i)]$ en función de z_i^2 . Asignamos a q el valor de 1,01 y luego lo fuimos incrementando en intervalos de 0,01. Para cada q calculamos el coeficiente de correlación lineal. De este modo, se seleccionó el valor de q con mejor coeficiente de correlación (Figura 3.4). Obtuvimos $q_{stat} = 1,32 \pm 0,06$ con un coeficiente de correlación lineal $r^2 = 0,9383$.

A continuación, se evaluó $G_q(\beta, x)$ en z_i para distintos valores de β y se selec-



h
 Figura 3.4: Correlación lineal entre $\ln_q[p(z_i)]$ y z_i^2 , donde $q_{stat} = 1,32 \pm 0,06$ y el coeficiente de correlación es $r^2 = 0,9383$.

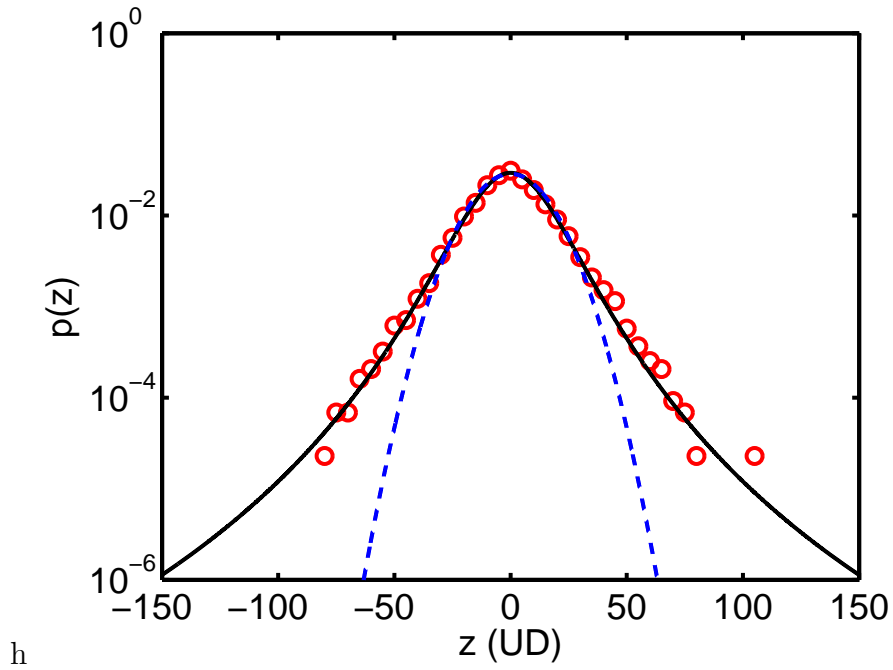


Figura 3.5: Círculos, $p(Z_i)$ versus z_i ; línea sólida, q -Gaussiana que ajusta $p(z_i)$; línea punteada, el mejor ajuste de una Gaussiana.

cionó aquel para el cual se minimiza la expresión

$$\sum [G_{1,32}(\beta, z_i) - p(z_i)]^2 \tag{3.8}$$

El valor mínimo es $\beta = 0,00356UD^{-2}$. Este análisis se puede apreciar de modo gráfico en la Figura 3.5. Los círculos en color rojo representan la probabilidad $p(Z_i)$ en función de los z_i . La línea sólida, en color negro es la función q -Gaussiana que ajusta $p(z_i)$; mientras que la línea punteada en azul se corresponde con el mejor ajuste de una Gaussiana.

3.3.2. Índice Sensible a las Condiciones Iniciales, q_{sens}

A partir del espectro multifractal del atractor Z_n del sistema dinámico no lineal, se puede determinar el valor para el índice q sensible a las condiciones iniciales. Este

