

El diagrama de bifurcación junto con los gráficos de $C^{(S)}$ y la medida de Fisher en función del parámetro de control $0,328 < a < 0,42$ se muestran en la figura 4.7.

En la figura 4.7 puede verse que en la región I el sistema tiene una dinámica periódica de período uno. Como es de esperarse, en esta región la complejidad adopta un valor cero, un movimiento periódico no es complejo, mientras que la medida de Fisher es igual a la unidad. La distribución de probabilidad es lo más abrupta posible: vale uno para un p_j y cero para el resto. En la región II el sistema experimenta una periodicidad de período dos. En esta zona la complejidad adopta un valor aproximado de 0,1 y la medida de Fisher también vale la unidad. La distribución de probabilidad consta de sólo dos picos aislados. En la región III, se distingue un período cuatro. Aquí $C^{(S)} \simeq 0,2$ y $F \simeq 1$.

En la zona indicada como IV se produce una cascada de doblamientos de período, que concluye en una dinámica caótica. Puede verse cómo la complejidad estadística aumenta su valor rápidamente a medida que transcurre este cambio en la dinámica. Por otro lado, la medida de Fisher va reduciendo su valor a medida que se producen los doblamientos de período.

En la región V se contempla un comportamiento aperiódico del sistema. Dicho comportamiento viene acompañado por una medida de complejidad alta, $C^{(S)} \simeq 0,485$, y una medida de Fisher baja, $F \simeq 0,15$. En esta región hay varias ventanas periódicas. Algunas de ellas se observan en la figura 4.8. En coincidencia con estas ventanas la complejidad estadística adopta abruptamente valores bajos y la medida de Fisher adquiere repentinamente valores altos.

La ventana más notoria dentro de la región estudiada se da para $0,4088 \lesssim a \lesssim 0,4126$. Allí, el atractor caótico converge abruptamente a un atractor de período 3, y a medida que se va aumentando el valor del parámetro de control vuelve a producirse una cascada de doblamientos de período que termina dando lugar a una nueva dinámica caótica. En la región de período 3 tenemos $C^{(S)} \simeq 0,1576$ y $F = 1$. Más tarde, mientras se producen los doblamientos de período, la complejidad aumenta su valor y la medida de Fisher lo reduce.

4.2. Intermitencia tipo I

Sistema de Lorenz

Se analizó el sistema de Lorenz [1, 46]

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{4.5}$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz \tag{4.6}$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy. \tag{4.7}$$

Se consideró $\sigma = 10$ y $\beta = 8/3$ y se utilizó ρ como parámetro de control. En base a un análisis exploratorio del sistema, se observa que para valores de ρ ligeramente menores a $\rho_c \approx 165,857$ el mismo tiene un atractor periódico. A medida que se incrementa gradualmente ρ una bifurcación cyclic-fold ocurre en ρ_c . Subsecuentemente, se da un proceso de intermitencia tipo I para $\rho > \rho_c$. En la figura 1.11 se presentan series temporales correspondientes a la coordenada z para distintos valores de ρ .

Se seleccionó el conjunto de valores del parámetro de control entre 165,835 y 166 a pasos de 0,00008, región en la que se produce la intermitencia. Para cada valor de ρ se realizó la integración numérica del sistema con condiciones iniciales aleatorias entre 0 y 1. El tiempo de integración fue de 500 unidades temporales, cada una de las cuales fue dividida en milésimos. Se descartaron los primeros 100000 valores resultantes de la integración (las 100 primeras unidades temporales). De las series temporales resultantes, se seleccionaron las correspondientes a la coordenada y del sistema, y se obtuvieron series con los mínimos de las mismas. Con cada serie, se calculó la

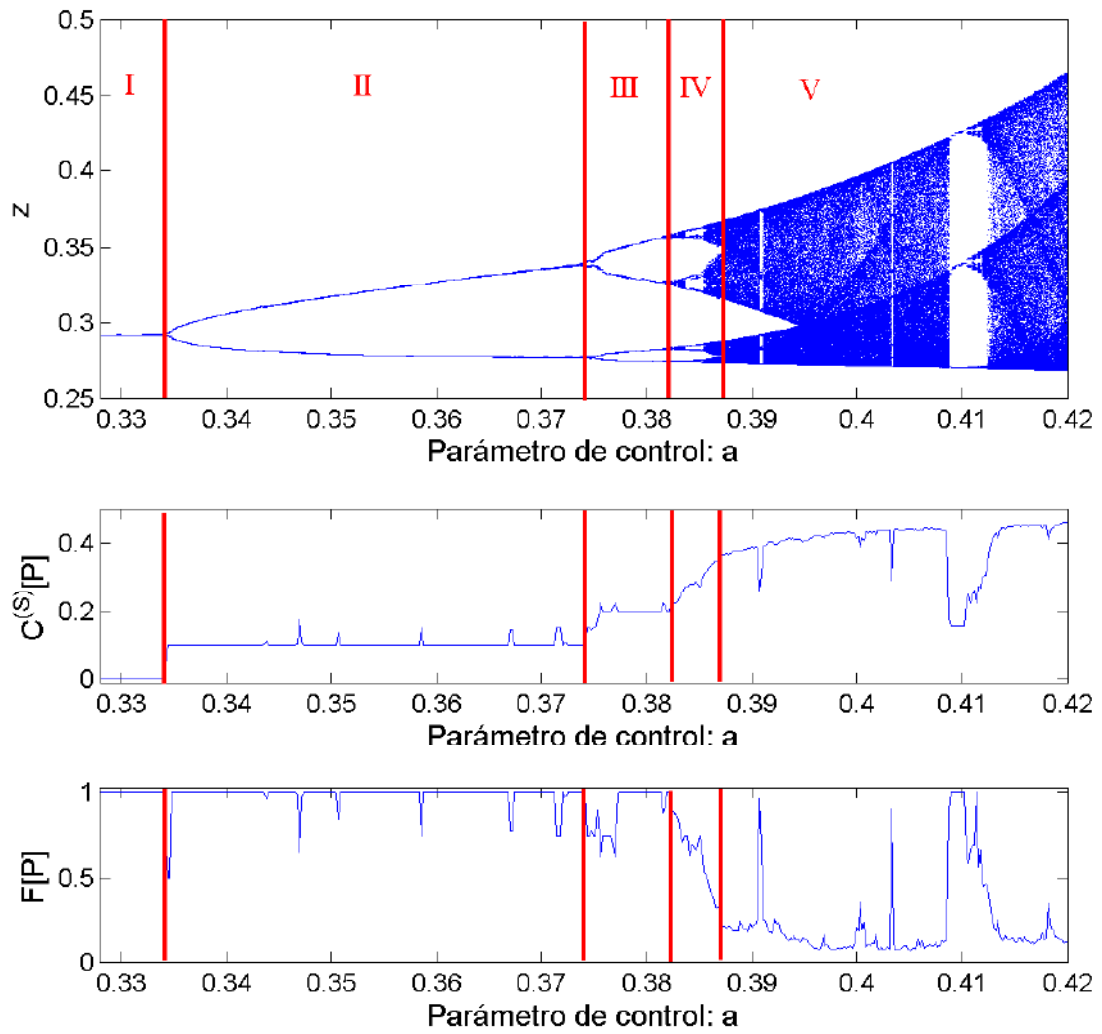


Figura 4.7: Diagramas de complejidad y Fisher en función del parámetro de control comparados con el diagrama de bifurcación del sistema (4.2), (4.3) y (4.4).

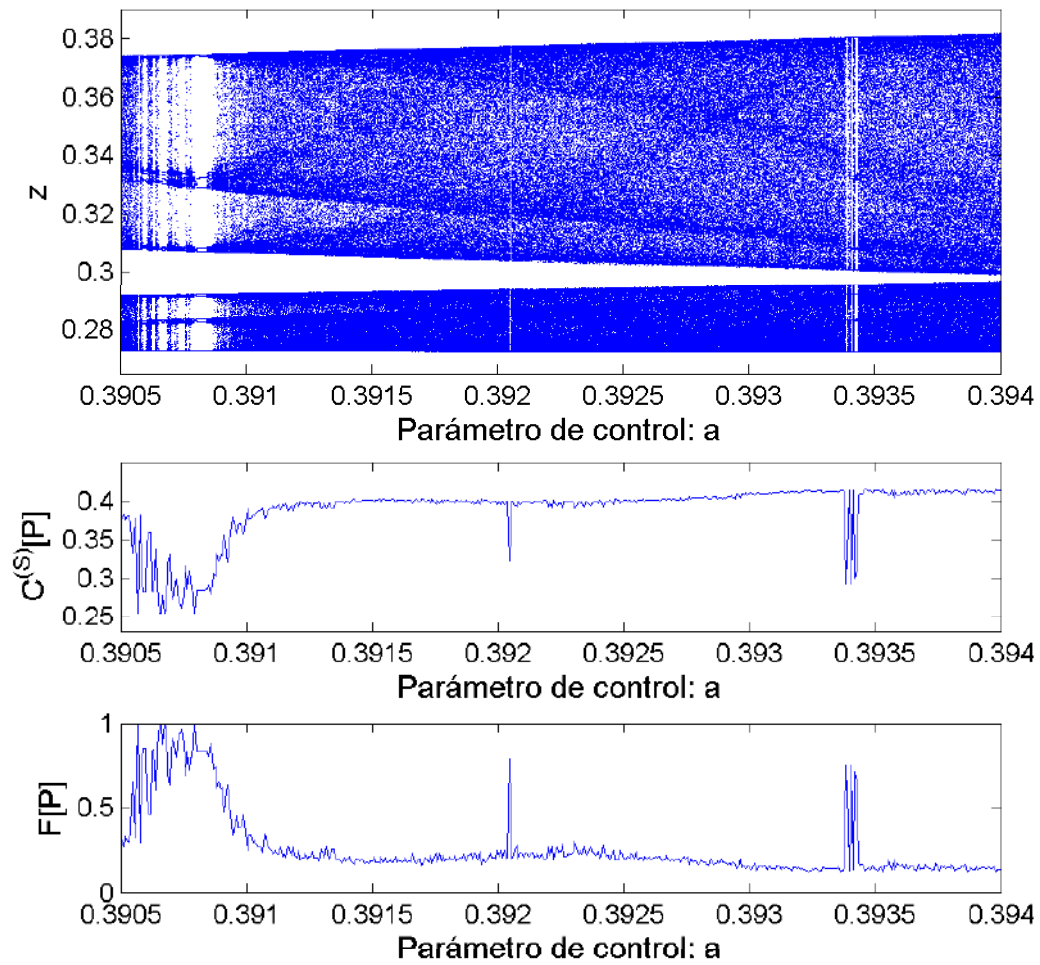


Figura 4.8: Detalle del diagrama de bifurcación del sistema (4.2), (4.3) y (4.4) donde se observan ventanas periódicas.

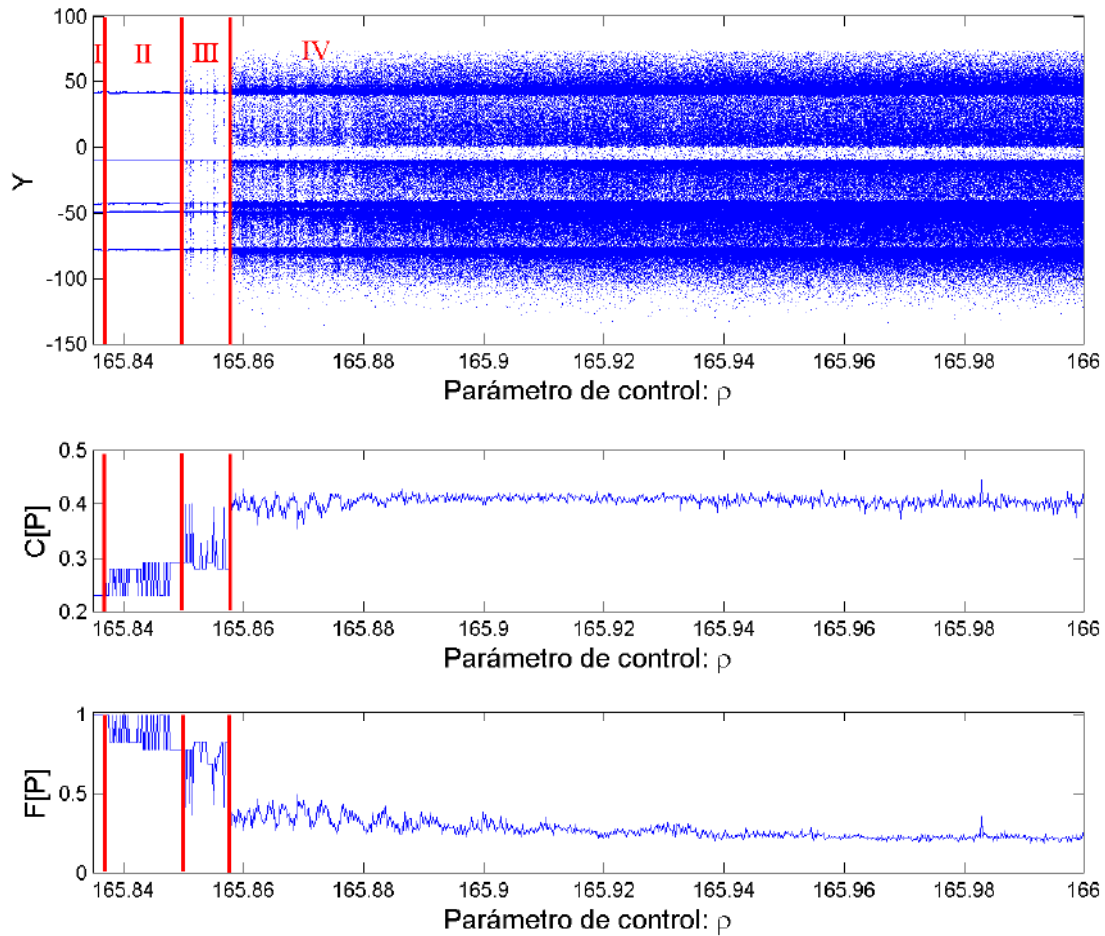


Figura 4.9: Diagramas de complejidad y Fisher en función del parámetro de control comparados con el diagrama de bifurcación del sistema (4.5),(4.6),(4.7).

distribución de probabilidades del sistema por el método de histogramas. Para esto se seleccionó el intervalo $[y_{\min}, y_{\max}] = [-150; 100]$ del espacio de mínimos.

En la figura 4.9 se presenta la comparación entre el diagrama de bifurcación del sistema y los gráficos de $C^{(S)}$ vs. ρ y F vs. ρ . La figura 4.10 muestra en detalle la región $165,835 < \rho < 165,88$. En la región I el sistema tiene una dinámica periódica de período cinco. Aquí $C^{(S)} \approx 0,225$ y $F = 1$. En la región II el sistema experimenta, además del período cinco, dinámicas periódicas de períodos superiores (período diez o mayores) que ocurren para ciertos valores del ρ . Estas periodicidades no son visibles en el diagrama de bifurcación debido a su escala; pero pueden verse si se amplía el gráfico (ver figura 4.11). En esta región, $C^{(S)}$ va alternándose entre los valores típicos del período cinco y valores asociados a los períodos superiores ($0,28 < C^{(S)} < 0,29$). A medida que incrementamos el valor del parámetro de control estas dinámicas periódicas ocurren con más frecuencia y en rangos de ρ cada vez mayores.

Hay que notar que en estos períodos superiores la medida de Fisher no es 1 como es de esperarse para los comportamientos periódicos. Esto se debe a que al dividir el intervalo del espacio de mínimos en mil canales de igual ancho para construir los histogramas se pierde "definición" en la

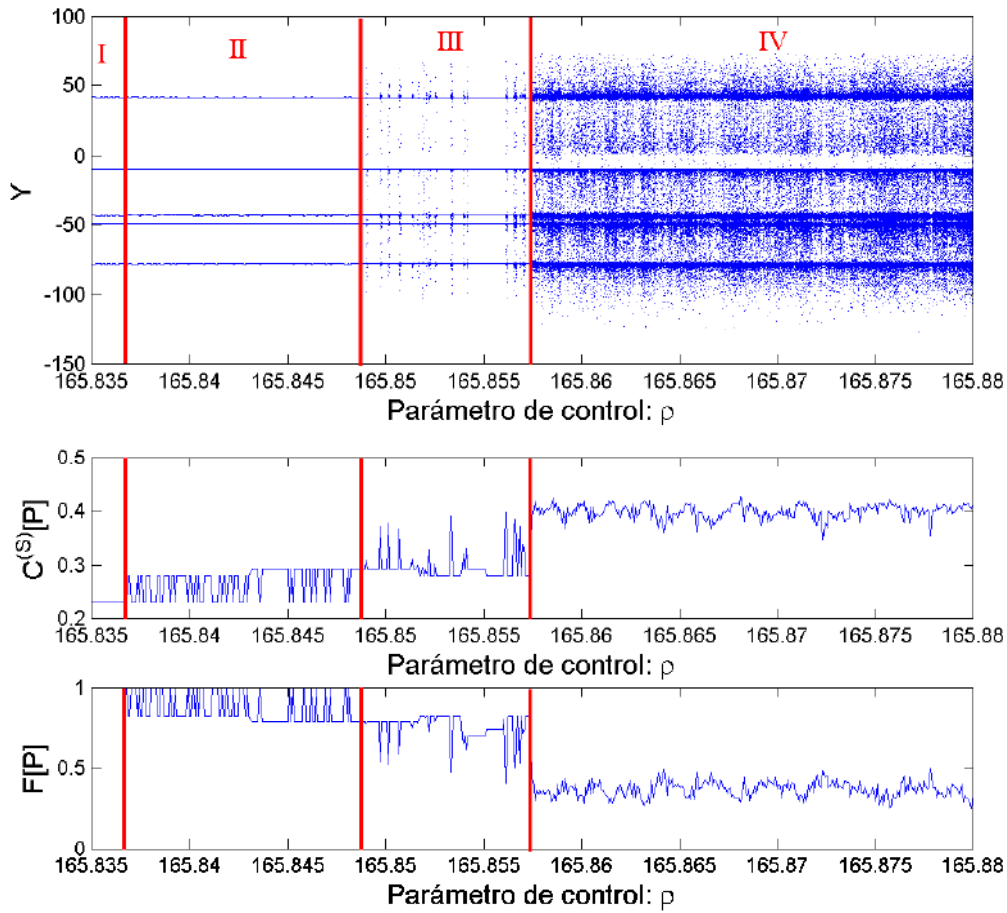


Figura 4.10: Detalle de los diagramas de complejidad y Fisher para $165,835 < \rho < 165,88$.

distribución, ya que no se logran distinguir los pequeños espacios vacíos que separan las columnas de mínimos. Esto se traduce en una distribución con algunas columnas no nulas en contacto, y, como consecuencia, una medida de Fisher distinta de la unidad. Es posible resolver este problema aumentando el número de canales con los que se construye el histograma; no obstante, los cálculos no se presentan en este trabajo.

En la región III vemos que el sistema describe permanentemente una dinámica periódica de alto período con pequeños estallidos caóticos para ciertos valores de ρ . En dichos valores la complejidad estadística presenta picos con valores superiores a los de la dinámica periódica, mientras que la medida de Fisher muestra picos con valores más bajos que los de la dinámica previa. Al igual que en la región anterior los estallidos caóticos van produciéndose con mayor frecuencia a medida que se aumenta el parámetro de control.

La región IV muestra un diagrama de bifurcación en el que se distinguen regiones con una mayor densidad de puntos y otras con una densidad menor. Ésto se debe a que nos encontramos frente a un comportamiento típico de intermitencia, en el cual el sistema describe, la mayoría del tiempo, dinámicas periódicas con repentinos estallidos caóticos. Como consecuencia los mínimos se concentran mayoritariamente en las regiones donde anteriormente se encontraban los mínimos

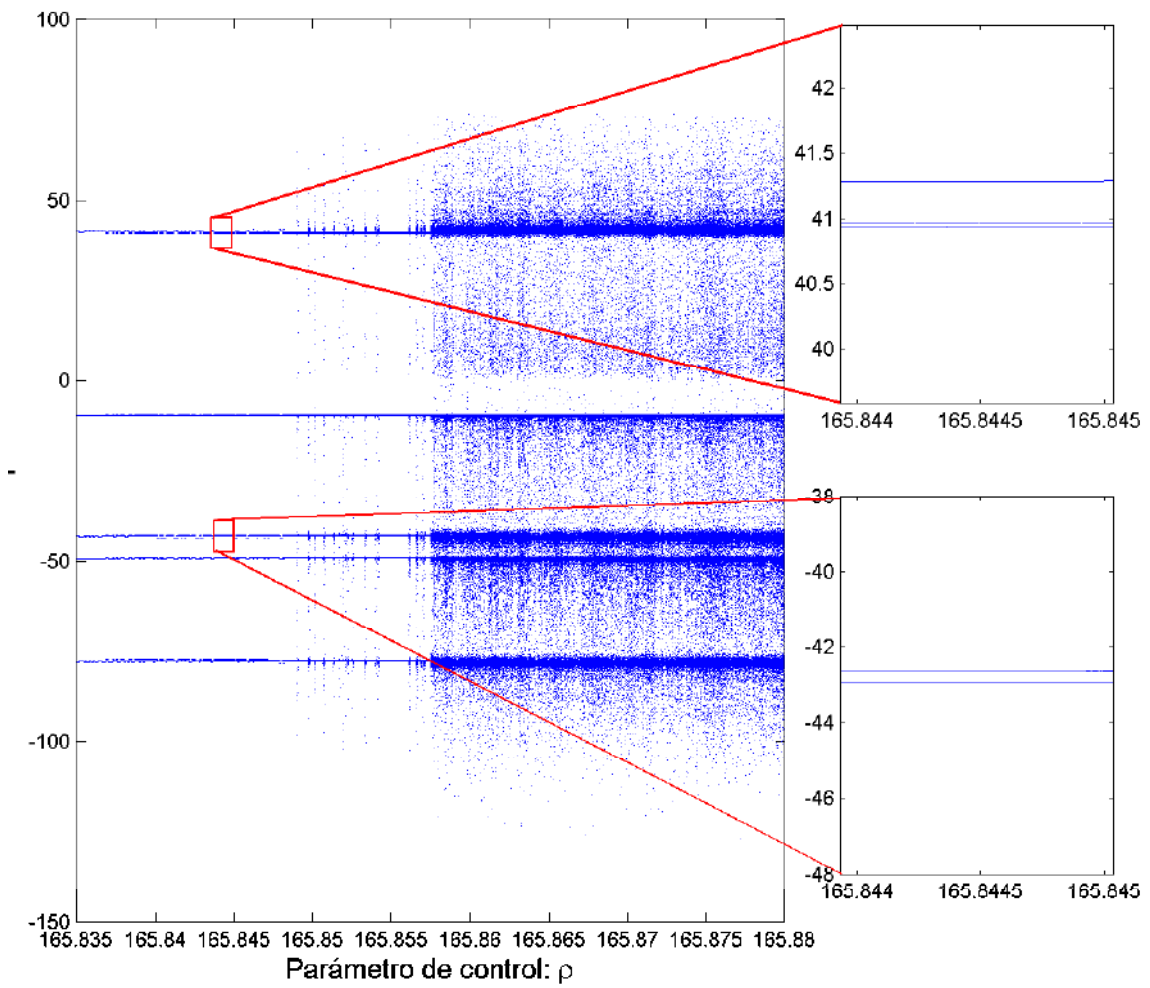


Figura 4.11: Detalles del diagrama de bifurcación para los períodos de orden superior existentes en la región II del sistema de Lorenz.

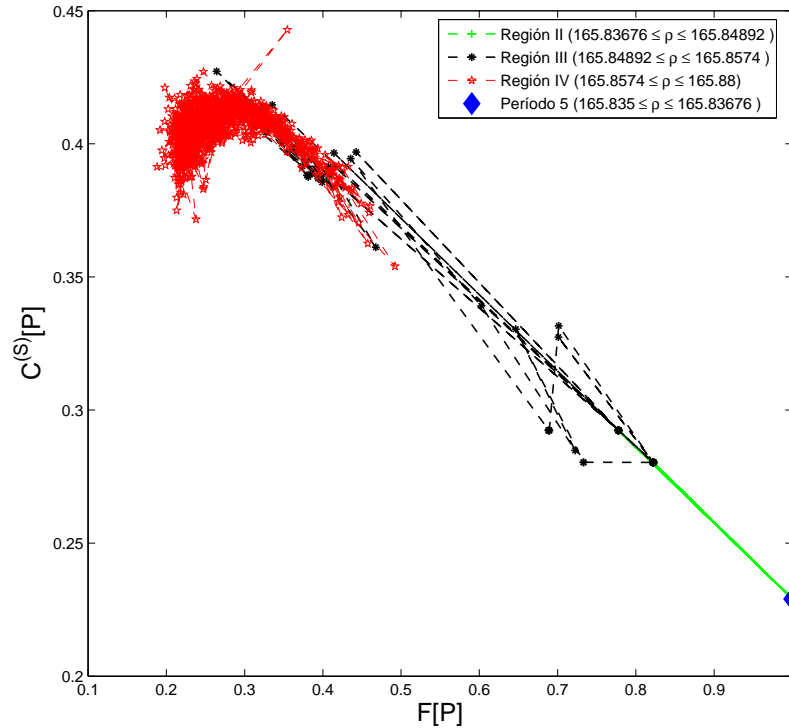


Figura 4.12: Plano $F - C$ para el sistema de Lorenz.

de las dinámicas periódicas, con algunas mínimas, correspondientes a los estallidos caóticos, que se encuentran en otras regiones del espacio de mínimos.