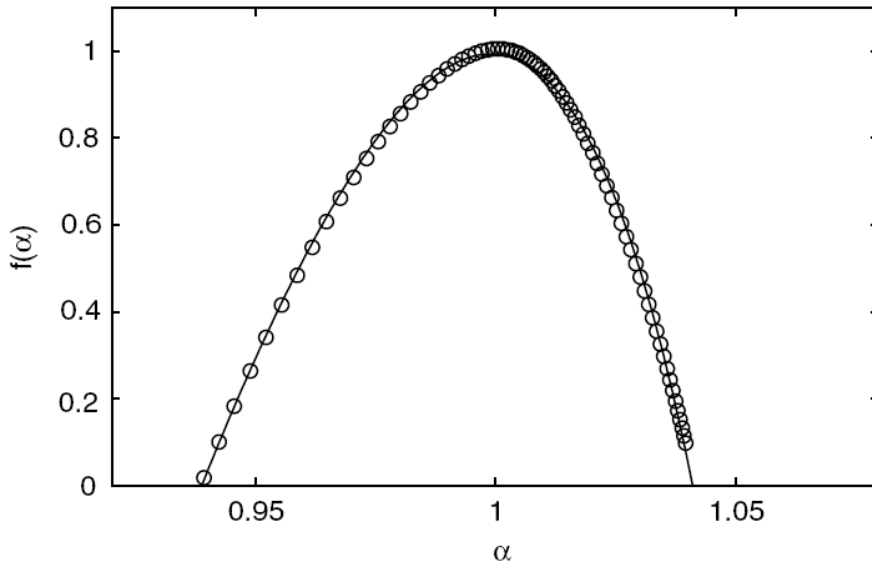


Figura 3.6: Espectro Multifractal de la FDP de $p(Z)$ con $\alpha_{min} = 0,938 \pm 0,001$ y $\alpha_{max} = 1,046 \pm 0,001$.

espectro $f(\alpha)$ es la dimensión fractal de un conjunto de celdas del espacio que contiene al atractor, con exponente de escala local α [39]. Los extremos de este espectro dados por el mínimo y el máximo del exponente son aquellos en los que $f(\alpha) = 0$, y están enteramente relacionados con el q sensible por [28], [40]:

$$\frac{1}{1 - q_{sens}} = \frac{1}{\alpha_{min}} - \frac{1}{\alpha_{max}} \quad (3.9)$$

Se determinaron los valores de α_{min} y α_{max} ajustando a los puntos del gráfico un polinomio de grado cuatro, obtuvimos $\alpha_{min} = 0,938 \pm 0,001$ y $\alpha_{max} = 1,046 \pm 0,001$. Mediante la ecuación 3.9, se calculó el q sensible a las condiciones iniciales y se obtuvo $q_{sens} = -8,1 \pm 0,2$. El espectro multifractal puede observarse en la Figura 3.6.

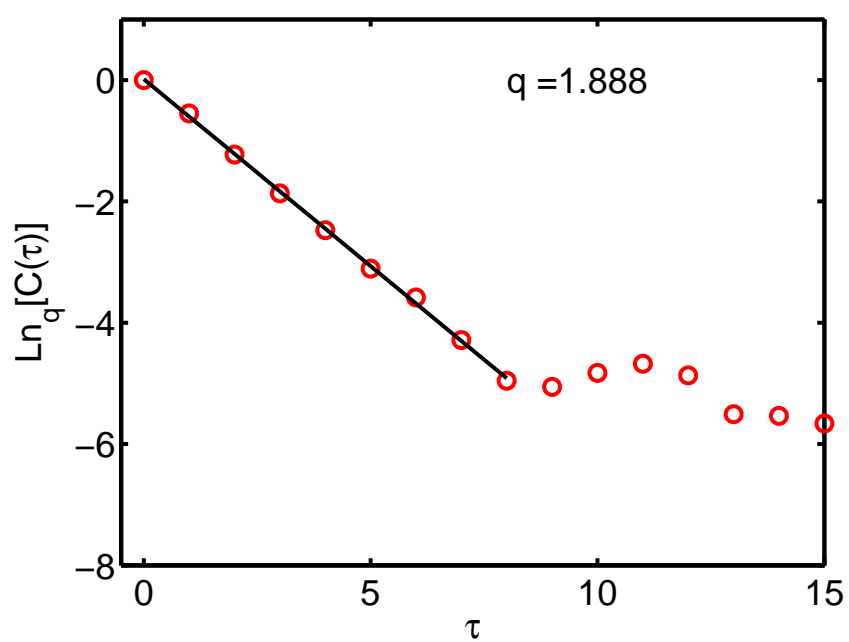


Figura 3.7: \ln_q del coeficiente de auto-correlación $C(\tau)$ versus el tiempo de relajación τ en días.

3.3.3. Índice de Relajación, q_{rel}

Se determinó el valor del índice q de relajación a partir del coeficiente de autocorrelación dependiente de la escala del tiempo:

$$C(\tau) = \frac{\sum_n Z_{n+r} Z_n}{\sum_n Z_n^2} \quad (3.10)$$

para un estado estacionario lo que se espera es que el decaimiento siga una ley de potencia de tipo $\ln_{q_{rel}}[C(\tau)]$.