En la figura 4.9 se distingue cómo la densidad de puntos del diagrama de bifurcación tiende a homogeneizarse a medida que aumentamos el valor de ρ (esto se hace muy notorio a partir de $\rho \approx 165,88$). En simultáneo, los gráficos de complejidad y Fisher parecen tener menores fluctuaciones alrededor de los valores $C^{(S)} \simeq 0,4$ y $F \simeq 0,25$, característicos para esta región.

En la figura 4.12 vemos un gráfico de $C^{(S)}$ versus F para el sistema de Lorenz en el rango del parámetro de control $165,835 \leq \rho \leq 166$. Iniciamos el análisis de este gráfico desde el punto asociado con una dinámica periódica de período cinco ($165,835 \leq \rho \leq 165,83676$). Nos encontramos luego con una trayectoria que se mueve intermitentemente entre el punto inicial y $(F, C^{(S)}) \approx (0,82, 0,28)$, para, más tarde, desarrollar una intermitencia similar entre el punto inicial y $(F, C^{(S)}) \approx (0,77, 0,29)$. Esta trayectoria, asociada con la región II del gráfico 4.9, culmina en este punto. La trayectoria asociada a la región III realiza incursiones a la esquina superior izquierda del gráfico $F - C$. Como ya se ha notado en el caso de la transición al caos por doblamiento de período esta zona del gráfico está asociada a dinámicas caóticas. Por último, nos encontramos con la trayectoria correspondiente a la región IV, que se encuentra enteramente en la zona del gráfico $F - C$ asociada al caos. Hay que notar que originalmente esta trayectoria se encuentra más perfilada hacia el centro del gráfico; no obstante, a medida que seguimos la trayectoria, lo que es equivalente a aumentar el valor del parámetro de control, la misma tiende a ubicarse más hacia la izquierda, lo cual es una clara señal de que la intermitencia da paso a una dinámica puramente caótica.

4.3. Intermitencia tipo II

Oscilador de un grado de libertad paramétricamente excitado

Se analizó el sistema [1, 47]

$$\ddot{x} + 0,2\dot{x} + x + 1,5x^2 + 0,5x^3 + Fx \cos(\omega t) = 0 \quad (4.8)$$

con $F = 0,85$ fijo en $1,606 < \omega < 1,608$ con $\Delta\omega = 0,000004$. En esta región, experimenta una bifurcación Hopf subcrítica que lo lleva de un atractor periódico a un atractor aperiódico a través de una transición intermitente de tipo II.

En la figura 4.13 se muestran las series temporales correspondientes a la variable $v = \dot{x}$ y los espacios fase del sistema (4.8) para tres valores de ω .

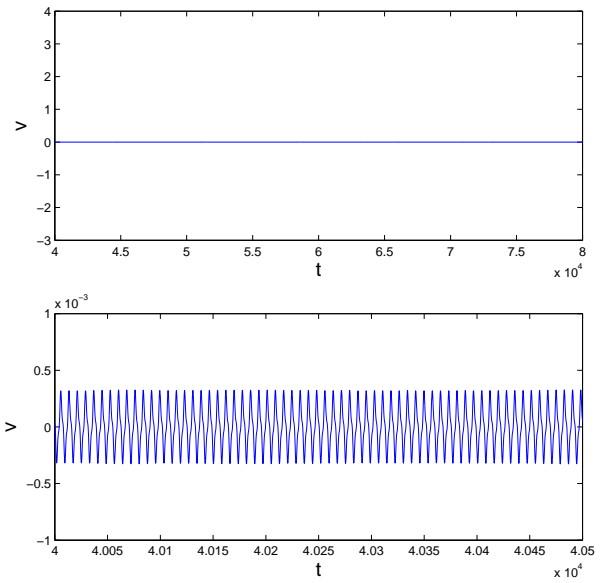
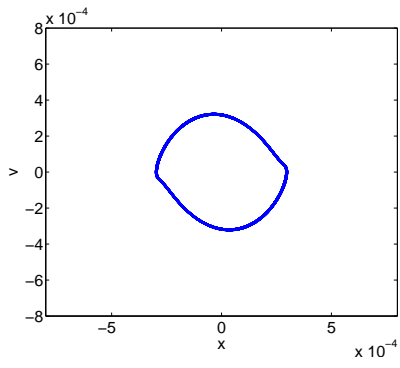
Para cada valor de ω se utilizaron condiciones aleatorias $0 < x, \dot{x} < 1$. Se integraron 80000 unidades temporales a pasos de 0,1. Se descartaron 40000 de estas unidades temporales. Se calcularon los mínimos de la serie temporal correspondiente a la variable $v = \dot{x}$ del sistema. Con la serie de mínimos se realizó un histograma en la región de mínimos $[\dot{x}_{min}, \dot{x}_{max}] = [-3,5; 1]$.

El diagrama de bifurcación junto con los gráficos de $C^{(S)}$ y la medida de Fisher para $1,6067 < \omega < 1,60775$ se muestran en la figura 4.14. Se ve como para $\omega \lesssim 1,606816$ la serie tiene una periodicidad de período uno. En esta región $C^{(S)} = 0$ y $F = 1$. En este proceso de intermitencia, a diferencia del caso de tipo I, no se producen periodicidades de orden superior a medida que aumenta el parámetro de control.

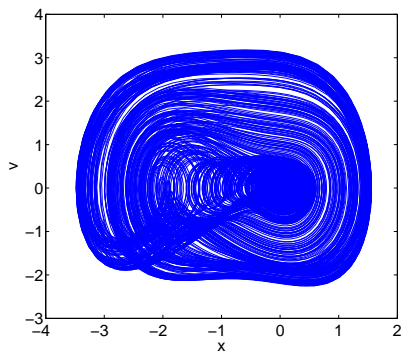
Como se ve en la región II del diagrama de bifurcación, a medida que incrementamos el valor de ω , comienzan a aparecer dinámicas caóticas. Las mismas ocurren con más frecuencia y en un rango mayor de ω mientras más alto es el valor del parámetro de control. Esto se da hasta que eventualmente no se ven dinámicas periódicas entre los estallidos caóticos ($\omega \gtrsim 1,607432$). En los valores de ω correspondientes a esos estallidos caóticos, tanto la medida de Fisher como la complejidad presentan picos agudos.

En la zona III, el sistema responde de forma caótica. Aquí los valores típicos de las medidas son $C^{(S)} \simeq 0,34$ y $F \simeq 0,05$.

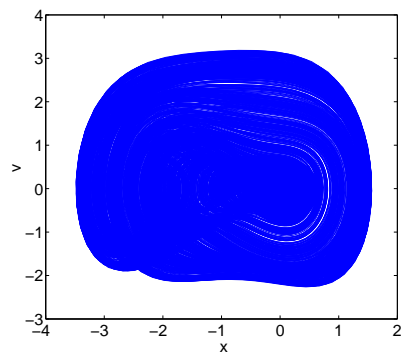
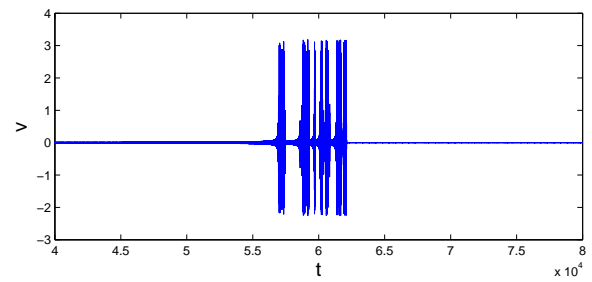
En el gráfico $F - C$ (figura 4.15) podemos observar un punto asociado a una periodicidad de período uno ubicado en el punto $(F; C) = (1; 0)$. Si comenzamos a analizar el gráfico desde este punto, nos encontramos luego con el fragmento de la trayectoria en este plano asociada a los datos de la región II del diagrama de bifurcación del sistema. Como ya dijimos, en esta región el sistema presenta una dinámica periódica con estallidos caóticos que ocurren con mayor frecuencia a medida que aumentamos el parámetro de control. En el gráfico $F - C$ esto se traduce en que la trayectoria se desplaza desde el punto de periodicidad 1 hasta la región $\{(F; C) \mid 0 < F < 0,4, 0,3 < C < 0,5\}$ del gráfico, típicamente asociada con las dinámicas caóticas, para retornar luego al punto inicial. Estas excursiones se producen más frecuentemente a medida que aumentamos el parámetro de control y, paralelamente, la trayectoria invierte más tiempo en la región asociada al caos. Este proceso se da hasta que la trayectoria se instala definitivamente en la zona de las dinámicas caóticas del gráfico.



(a) $\omega = 1,6067$



(b) $\omega = 1,6069$



(c) $\omega = 1,6076$

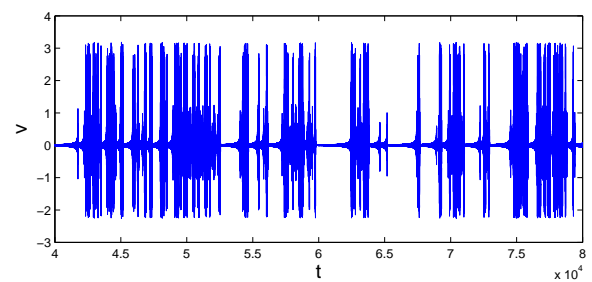


Figura 4.13: Espacios fase y series temporales $v = \dot{x}$ correspondientes al sistema (4.8) para distintos valores de ω .

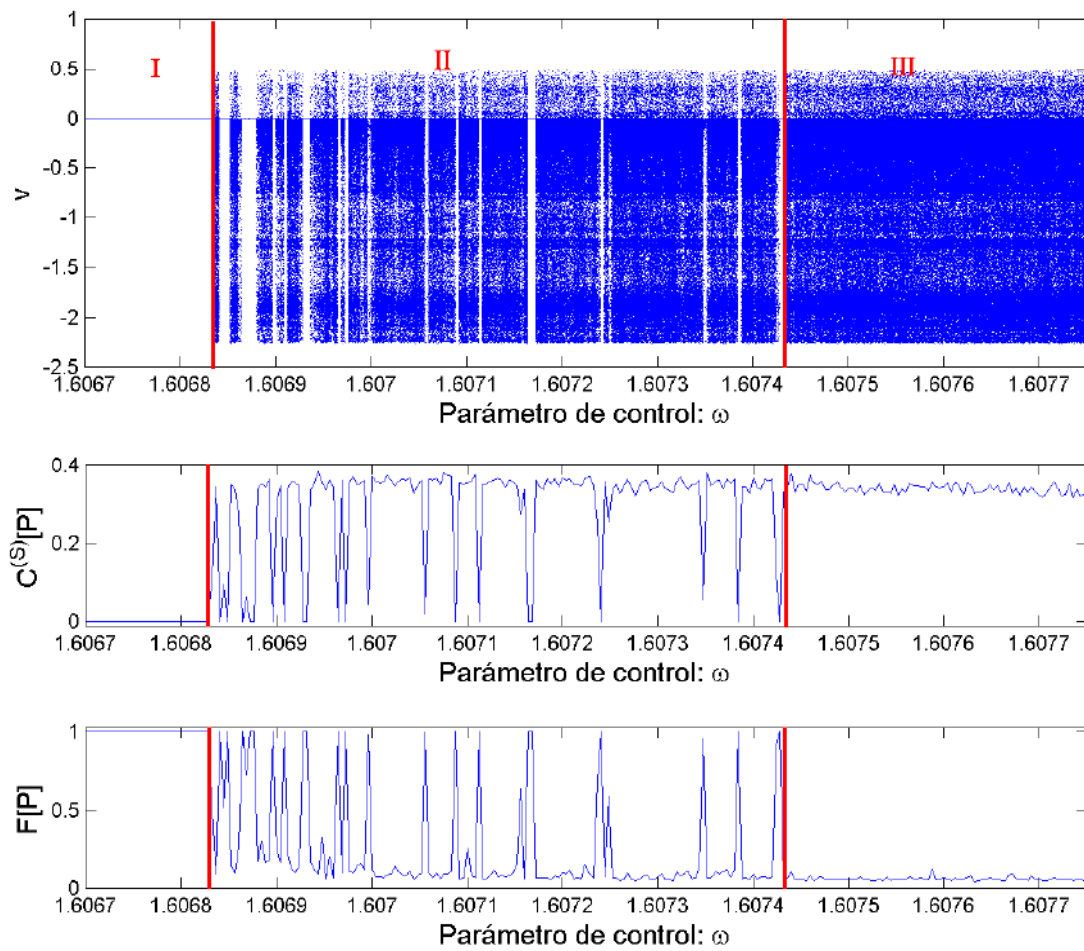


Figura 4.14: Diagrama de bifurcación, F y $C^{(S)}$ en función de ω para el sistema (4.8).

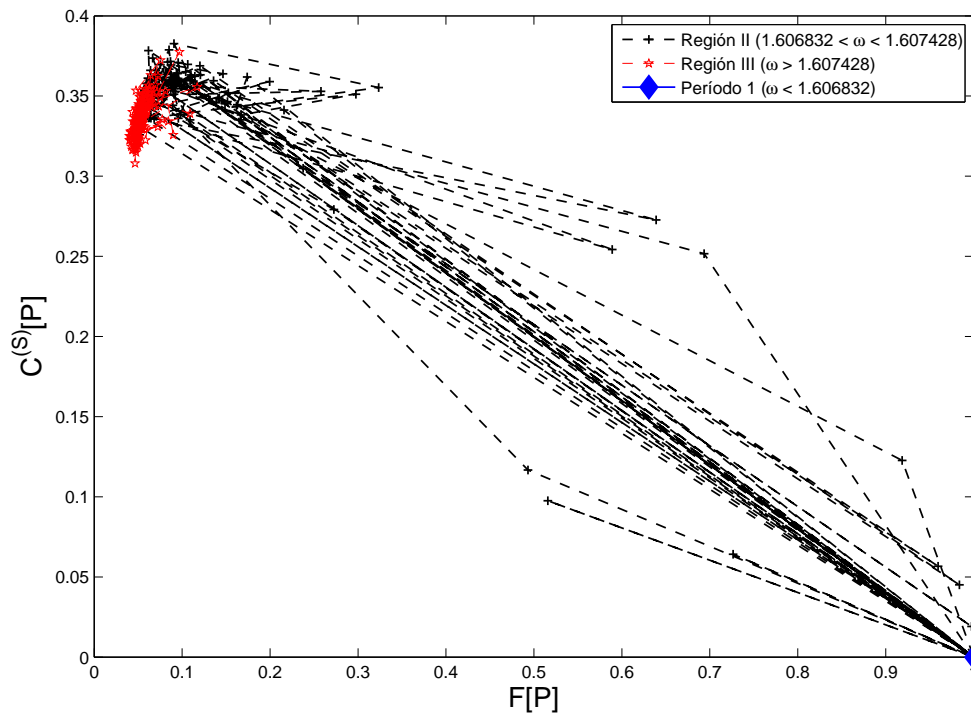


Figura 4.15: Gráfico $F - C$ para el sistema (4.8).

Conclusiones

El presente trabajo me permitió arribar a las siguientes conclusiones:

- Tanto la medida de Fisher como la complejidad estadística basada en entropía de Shannon resultan herramientas útiles para distinguir entre dinámicas caóticas y periódicas de diversos períodos en sistemas de tiempo continuo a través del análisis de los mínimos de sus series temporales. También permiten diferenciar las tres transiciones al caos analizadas. Para este último punto, resulta de suma utilidad el estudio del plano $F - C$, donde la trayectoria correspondiente a un sistema en estudio se ubica en distintas regiones según la dinámica que experimente.
- Las medidas de complejidad basadas en la entropía de Tsallis tienen una dinámica cualitativamente análoga a la medida basada en entropía de Shannon. Para $q < 1$ los valores de las primeras medidas son menores que los de $C^{(S)}$, mientras que para $q > 1$, resultan mayores. Las medidas $C_q^{(T)}$ parecen ser más sensibles a las variaciones de tamaño de la región ocupada en el espacio de mínimos por una serie asociada a un atractor caótico; sin embargo, para poder tener evidencias concluyentes de ello sería necesario estudiar en más detalle las regiones caóticas propiamente dichas.
- El método de Bandt y Pompe tiene una ventaja por sobre el método de histogramas para la construcción de distribuciones de probabilidad: no requiere determinar previamente la longitud de los atractores en estudio. No obstante, debido al ordenamiento que el método de Bandt y Pompe lleva a cabo sobre los elementos de la distribución de probabilidades, la aplicación sobre estas de la medida de Fisher carece de significado.
- El método de histogramas presenta otro inconveniente: la pérdida de detalles en las distribuciones si el ancho de los canales es tal que no permite distinguir características sutiles de las dinámicas de los sistemas estudiados. Si bien esta pérdida de precisión puede solucionarse aumentando el número de canales, en un primer análisis los resultados pueden llevar a hipótesis erróneas sobre la respuesta del sistema dinámico. Es notable la variación de los valores de las medidas debido al ancho de la región de mínimos utilizada para la construcción de las distribuciones de probabilidad. Esto se evidencia con más claridad para movimientos aperiódicos, donde la trayectoria en el espacio fase ocupa todo el atractor.

Apéndice A

Conceptos de estabilidad

A.1. Estabilidad de Lyapunov

Mapas

Una solución $\{u_k\}$ de un mapa se dice estable según Lyapunov si, dado un número pequeño $\epsilon > 0$, existe un número $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que cualquier otra solución $\{v_k\}$ para la cual $\|u_k - v_k\| < \delta$ en $k = m$ satisface que $\|u_k - v_k\| < \epsilon$ para todo $k > m$, $k, m \in \mathbb{Z}^+$. Para la estabilidad de Lyapunov, dos órbitas de un mapa iniciadas en dos puntos vecinos en un cierto tiempo deben permanecer "cerca" una de otra para todos los tiempos futuros.

Sistemas de tiempo continuo

Una solución $u(T)$ de un sistema autónomo o no autónomo de ecuaciones diferenciales se dice estable según el criterio de Lyapunov si, dado un número pequeño $\epsilon > 0$, existe un número $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que cualquier otra solución $v(T)$ para la cual $\|u - v\| < \delta$ en $t = t_0$ satisface que $\|u - v\| < \epsilon$, $\forall t > t_0$. En un sistema no autónomo, δ también será función de t_0 . Si u es estable según Lyapunov, entonces, cualquier otra solución que esté inicialmente cerca de ésta permanece así y está confinada a un tubo formado por la unión de esferas de radio ϵ centradas en puntos a lo largo de la trayectoria $u(t)$. Para sistemas no autónomos tendremos un tubo ϵ en el espacio de estado extendido. En sistemas autónomos, la estabilidad de Lyapunov es también llamada estabilidad uniforme porque δ es independiente de t_0 .

A.2. Estabilidad asintótica

Mapas

Una solución $\{u_k\}$ de un mapa se dice es asintóticamente estable si es estable según Lyapunov y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - v_k\| \longrightarrow 0. \quad (\text{A.1})$$

Sistemas de tiempo continuo

Una solución $u(t)$ de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas o no autónomas se dice es asintóticamente estable si es estable según Lyapunov y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u - v\| \longrightarrow 0. \quad (\text{A.2})$$

A.3. Estabilidad de Poincaré

En las secciones A.1 y A.2 comparamos qué tan cerca se hallaban dos curvas integrales, iniciadas en dos condiciones iniciales diferentes, en el mismo instante t . Este enfoque es restrictivo, y de acuerdo con él, aún una solución periódica de un sistema autónomo no lineal es inestable. Por ejemplo, consideremos dos soluciones periódicas del oscilador de Duffing no amortiguado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^3 - 2\mu x_2 \end{aligned} \tag{A.3}$$

con $\mu = 0$. Estamos interesados en la estabilidad de la solución periódica u cuya órbita es Γ_1 . Esta órbita es obtenida de integrar numéricamente A.3 con la condición inicial $(0; 0,5)$. Otra solución v corresponde a la órbita Γ_2 y fue obtenida de las condiciones iniciales $(0; 0,6)$. Debido a las condiciones iniciales diferentes, los períodos de oscilación son distintos. En $t = 0$ tenemos $\|u - v\| = 0,1$.

Después de $t = 30$ unidades, nos movemos al punto $y = (0,5263; 0,1068)$ sobre Γ_1 y al punto $z = (-0,6369; 0,1914)$ sobre Γ_2 . Entonces $\|u - v\| = 1,1663$.

Podemos elegir dos condiciones iniciales cercanas, pero eventualmente ocurrirán grandes separaciones entre las curvas integrales respectivas en el espacio (x_1, x_2, t) después de un cierto número de ciclos debido a las diferencias de los períodos asociados. Entonces, aunque las dos órbitas están próximas una de otra, de acuerdo con la definición de estabilidad de Lyapunov, la solución u es inestable porque las curvas integrales no se encuentran cercanas entre sí. Para remediar esto, se introduce la noción de estabilidad orbital o estabilidad de Poincaré.

Supongamos que Γ_1 representa la órbita de u y Γ_2 representa la órbita de v para todo tiempo. Las soluciones periódicas u y v tienen diferentes períodos T_1 y T_2 y, por tanto, los movimientos correspondientes evolucionan en diferentes escalas temporales. Se dice que la órbita Γ_1 es estable orbitalmente si, dado un número pequeño $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\|u(t=0) - v(t=\tau)\| < \delta$ para algún τ , entonces existen t_1 y t_2 para los cuales $\|u(t_1) - v(t_2)\| < \epsilon$. Además, si Γ_2 tiende a Γ_1 cuando $t \rightarrow \infty$ entonces decimos que Γ_1 es asintóticamente estable. Para la estabilidad de Poincaré, examinamos qué tan cerca están las órbitas en el espacio estado.

A.4. Estabilidad de Lagrange (estabilidad acotada)

Mapas

Una solución $\{u_k\}$ de un mapa se dice es acotadamente estable si $\|u_k\| < L, \forall k \in \mathbb{Z}$, donde L es una cantidad finita positiva.

Sistemas de tiempo continuo

Se dice que una solución $u(t)$ de un sistema de tiempo continuo es acotadamente estable si $\|u\| < L, \forall t$, cuando L es una cantidad de finita positiva.

A.5. Estabilidad a través de la función de Lyapunov

Consideramos las soluciones de equilibrio (soluciones que satisfacen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{M})$ para todo tiempo, sus estados correspondientes son constantes en el tiempo) de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{M})$ para algún valor de \mathbf{M}_0 y \mathbf{x}_0 . Asumamos que existe una función escalar \mathcal{C}^1 , $V(\mathbf{x}, \mathbf{M})$ definida en un vecindario de \mathbf{x}_0 tal que $V(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}_0) = 0$ y $V(\mathbf{x}, \mathbf{M}) > 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. La función V es llamada función de Lyapunov. La derivada de V a lo largo de las curvas solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{M})$ es $\dot{V} = \nabla V \cdot \mathbf{F}$.

De los teoremas de estabilidad asociados tenemos:

- (a) si $\dot{V} \leq 0$ en el vecindario elegido de \mathbf{x}_0 , entonces \mathbf{x}_0 es estable;
- (b) si $\dot{V} < 0$ el vecindario elegido de \mathbf{x}_0 , entonces \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable.

El método de Lyapunov tiene una falla. Consideremos la estabilidad del origen $(0, 0)$ en el oscilador de Duffing. Considerando $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_1^4$ se llega a que $\dot{V} = -2\mu x_2^2$, con $\mu > 0$, con lo que según el primer teorema de estabilidad de Lyapunov esta solución es estable. No obstante puede demostrarse por otros métodos que $(0, 0)$ es asintóticamente estable. Sin embargo, como $\dot{V} = -2\mu x_2^2 \leq 0$ para todo vecindario del origen, el segundo teorema de estabilidad de Lyapunov no puede aplicarse. De hecho, la condición provista por el segundo teorema de Lyapunov es suficiente, no necesaria.

Esta falla puede salvarse usando el teorema de Krasovskii: Sea $V(\mathbf{x})$ una función escalar \mathcal{C}^1 , $V(\mathbf{x}_0) = 0$ y

$$D_l = \{\mathbf{x} | V(\mathbf{x}) \leq l\},$$

$$V(\mathbf{x}) > 0 \text{ para } \mathbf{x} \in D_l \text{ y } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ para } \mathbf{x} \in D_l.$$

Si no hay otra solución $\mathbf{x}^*(t)$ para $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{M})$, además de \mathbf{x}_0 , que caiga completamente dentro de D_l y para la cual $\dot{V}(\mathbf{x}^*(t)) \equiv 0$, entonces toda solución que comience en D_l tiende a \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable.