El valor de q_{rel} fue determinado buscando el mejor coeficiente de correlación entre $\ln_{q_{rel}}[C(\tau)]$ versus τ . Se determinó así el valor de $q_{rel} = 1,89 \pm 0,02$. Gráficamente, se puede observar en la Figura 3.7.

Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos hecho una revisión de los conceptos fundamentales de la Mecánica Estadística y de la Mecánica Estadística no extensiva, y hemos trabajado con datos aportados por la NASA de la serie temporal del espesor de la capa de ozono sobre la ciudad de Buenos Aires. Con estos datos hemos estimado el triplete de índices de no extensividad de Tsallis. Los valores encontrados para los tres índices son: $q_{sens} = 1,32 \pm 0,6$, $q_{rel} = -8,1 \pm 0,2$, y $q_{stat} = 1,89 \pm 0,02$, claramente distintos de la unidad, indicando que estamos en presencia de un sistema en un estado estacionario, fuera del equilibrio, cuya física resulta propiamente descrita por la q -Mecánica Estadística.

Bibliografía

- [1] R. BALIAN, *From Microphysics to Macrophysics*, **Vol. 1**, Springer-Verlag.
- [2] W. GREINER, L. NEISE, H. STÖCKER, *Thermodynamics and Statistical mechanics*, (1995), Springer-Verlag New York, Inc.
- [3] C.E. SHANNON, *A mathematical theory of communication*, Tes Bell System Technical Journal, **27**, (1948), 379-423.
- [4] M. CERREJIDO, *Elogio del desequilibrio. En busca del orden y el desorden en la vida*, Colección Ciencia que ladra. Editorial Siglo XXI. (2009), Buenos Aires, Argentina.
- [5] C. TSALLIS, F. BALDOVIN, R. CERBINO and P. PIEROBON, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics*, The Physics of Complex Systems New Advances and Perspectives, **July 2003**, (2004), 229-252.
- [6] G. FERRI, *Termodinámica no extensiva y Estadísticas Generalizadas*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam, (2006).
- [7] F. A. BAIS and J. D. FARMER, *The Physics of Information*, SFI Working paper 2007, Santa Fe Institute.
<http://www.santafe.edu/research/publications/workingpapers/07-08-029.pdf>.

- [8] C. TSALLIS, *A possible generalization of Boltzmann-Gibbs entropy*, J. Stat. Phys. **52**, (1988), 479-486.
- [9] A. BERNUI, C. TSALLIS, and T. VILLELA, *Temperature fluctuations of the cosmic microwave background radiation: A case of non-extensivity?*, Physics Letters A **356**, (2006), 426-430.
- [10] A. BERNUI, C. TSALLIS, T. VILLELA, *Deviation from Gaussianity in the cosmic microwave background temperature fluctuations*, EPL Journal, **78**, (2007), 19001.
- [11] L.F. BURLAGA, A.F. VIÑAS, *Triangle for the entropic index q of non-extensive statistical mechanics observed by Voyager 1 in the distant heliosphere*, Physica A **356**, (2005), 375-784.
- [12] L.F. BURLAGA, A.F. VIÑAS, N.F. NESS and M.H. ACUÑA, *Tsallis Statistic of the Magnetic Field in the Helisheath*, The Astrophysical Journal **644**, (2006), L83-L86.
- [13] E. PETRONI and M. AUSLOOS, *High frequency (daily) data analysis of the Southern Oscillation Index. Tsallis nonextensive statistical mechanics approach*, Eur Phys. J. Special Topics **143**, (2007), 201-208.
- [14] A. UPADHAYA, J.P. RIEU, J.A. GLAZIER, Y. SAWADA, *Anomalous diffusion and non-Gaussian velocity distribution of Hydra cells in cellular aggregates*. Physica A **293** (3), (2001), 549-558.
- [15]] O.A. ROSSO, M.T. MARTIN, A. PLASTINO, *Brain electrical activity analysis using wavelet-based informational tools*. Physica A **313** (3), (2002), 587-608.
- [16] O.A. ROSSO, M.T. MARTIN, A. PLASTINO, *Brain electrical activity analysis using wavelet-based informational tools (II). Tsallis non-extensivity and complexity measures*. Physica A **320**, (2003), 497-511.