Apéndice B

Linealización cerca de una solución de equilibrio

Sea \mathbf{x}_0 la solución de (1.4) para $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{R}^m$. Para determinar la estabilidad de esta solución de equilibrio, incorporamos una perturbación $\mathbf{y}(t) \ll \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}(t). \quad (\text{B.1})$$

Sustituyendo (B.1) en (1.3)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}(t); \mathbf{M}_0). \quad (\text{B.2})$$

Asumiendo que \mathbf{F} es al menos \mathcal{C}^2 , expandiendo en serie de Taylor alrededor de \mathbf{x}_0 , y reteniendo sólo los términos lineales

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{M}_0) + D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{M}_0)\mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2) \quad (\text{B.3})$$

o

$$\dot{\mathbf{y}} \approx D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{M}_0)\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (\text{B.4})$$

donde \mathbf{A} es una matriz de derivadas parciales, llamada matriz Jacobiana.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

La solución de (B.4) que pasa a través de las condiciones iniciales $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ puede expresarse

$$\mathbf{y} = \exp((t - t_0)\mathbf{A})\mathbf{y}_0 \quad (\text{B.5})$$

donde

$$\exp((t - t_0)\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^j}{j!} \mathbf{A}^j. \quad (\text{B.6})$$

Si los autovalores λ_i de \mathbf{A} son distintos, entonces existe una matriz \mathbf{P} tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, con

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Si λ_i son complejos, P también lo es. Las columnas de P son los autovectores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ de A correspondientes a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Introduciendo la transformación $\mathbf{y} = P\mathbf{v}$ en (B.4)

$$P\dot{\mathbf{v}} = AP\mathbf{v} \text{ o } \dot{\mathbf{v}} = D\mathbf{v} \quad (\text{B.7})$$

entonces

$$\mathbf{v} = \exp((t - t_0)D)\mathbf{v}_0 \quad (\text{B.8})$$

$\exp((t - t_0)D)$ es una matriz diagonal con valores $\exp((t - t_0)\lambda_i)$. $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0) = P^{-1}\mathbf{y}_0$. En función de \mathbf{y} esta solución es

$$\mathbf{y} = P \exp((t - t_0)D)P^{-1}\mathbf{y}_0. \quad (\text{B.9})$$

Los autovalores de A son conocidos como exponentes característicos asociados con \mathbf{F} en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}_0)$. Si los autovalores no son distintos, entonces existe una matriz P tal que $P^{-1}AP = J$, donde J es una forma canónica Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & J_2 & \cdots & \phi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi & \phi & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

donde ϕ son matrices con elementos cero y

$$J_m = \begin{bmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_m & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Sea n_m la multiplicidad del m -ésimo autovalor. Las columnas \mathbf{p}_i de P son autovectores generalizados correspondientes a los λ_i . Hay n_m autovectores generalizados correspondientes a λ_m . Esos vectores son soluciones no triviales de

$$(A - \lambda_m I)\mathbf{p} = 0; (A - \lambda_m I)^2\mathbf{p} = 0; \dots; (A - \lambda_m I)^{n_m}\mathbf{p} = 0 \quad (\text{B.10})$$

con \mathbf{p} una matriz columna.

Apéndice C

Análisis de la estabilidad de los puntos fijos del oscilador de Duffing

Consideremos el sistema (Oscilador de Duffing)

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{C.1}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3 - 2\mu x_2. \tag{C.2}$$

Tiene los puntos fijos $(0, 0)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Linealizando en la vecindad de los puntos fijos

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 3x_1^2 & -2\mu \end{bmatrix} y.$$

Los autovalores de la matriz jacobiana son

$$\lambda_1 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - 1 + 3x_1^2} \tag{C.3a}$$

$$\lambda_2 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - 1 + 3x_1^2}. \tag{C.3b}$$

Para los tres puntos fijos, ambos autovalores tienen partes reales distintas de 0 cuando $\mu \neq 0$, por lo que los tres son puntos fijos hiperbólicos.

En la vecindad de $(0, 0)$ tenemos

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{bmatrix} y$$

y

$$\lambda_1 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - 1} \tag{C.4a}$$

$$\lambda_2 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}. \tag{C.4b}$$

Por tanto $(0, 0)$ es

$\mu = 0$	Centro
$\mu \leq -1$	Nodo inestable
$-1 < \mu < 0$	Foco inestable
$0 < \mu < 1$	Foco estable
$\mu \geq 1$	Nodo estable

En la vecindad de $(-1, 0)$ o $(1, 0)$ tenemos

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2\mu \end{bmatrix} y$$

y

$$\lambda_1 = -\mu - \sqrt{\mu^2 + 2} \tag{C.5a}$$

$$\lambda_2 = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2}. \tag{C.5b}$$

Concluimos que los puntos fijos $(-1,0)$ y $(1,0)$ son puntos silla para cualquier valor de μ ya que uno de los autovalores será positivo mientras que el otro será negativo $\forall \mu$.

En la figura [C.1](#) se presentan retratos de fase correspondientes al oscilador de Duffing para distintos valores de μ .

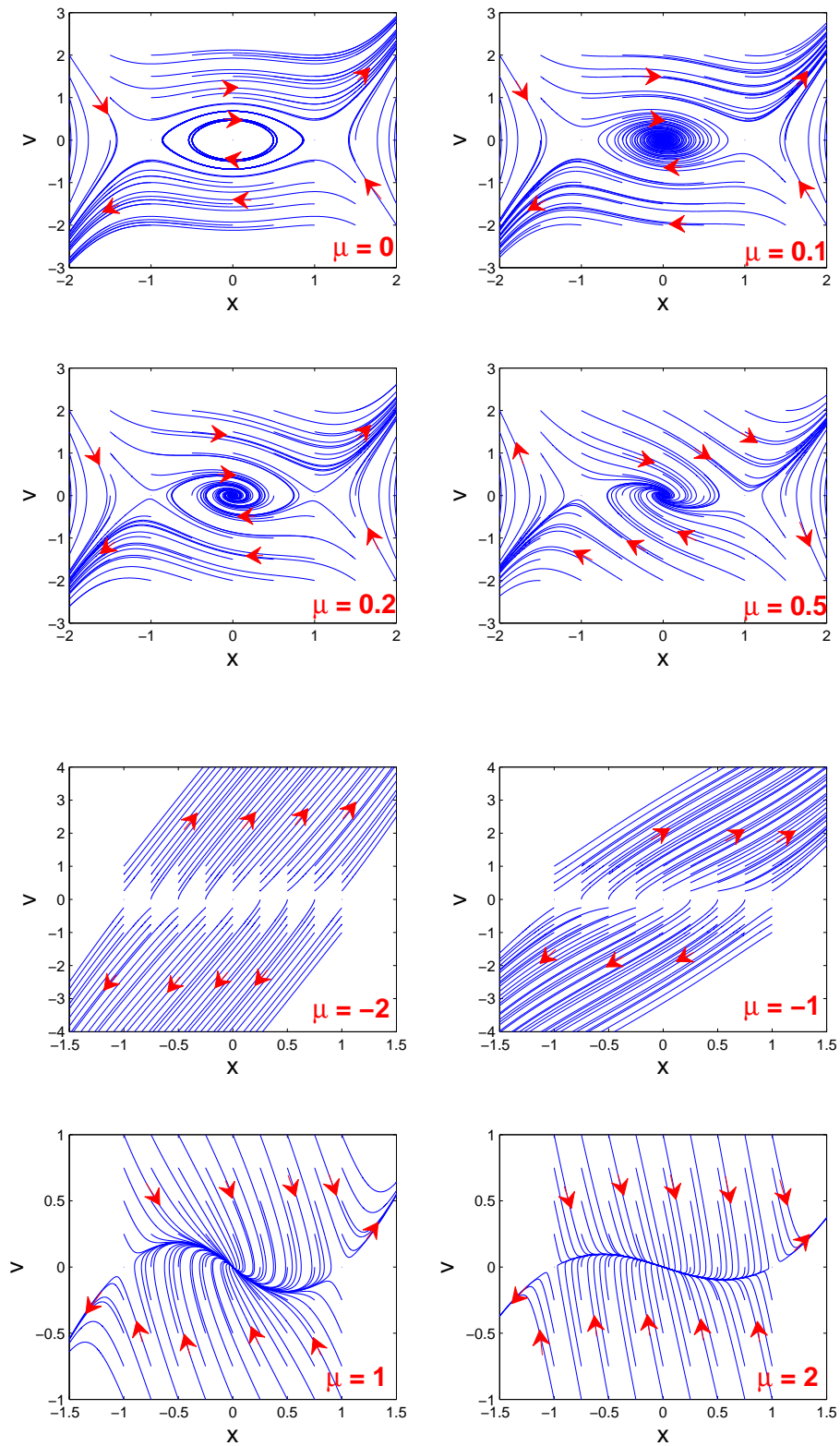


Figura C.1: Oscilador de Duffing con distintos valores de μ .

Apéndice D

Puntos fijos y bifurcaciones en mapas

D.1. Puntos fijos de mapas

Un punto fijo \mathbf{x}_0 del mapa

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, \mathbf{M}) \quad (\text{D.1})$$

Satisface la condición

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}^n(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}_0) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{D.2})$$

Con $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ el valor del vector de los parámetros de control.

Una órbita iniciada en un punto fijo del mapa es el punto fijo en sí mismo.

D.2. Gráfico de telaraña: representación gráfica de una órbita

Supongamos que tenemos un mapa unidimensional representado por la función $f(x)$. Para graficar una órbita del mismo se procede a graficar $f(x)$ junto con la diagonal $y = x$. Cualquier intersección de $y = f(x)$ con $y = x$ es un punto fijo.

Consideremos una condición inicial x_0 . Iniciando desde el eje de las abscisas con ese valor inicial, el resultado $f(x_0)$ es hallado gráficamente una línea desde esta posición hasta la gráfica de $f(x)$. Llamemos $x_1 = f(x_0)$ a este primer resultado. Para hallar $f(x_1)$ es necesario considerar a x_1 como valor inicial. Para eso se dibuja una línea horizontal desde el punto $(x_0; f(x_0))$ a la línea diagonal $y = x$. Posicionados en el punto correspondiente de la línea diagonal, se procede a marcar una nueva línea vertical hasta la gráfica de la función $f(x)$, obteniéndose $x_2 = f(x_1)$. Más tarde se realiza la gráfica horizontal para convertir este resultado en un nuevo valor de inicio. Continuando de este modo es posible construir una gráfica de la órbita $\{x_0; f(x_0); f(x_1); \dots\}$.

Ejemplo:

En la figura D.1 se puede observar un gráfico de telaraña para una órbita del mapa $g(x) = 2x(1 - x)$ con el valor inicial 0,1.

D.3. Estabilidad de puntos fijos en mapas

Para determinar la estabilidad de \mathbf{x}_0 le introducimos una perturbación y hallamos de (D.1)

$$\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_k, \mathbf{M}_0) \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.3})$$

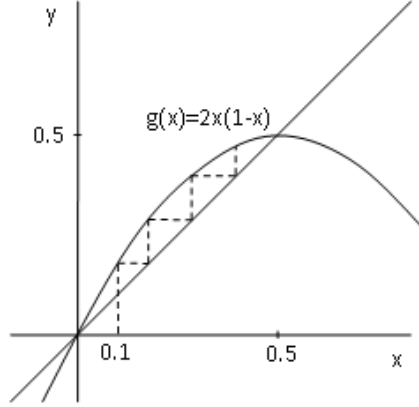


Figura D.1: Gráfico de telaraña para una órbita de $g(x) = 2x(1-x)$ con el valor inicial 0,1.

Expandiendo \mathbf{F} en serie de Taylor, usando (D.2) y linealizando en \mathbf{y}_k

$$\mathbf{y}_{k+1} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}_0)\mathbf{y}_k = A\mathbf{y}_k. \quad (\text{D.4})$$

$D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$: matriz de primeras derivadas parciales de \mathbf{F} evaluadas en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}_0)$.

Introducimos la transformación lineal $\mathbf{y} = P\mathbf{z}$ en (D.4)

$$P\mathbf{z}_{k+1} = AP\mathbf{z}_k. \quad (\text{D.5})$$

Asumiendo que P es no singular, multiplicamos (D.5) por izquierda por P^{-1}

$$\mathbf{z}_{k+1} = J\mathbf{z}_k \quad J = P^{-1}AP. \quad (\text{D.6})$$

Elegimos P tal que J sea una forma canónica Jordan. Si los autovalores ρ_i de A son distintos, J es una matriz diagonal con elementos $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Entonces reescribimos (D.6)

$$z_{k+1}^{(m)} = \rho_m z_k^{(m)} \quad m = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{D.7})$$

donde $z^{(m)}$ es el m-esimo componente de z . Cuando $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} z_k^{(m)} &\rightarrow 0 && \text{si } |\rho_m| < 1 \\ z_k^{(m)} &\rightarrow \infty && \text{si } |\rho_m| > 1 \\ z_k^{(m)} &= z_0^{(m)} && \text{si } \rho_m = 1 \\ z_{2k+1}^{(m)} &= -z_0^{(m)} && \text{si } \rho_m = -1 \\ z_{2k}^{(m)} &= z_0^{(m)} && \text{si } \rho_m = -1. \end{aligned}$$

Para establecer la estabilidad del punto fijo \mathbf{x}_0 , examinamos la ubicación de los autovalores de A en el plano complejo (figura D.2) con respecto al círculo de radio unidad. Si todos los autovalores de A son tales que están dentro o fuera del círculo de radio unidad entonces \mathbf{x}_0 es un punto fijo hiperbólico. Un punto fijo hiperbólico es llamado punto silla si algunos autovalores están dentro del círculo unidad y el resto de ellos se encuentra fuera. Es llamado sumidero si todos los autovalores están dentro del círculo. Se lo llama fuente si todos los autovalores están fuera del

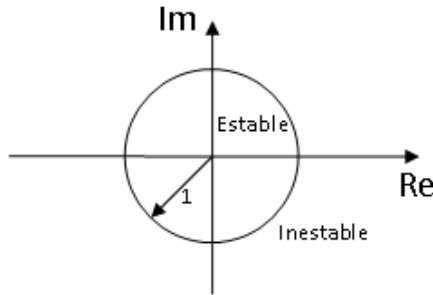


Figura D.2: Círculo de radio unidad en el plano complejo.

círculo. Si uno o más de los autovalores de A se encuentran en el círculo unidad el punto fijo correspondiente es llamado punto fijo no hiperbólico.

El teorema de Hartman-Grobman es aplicable a puntos fijos de mapas. Entonces, para un punto fijo hiperbólico, si todos los autovalores de A caen dentro del círculo unidad, se dice que \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable. Si al menos uno de los autovalores cae fuera del círculo unidad, el punto fijo es inestable.

Por otra parte, si ninguno de los autovalores cae fuera del círculo unidad, un análisis lineal no es suficiente para determinar la estabilidad de un punto fijo no hiperbólico.

Una solución \mathbf{x} que satisface

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}_0) \quad (\text{D.8})$$

donde $k \geq 1$ es llamada punto k -periódico o punto periódico de orden k del mapa \mathbf{F} . Este punto es un punto fijo del mapa \mathbf{G} , formado por k sucesivas iteraciones de \mathbf{F}

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{M}) = \mathbf{F}^k(\mathbf{x}, \mathbf{M}). \quad (\text{D.9})$$

La órbita iniciada en \mathbf{x}_0 es llamada órbita periódica de período k .

Un ejemplo de gráfico de telaraña típico de una órbita periódica es la figura D.3.

En cuanto la estabilidad de órbitas periódicas podemos decir que si \mathbf{F} es un mapa y \mathbf{x}_0 es un punto k -periódico, la órbita k -periódica de \mathbf{x}_0 es un sumidero periódico si \mathbf{x}_0 es un sumidero del mapa \mathbf{F}^k . La órbita es una fuente periódica si \mathbf{x}_0 es una fuente del mapa \mathbf{F}^k .

En el caso particular de trabajar con mapas unidimensionales, $x_{k+1} = f(x_k)$, resulta conveniente definir el vecindario ε de un punto fijo x_0 , $N_\varepsilon(x_0)$, como $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$ con ε un número pequeño positivo.

En este contexto, si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo x en $N_\varepsilon(x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$, entonces x_0 es un sumidero. Además, si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada x en $N_\varepsilon(x_0)$, excepto para x_0 , el mapa evoluciona fuera de $N_\varepsilon(x_0)$ entonces x_0 es una fuente.

Podemos decir además que:

- I. Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un sumidero.
- II. Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es una fuente.

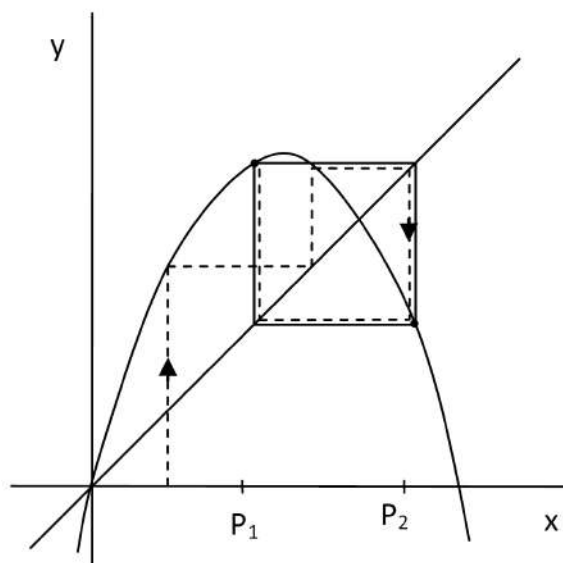


Figura D.3: Gráfico de telaraña de una órbita periódica.

Para órbitas periódicas de mapas unidimensionales el estudio de estabilidad consiste en: la órbita periódica $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es un sumidero si $|f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_k)| < 1$, y es una fuente si $|f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_k)| > 1$.

Ejemplo: Un punto fijo del mapa logístico

$$x_{k+1} = 4\alpha x_k(1 - x_k) \quad (\text{D.10})$$

es $x = 0$. Es estable para $0 < \alpha < 0,25$ porque $|F'(x = 0)| < 1$. Para $\alpha > 0,25$, existe un punto fijo no trivial $x_0 = 1 - \frac{0,25}{\alpha}$. Ya que $F'(x_0) = 2 - 4\alpha$, este punto fijo es estable cuando $0,25 < \alpha < 0,75$. En $\alpha = 0,75$, este punto es no hiperbólico.

D.4. Bifurcaciones de mapas

Un punto fijo no hiperbólico de un mapa puede experimentar una bifurcación cuando un parámetro de control se varía.

Hay tres condiciones en las que un punto fijo \mathbf{x}_0 puede ser no hiperbólico en \mathbf{M}_0 :

- I. $D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{M}_0)$ tiene un autovalor igual a 1, con los restantes $(n - 1)$ autovalores dentro del círculo unidad,
- II. $D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{M}_0)$ tiene un autovalor igual a -1, con los restantes $(n - 1)$ autovalores dentro del círculo unidad,
- III. $D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{M}_0)$ tiene un par de autovalores complejos conjugados en el círculo unidad, con los restantes $(n - 2)$ autovalores dentro del círculo unidad.

Cuando un punto fijo es no hiperbólico porque un autovalor es -1 , la bifurcación asociada no tiene ningún análogo con una bifurcación de un punto fijo en un sistema de tiempo continuo.

Cuando un punto fijo es no hiperbólico con un par de autovalores complejos conjugados en el círculo unidad, el punto fijo del mapa puede experimentar una bifurcación Hopf.

Ejemplos:

Mapa	$x_{k+1} = x_k + \mu - x_k^2$	$x_{k+1} = x_k + \mu x_k - x_k^2$	$x_{k+1} = x_k + \mu x_k - \alpha x_k^3$
Puntos fijos	<ul style="list-style-type: none"> $x_{10} = \sqrt{\mu}$ $x_{20} = -\sqrt{\mu}$ Para $\mu < 0$ no hay puntos críticos 	<ul style="list-style-type: none"> $x_{10} = 0$ (trivial) $x_{20} = \mu$ (no trivial) 	<ul style="list-style-type: none"> $x_{10} = 0$ (trivial) $x_{20,30} = \pm\sqrt{-\mu/\alpha}$ (no trivial)
Autovalores de la matriz jacobiana	$\rho = 1 - x_{j0}$	$\rho = 1 + \mu - 2x_{j0}$	$\rho = 1 + \mu + 3\alpha x_{j0}^2$
Estabilidad	<ul style="list-style-type: none"> x_{20} es un nodo inestable para $\mu > 0$ ($\rho > 1$). x_{10} es un nodo inestable para $0 < \mu < 1$. 	<ul style="list-style-type: none"> x_{10} es estable para $-2 < \mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$. x_{20} es inestable para $\mu < 0$ y estable para $0 < \mu < 2$ 	<ul style="list-style-type: none"> x_{10} es estable para $-2 < \mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$. Para $\alpha < 0$, $x_{20,30}$ existen para $\mu > 0$, y son estables para $0 < \mu < 1$ Para $\alpha > 0$, $x_{20,30}$ existen para $\mu < 0$, y son inestables
Diagrama estado control			

Apéndice E

Mapas de Poincaré: Estabilidad de soluciones periódicas de sistemas de tiempo continuo

Una sección de Poincaré es una hipersuperficie en el espacio estado que es transversal al flujo de un dado sistema de ecuaciones.

En general, el intervalo de tiempo entre las intersecciones sucesivas de una trayectoria con una sección de Poincaré elegida no es constante.

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots$ las intersecciones sucesivas de una trayectoria de un sistema autónomo con una sección de Poincaré, tal que todas las intersecciones están hechas en la misma dirección. Si la trayectoria evoluciona en un espacio n -dimensional, entonces la sección de Poincaré es una superficie $(n-1)$ -dimensional, y cada punto de esta sección especificada por $(n-1)$ coordenadas. La transformación o mapa que lleva una intersección a la subsiguiente en la sección de Poincaré es llamada mapa de Poincaré. Este mapa es descripto por

$$\mathbf{X}_{m+1} = P(\mathbf{X}_m) \quad (\text{E.1})$$

con m entero. El mapa de Poincaré es un mapa invertible.

En las figuras E.1(a) y E.1(b) se muestran las órbitas periódicas de un sistema autónomo en el correspondiente espacio estado. La órbita periódica de la figura E.1(a) intercepta la hipersuperficie Σ transversalmente una sola vez antes de cerrarse. Por otra parte, la órbita periódica en la figura E.1(b) intercepta la hipersuperficie dos veces antes de cerrarse.

En el caso de la figura E.1(a), el punto $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{eq}$ es un punto fijo del mapa de Poincaré P asociado

$$\mathbf{X}_{eq} = P(\mathbf{X}_{eq}). \quad (\text{E.2})$$

En general, una órbita periódica de un sistema de tiempo continuo puede interceptar una sección de Poincaré k veces antes de cerrarse. Consideremos una de esas k intersecciones como \mathbf{X}_{eq} . Entonces el correspondiente mapa de Poincaré es tal que

$$\mathbf{X}_{eq} = P^k(\mathbf{X}_{eq}), \quad (\text{E.3})$$

implicando que \mathbf{X}_{eq} es un punto k -periódico de P o un punto fijo de P^k .

La estabilidad de una órbita periódica de un sistema de tiempo continuo puede entonces ser determinada examinando la estabilidad del punto fijo de un mapa asociado.

Uno puede obtener diferentes mapas de Poincaré para la órbita considerada. Sin embargo los mapas de las diferentes secciones exhiben la misma dinámica cualitativa.

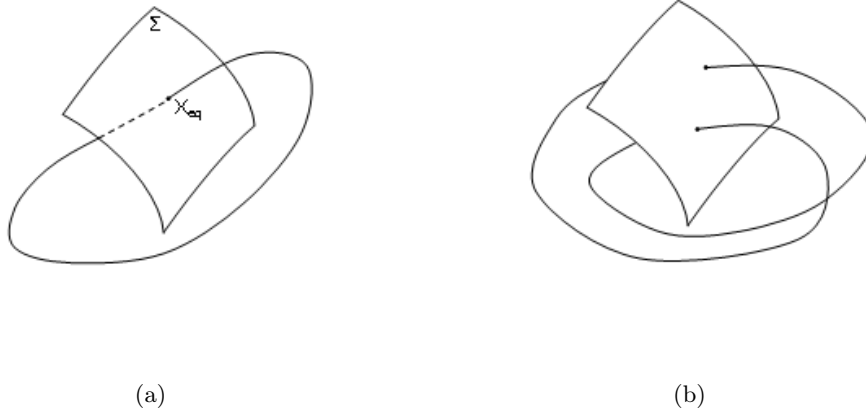


Figura E.1: Secciones de Poincaré de órbitas periódicas.