- [17] R. OSORIO, L. BORLAND, C. TSALLIS, *Nonextensive entropy-interdisciplinary applications*, (2004), New York: Oxford University Press.
- [18] K. E. DANIELS, C. BECK, E. BODENSCHATZ, *Anomalous distributions, nonlinear dynamics and nonextensivity*. Physica D **193**, (2004), 1-2.
- [19] V. LATORA, A. RAPISARDA, S. RUFFO. *Superdiffusion and Out of Equilibrium Chaotic Dynamics with Many Degrees of Freedom*, Phys. Rev. Lett. **83**, (1999); 2104-2107.
- [20] D. J. WATTZ, S. H. STROGATZ, *Collective dynamics of small-world networks*. Nature **393** (1998), 440-442.
- [21] M. E. J. NEWMAN, S. H. STROGATZ, D. J. WATTS, *Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications*. Phys. Rev. E. **64**, (2001), 026118.
- [22] R. ALBERT, A. L. BARABASI, *Statistical mechanics of complex networks*. Rev. Mod. Phys. **74**, (2002), 47.
- [23] D. J. B. SOARES, C. TSALLIS, A. M. MARIZ, L. R. da SILVA, *Preferential attachment growth model and nonextensive statistical mechanics*. Europhys Lett. **70**, (2005), 70.
- [24] S. THURNER, C. TSALLIS, *Nonextensive aspects of self-organized scale-free gas-like networks*. Europhys Lett. **72**, (2005), 197.
- [25] H. HASEGAWA, *Nonextensive aspects of small-world networks*. Physica A **365** (2), (2006), 383-401.
- [26] D. R. WHITE, N. KEJZAR, C. TSALLIS, D. FARMER, S. WHITE, *A generative model for feedback networks*. Phys. Rev. E. **73**, (2006), 016119.
- [27] C. TSALLIS, *What should a statistical mechanics satisfy to reflect nature?*, Physica D **193**, (2004), 3-34.

- [28] C. TSALLIS, *Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics*, Physica A **340**, (2004), 1-10.
- [29] C. TSALLIS, A. PLASTINO, W. M. ZHENG, *Chaos, Solitons and Fractals* **8**, (1197), 885.
- [30] F. BALDOVIN, A. ROBLEDO, *Universal renormalization group dynamics at the onset of chaos in logistic maps and nonextensive statistical mechanics*, Phys. Rev. E **66**, (2002), 045104 (R).
- [31] F. de MOURA, U. TIRNAKLI, M. LYRA, *Convergence to the critical attractor of dissipative maps: Log-periodic oscillations, fractality, and nonextensivity*, Phys. Rev. E **62**, (2000), 6361-6365.
- [32] E. BORGES, C. TSALLIS, G. ANANOS, P. OLIVEIRA, *Nonequilibrium Probabilistic Dynamics of the Logistic Map at the Edge of Chaos*, Phys. Ver. Lett. **89**, (2002), 254103 .
- [33] <http://jwocky.gsfc.nasa.gov/ozone/ozoneother.html>, Total ozone mapping spectrometer NASA/GSFC.
- [34] P. HAAS, U. SCHLINK and M. RICHTER, *Critical reconsideration of phase space embedding and local non-parametric prediction of ozone time series*, Water, Air, and Soil Pollution: Focus **2**, (2002), 513-524.
- [35] J. L. CHEN, S. ISLAM and P. BISWAS, *Nonlinear dynamics of hourly ozone concentrations: nonparametric short term prediction*, Atmos. Environ. **32 (11)**, (1998), 1839-1848.
- [36] K. KOÇAK, L. SAYLAN and O. SEN, *Nonlinear time series prediction of O₃ concentration in Istanbul*, Atmos. Environm. **34 (8)**, (2000), 1267-1271.

- [37] R. M. TODARO editor, *Stratospheric ozone, NASA's Goddard Space Flight Atmospheric Chemistry and Dynamics Branch*. <http://www.ccpo.odu.edu/SEES/ozone/ozclass.htm>.
- [38] S. UMAROV, C. TSALLIS and S. STEINBERG, *On a q -Central Limit Theorem Consistent with Nonextensive Statistical Mechanics*; Milan j. math. (Birkhauser Verlag) **76**, (2008), 307–328.
- [39] C. BECK and F. SCHLOGL, *Thermodynamics of chaotic systems, an introduction*, (1993), Cambridge Nonlinear Science Series, Cambridge University Press.
- [40] M. L. LYRA and C. TSALLIS, *Nonextensivity and Multifractality in Low-Dimensional Dissipative Systems*, Phys. Rev. Letters **80** (1998), 53-56.
- [41] R. C. TOLMAN, *Principles of statistical physics*, (1938), Clarendon, Oxford, UK.
- [42] C. TSALLIS, *Thermostatistically approaching living systems: Boltzmann-Gibbs or non-extensive statistical mechanics?*, Physics of Life Reviews **3**, (2006), 1-22.