E.1. Mapa de Poincaré para soluciones cuasiperiódicas

Consideremos una órbita cuasiperiódica de período dos caracterizada por las frecuencias ω_1 y ω_2 . Supongamos que, para visualizarla en un toroide utilizamos las coordenadas angulares $\theta_1 = \omega_1 t$ y $\theta_2 = \omega_2 t$ con $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 4$. Para definir una sección de Poincaré para la órbita cuasiperiódica, elegimos el plano $\theta_1 = \theta_{10}$. Iniciando en el tiempo $t_0 = \theta_{10}/\omega_1$, tomamos los puntos de la órbita a intervalos $\frac{2\pi}{\omega_1}$. Usando $\hat{\theta}_k$ para denotar θ_2 en la k -ésima intersección de la órbita con la sección tenemos

$$\hat{\theta}_k = \omega_2 \left(t_0 + k \frac{2\pi}{\omega_1} \right). \quad (\text{E.4})$$

Por tanto el mapa de Poincaré asociado es

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (\text{E.5})$$

Este mapa no tiene puntos fijos o puntos periódicos si las frecuencias son inconmensurables. Más aún, las interacciones de este mapa se encuentran densamente ubicadas sobre una curva cerrada. Existe un número infinito de intersecciones con la sección de Poincaré ya que la órbita cuasiperiódica no se cierra sobre sí misma. Aunque la curva cerrada se encuentra densamente poblada por los puntos de intersección, las sucesivas intersecciones con la sección de Poincaré no atraviesan secuencialmente la curva cerrada.

Cuando las frecuencias son conmensurables, la órbita correspondiente en el toroide se cierra sobre sí misma y es periódica. Si las frecuencias son iguales (E.5) tiene un punto fijo. Por otro lado, si la razón de las frecuencias es un número racional p/q con p y q primos relativos, (E.5) tiene un punto de período- q .

Ejemplo: consideremos el sistema no autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 - x_1^3 + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t). \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

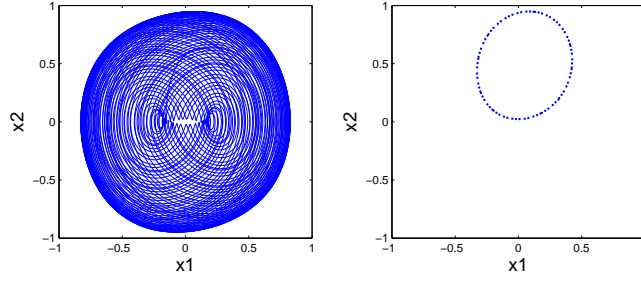


Figura E.2: Espacio fase y mapa de Poincaré correspondiente al sistema E.7.

Después del transitorio, la solución de este sistema describe una órbita cuasiperiódica de período dos caracterizada por las frecuencias inconmensurables 1 y $\sqrt{2}$. Para construir la sección de Poincaré reescribimos (E.7)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 - x_1^3 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) \\
 \dot{\theta}_1 &= 1 \\
 \dot{\theta}_2 &= \sqrt{2}.
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

Definimos la sección

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times S^1 \times S^1 \mid \theta_1 = \theta_{10} = 0\}. \tag{E.8}$$

En la figura E.2 se presenta el espacio fase y el mapa de Poincaré construido para la órbita cuasiperiódica del sistema E.7.

E.1.1. Tiempo de giro y número de rotación

En general, los puntos discretos en una sección de Poincaré de una órbita cuasiperiódica de período dos se encuentran en una curva cerrada. Supongamos que sobre una sección bidimensional, \hat{x} representa el punto inicial y $P^i(\hat{x})$ es el punto discreto obtenido después de la i -ésima iteración del mapa de Poincaré P . Supongamos que la i_{k-1} -ésima y la i_k -ésima iteraciones encierran \hat{x} tras haber dado k vueltas alrededor de la línea cerrada. El límite

$$T_w = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{i_k}{k}. \tag{E.9}$$

es llamado tiempo de giro. T_w representa el número medio de iteraciones de P requerida para regresar a \hat{x} . Este tiempo es un número real para una órbita cuasiperiódica de período dos y un entero para una órbita periódica.

El inverso del tiempo de giro es llamado rotación

$$\rho = \frac{1}{T_w}. \tag{E.10}$$

Una definición alternativa del número de rotación es la siguiente.

En la figura E.3, elegimos un punto de referencia x_r dentro de la curva cerrada y denotamos el ángulo entre los vectores $P^i(\hat{x}) - x_r$ y $P^{i-1}(\hat{x}) - x_r$ por α_i , con $0 < \alpha_i < 2\pi$. Entonces

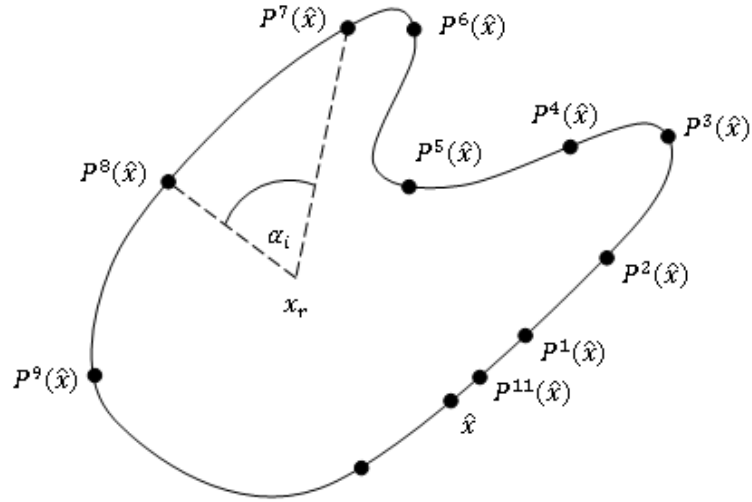


Figura E.3: Sección de Poincaré de una órbita cuasiperiódica bi-periódica.

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{k}. \quad (\text{E.11})$$

E.1.2. Mapas de Poincaré de segundo orden

Una órbita cuasiperiódica de período dos es reducida a una trayectoria cerrada densamente llena de puntos en una sección de Poincaré. Es posible reducir esta trayectoria de puntos a un solo punto, el cual es un punto fijo del llamado mapa de Poincaré de segundo orden.

En la figura E.4 se ilustra una sección de Poincaré Σ_1 de una órbita cuasiperiódica de período dos tridimensional. Los puntos de intersección caen en la curva cerrada Γ_1 . La segunda sección de Poincaré Σ_2 se encuentra orientada a lo largo del vector e_2 . La intersección de Γ_1 con Σ_2 es el punto fijo del mapa asociado a Σ_2 .

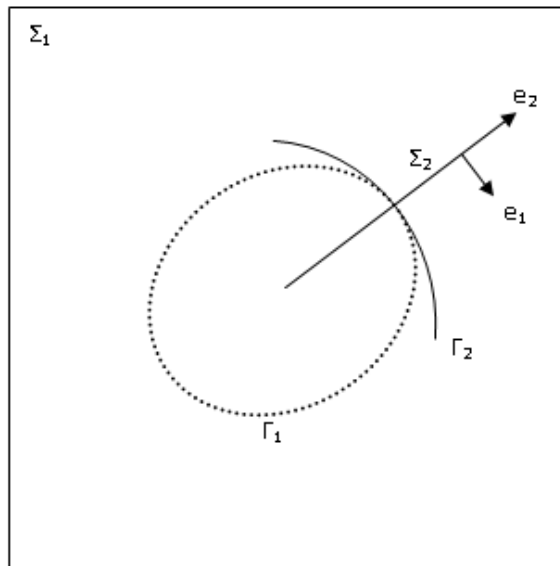


Figura E.4: ilustración de la primera y segunda secciones de Poincaré de una órbita cuasiperiódica de período dos tridimensional.

Apéndice F

Caos en mapas

Además de puntos fijos, puntos periódicos y conjuntos densos de puntos en trayectorias cerradas, los mapas tienen otros tipos de soluciones, llamadas caóticas. Éstas se caracterizan por órbitas erráticas.

Ejemplo: Consideremos el mapa logístico (D.10). Este puede considerarse como un modelo ecológico idealizado para la variación anual de la población de una especie de insectos.

Consideremos $M(x) = 4\alpha x(1 - x)$.

Cuando $0 \leq \alpha < 0,25$, el mapa tiene un sumidero en $x = 0$ cuya cuenca de atracción es todo el intervalo $[0, 1]$.

Si $0,25 < \alpha < 0,75$, el mapa tiene dos puntos fijos, $x = 0$ y $x = 1 - \frac{1}{4\alpha}$. $x = 0$ es inestable para $\alpha > 0,25$ ya que $M'(0) > 1$. Se ve que $M'(1 - \frac{1}{4\alpha}) = 2 - 4\alpha$, entonces, para $0,25 < \alpha < 0,75$, $x = 1 - \frac{1}{4\alpha}$ es estable ($|2 - 4\alpha| < 1$). Por tanto, $x = 1 - \frac{1}{4\alpha}$ es un punto fijo atractor en ese rango. Puede mostrarse que no hay órbitas periódicas de períodos $p > 1$ para $\alpha < 0,75$.

En la figura F.1, se muestran las órbitas del mapa logístico (D.10) para cuatro valores diferentes de α . La figura inferior corresponde a un atractor aperiódico o caótico.

En el diagrama de bifurcación (figura F.2) (en el que se presentan sólo las ramas estables de la bifurcación) de este mapa se ve cómo a medida que α es incrementado gradualmente desde 0,7, el punto fijo no trivial experimenta una bifurcación de doblamiento de período en $\alpha_1 = 0,75$, dando lugar a dos soluciones estables bi-periódicas. Vemos que a medida que α se incrementa se producen nuevas bifurcaciones de doblamiento de período, por ejemplo

Bifurcación de doblamiento de período	Resultado
$\alpha_2 = 0,8623795$	Soluciones estables cuadri-periódicas
$\alpha_3 = 0,8860225$	Soluciones estables ocho-periódicas
$\alpha_4 = 0,8911018$	Soluciones estables dieciséis-periódicas

A medida que se suceden las bifurcaciones, el período del atractor se incrementa. Eventualmente, la secuencia culminará en un atractor infinito-periódico o aperiódico en $\alpha_\infty \simeq 0,8924864$.

Se ha demostrado que, para todas las secuencias de doblamiento de período asociadas con mapas suaves con un máximo cuadrático, los valores del parámetro de control siguen una escala de acuerdo a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} = \delta = 4,66292016 \dots \quad (\text{F.1})$$

Esta constante es el llamado número de Feigenbaum.

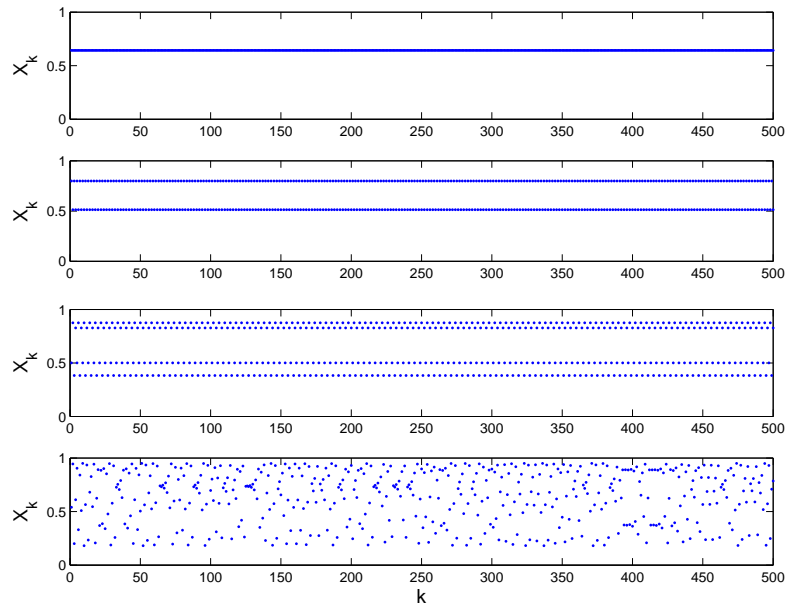


Figura F.1: Órbitas del mapa logístico diferentes valores de α .

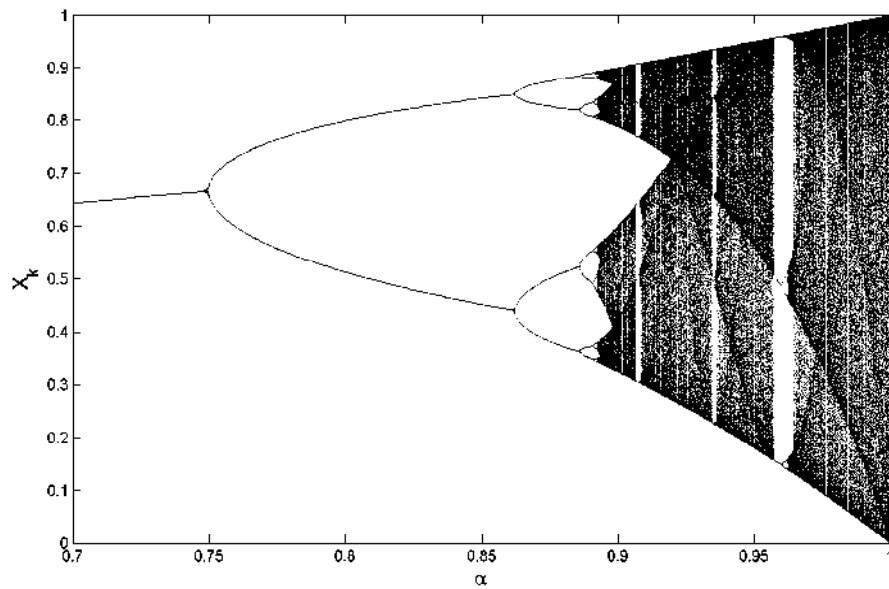


Figura F.2: Órbitas del mapa logístico diferentes valores de α .

En el diagrama de bifurcación puede verse que no se tienen soluciones aperiódicas para todos los $\alpha > \alpha_\infty$, sino que existen ciertos rangos del parámetro de control en los que encontramos atractores k -periódicos. La más grande de estas ventanas corresponde a atractores tri-periódicos, y numéricamente se encuentra que, estas soluciones surgen a través de una bifurcación silla nodo en $\alpha \approx 0,957$ y existe en el intervalo $0,957 < \alpha < 0,9625$.

Vemos que, luego de surgir, la órbita tri-periódica, deviene en una cascada de doblamientos de período en la cual se producen órbitas de período 3×2^m . Estas se vuelven caóticas y sus bandas se van fundiendo hasta que se alcanza un intervalo en el que el caos aparentemente aparece en tres bandas. Finalmente, en $\alpha \approx 0,9625$, el atractor abruptamente se ensancha en una única banda de tamaño similar al que ocupaba la órbita tri-periódica. Llamamos ventana tri-periódica al rango de valores de α entre el punto donde la órbita tri-periódica nace y el punto donde las tres bandas se funden en una sola.

Apéndice G

Programas desarrollados

En este apéndice se presentan los programas utilizados para analizar el sistema 4.1. Los mismos fueron desarrollados con el programa Matlab.

El sistema en cuestión fue reescrito como un sistema de dos ecuaciones de primer orden acopladas, que se halla en la función `ejemplo55.m`:

```
function lrz=ejemplo55(t,y)

global g

w=1;
omega=2;
mu=1;
e=0.1;
delta=5;
a=4;

lrz=[y(2); -w^2*y(1) - e*(2*mu*y(2) + delta*y(1)^2 + g*cos(omega*t)*y(1)) - (e^2)*a*y(1)^3];
```

Para un primer acercamiento a la dinámica del sistema se usó el programa `serie_ejemplo55.m`, que grafica las series temporales y el espacio fase para un valor del parámetro de control. En base a estos gráficos se realizó el estudio exploratorio del sistema.

```
% =====
% Programa "serie_ejemplo55.m"
% =====

% Este programa es usado para el estudio exploratorio del sistema (4.1).

clear all

global g
% Declaración de una cantidad como global. De este modo,
% el valor que le demos en este script se le asigna
% automáticamente en las funciones que sean llamadas.

% Paso de integración
```

```

dt=0.01;

% tiempo de integración
tf=7000;

%Parámetros de no linealidad
g=5.3;

% Cálculo de condiciones iniciales dentro del atractor
% =====
x0=-10.5+rand;
y0=9.5+rand;
% =====

% Vector de tiempo
tspan=0:dt:tf;

% Integración del sistema
% =====
[t,y]=ode45('ejemplo55',tspan,[x0 y0]);

% Esta línea resuelve el sistema de ecuaciones definido en la función
% ejemplo55.m. [x0 y0] es un vector que contiene las condiciones
% iniciales, y tspan es el vector de tiempo en el que se evaluarán las
% ecuaciones. t es un vector formado por los tiempos en los que se
% integró el sistema; en este caso t=tspan. y es una matriz de nxm,
% siendo n el número de variables del sistema y m el largo de t.

% =====

% Eliminación de régimen transitorio
y(1:50000,:)=[];
t(1:50000)=[];

% Gráficos de las series temporales
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,1),'b')
subplot(2,1,2)
plot(t,y(:,2),'r')

% Gráfico del espacio fase
figure
plot(y(:,1),y(:,2))
xlabel('x','FontSize',16)
ylabel('dx/dt','FontSize',16)

```

Se creó una función que devuelve los mínimos de la serie de que se le ingresa:

```

%=====
%Esta funcion realiza una serie temporal con los mínimos de una serie
%temporal introducida.
%Primero busca los minimos locales por comparación de
%cada valor de la serie con su inmediato anterior y posterior. Luego toma
%ese mínimo local y sus valores anterior y posterior, con estos 3 datos
%ajusta una parábola. Calcula el valor y del vértice de esa parábola
%ajustada (mínimo local) y con estos valores construye una serie temporal.
%=====

function [r,B]=distanciaminimos(z)

cont=1;

for i=2:length(z(:,2))-1
    if z(i,2)<z(i-1,2)&& z(i,2)<z(i+1,2)
        Y=[z(i-1,2);z(i,2);z(i+1,2)];
        x1=z(i-1,1);
        x2=z(i,1);
        x3=z(i+1,1);
        M=[(x1)^2 x1 1;(x2)^2 x2 1;(x3)^2 x3 1];
        X=M\Y;
        r(cont,1)=-X(2)/(2*X(1));
        B(cont,1)=X(1)*(r(cont))^2+X(2)*(r(cont))+X(3);
        cont=cont+1;
        clear X Y
    end
end
end

```

Para obtener las distribuciones de probabilidad se realizaron dos programas, uno basado en el método de histogramas, y otro, en el método de Bandt y Pompe:

Método de histogramas:

```

function p=Histograma(x)

% x tiene que ser una serie de minimos

% minimo de x (definido en base al estudio exploratorio previo)
x1=-14.5;

% maximo de x (definido en base al estudio exploratorio previo)
x2=-13.5;

if x1==x2
    z=ones(length(x),1);
else
    z=(x-x1)/(x2-x1);
end

```

```

p=zeros(1,1000);

for j=1:length(z)
n=ceil(1000*z(j));
if n==0
n=1;
end
p(n)=p(n)+1;
end

p=p/sum(p);

```

Método de Bandt y Pompe:

```

function p=bandt_y_pompe(x,tau,dimension)

%Esta funcion realiza una distribucion de probabilidades(vector p) en base
%al metodo de bandt y pompe. Los datos de ingreso son los puntos de la
%serie (x, que tiene que ser un vector fila), el paso que se da para
%considerar una nueva permutacion (tau), y el numero de elementos de la
%serie que constituyen una permutacion.

D=dimension;
Num=factorial(D);
d=10.^[0:D-1];          %d es un vector formado por potencias de 10

%en cada paso del siguiente for
% 1-construyo la matriz h que contiene una de las permutaciones del mapa
% 2-ordeno h con la función sort. La funcion sort me devuelve una matriz de
%   dos columnas, [h, ind], la primera contiene los valores ordenados en
%   forma creciente; la segunda contiene la ubicacion en el vector original
%   de cada elemento.
% 3-construyo un elemento del vector hn el cual contiene las permutaciones
%   surgidas en el mapa como números
for i=1:floor((length(x)-D+tau)/tau)
    indices=[(i-1)*tau+1:D+(i-1)*tau];
    h=x(indices);
    [h,ind]=sort(h);
    hn(i)=sum(ind.*d);
    clear indices
end

%Construyo el vector p que tiene un elemento por cada una de las
%permutaciones que aparecen en el mapa. el valor de cada uno de esos
%elementos es igual al número de veces que apareció esa permutación.
hn=sort(hn)';
p=zeros(1,Num);
j=1;

```

```

po=hn(1);
for i=1:length(hn)

    if hn(i)==po;
        p(j)=p(j)+1;
    else
        po=hn(i);
        j=j+1;
        p(j)=p(j)+1;
    end

end

p=p/sum(p);

```

Se programaron además códigos para realizar los cálculos de las medidas de complejidad basadas en las entropías de Shannon y Tsallis y de la medida de información de Fisher:

Complejidad basada en la entropía de Shannon:

```

function C=complejidad(p)

N = length(p);

%Selección de los datos distintos de cero de la distribución
ind = p~=0;
p1 = p(ind);
%Cálculo de la entropía de la distribución y de la entropía de la
%distribución uniforme
S = - sum(p1.*log(p1));
Smax=log(N);

%Cálculo del desequilibrio Jensen-Shannon (con el parametro beta = 1/2)de
%la distribución
pe = (1/N)*ones(1,N);
D = - sum((p/2+pe/2).*log(p/2+pe/2))-(1/2)*S-(1/2)*log(N);

Q0 = - 2/(((N+1)/N)*log(N+1)-2*log(2*N)+log(N));

C=Q0*D*S/Smax;

```

Complejidad basada en la entropía de Tsallis:

```

function C=tsallis(p,q)

N = length(p);

%Cálculo de la entropía de la distribución y de la entropía de la
%distribución uniforme
S = sum(p-(p).^q)/(q-1);
Smax=(1-N^(1-q))/(q-1);

%Cálculo del desequilibrio Jensen-Tsallis (con el parametro beta = 1/2)de

```

```

%la distribución
pe = (1/N)*ones(1,N);

ind = p~0;
p1 = p(ind);

D1=1/2*(1/(q-1)*sum((p1.^q).*(((p1+(1/N))/2).^(1-q))-p1.^(1-q))));

D2=1/2*(1/(q-1)*sum((pe.^q).*(((p+pe)/2).^(1-q))-(pe.^(1-q))));

D =D1 +D2;

%Cálculo de la constante de normalización del desequilibrio
p2=zeros(1,N);
p2(floor(N/2))=1;

indQ = p2~0;
p3 = p2(indQ);

D1Q=1/2*(1/(q-1)*sum((p3.^q).*(((p3+(1/N))/2).^(1-q))-p3.^(1-q))));

D2Q=1/2*(1/(q-1)*sum((pe.^q).*(((p2+pe)/2).^(1-q))-(pe.^(1-q))));

DQ =D1Q +D2Q;

Q0=1/DQ;

C=Q0*D*S/Smax;

```

Medida de información de Fisher:

```

function F=fisher(p)

f=0;

p=[0 p 0];

for i=1:length(p)-1
    if ((p(i)~0)|| (p(i+1)~0))
        f=f+2*((p(i+1)-p(i))^2)/(p(i+1)+p(i));
    end
end

F=f/4;

```

Con las funciones anteriores, se escribieron dos programas que calculan las medidas de interés y realizan gráficos comparativos de las mismas en conjunto con el diagrama de bifurcación del sistema.

El primero de éstos programas utiliza el método de histogramas para obtener las distribuciones de probabilidad y calcula con ellas $C^{(S)}$ y $F[P]$.

```

% =====
% Este programa grafica la complejidad de Shannon y la medida de Fisher
% de una serie temporal del oscilador (4.1) vs. los valores del parametro
% g.
% =====

clear all

global g

% Paso de integración
dt=0.01;

% tiempo de integración
tf=7000;

% Rango del parámetro de control estudiado
da=0.002;
G=4.2:da:5.3;

C=zeros(length(G),1);
F=zeros(length(G),1);

% Vector de tiempo
tspan=0:dt:tf;

for i=1:length(G)
    g=G(i);

    %=====
    % Condiciones iniciales aleatorias generadas para cada valor de g
    x0=-10.5+rand;
    y0=9.5+rand;
    %=====

    %=====
    % Integración del sistema para cada g
    [t,y]=ode45('ejemplo55',tspan,[x0 y0]);
    %=====

    %=====
    % Eliminación del régimen transitorio
    X=[t(50001:length(t)) y(50001:length(y),1)];
    %=====

    %=====
    % Cálculo de los mínimos de la serie temporal

```



```

[r,Z]=distanciaminimos(X);
Min(:,i)=Z;
%=====

%=====
% Construcción del diagrama de bifurcación: para cada valor de g se
% grafican los mínimos de la serie temporal calculada. El gráfico se va
% generando a medida que el programa recorre los posibles valores de g.
xm=ones(1,length(Z))*g+rand(1,length(Z))*da;
subplot(2,1,1)
plot(xm,Z,'.b','MarkerSize',0.7)
hold on
%=====

%=====
% Cálculo de la distribución de probabilidades
p=Histograma(Z);
%=====

%=====
%Cálculo de la complejidad de Shannon y la medida de Fisher
C(i)=complejidad(p);
F(i)=fisher(p);
%=====

clear y t X Z
i
end

%Graficado de las medidas calculadas
subplot(4,1,3)
plot(G,C,'b')
xlabel('Parametro de control: g','FontSize',14)
ylabel('C^{(S)}[P]','FontSize',14)
subplot(4,1,4)
plot(G,F,'b')
xlabel('Parametro de control: g','FontSize',14)
ylabel('F[P]','FontSize',14)

```

El segundo programa obtiene las distribuciones de probabilidad a raves del método de Bandt y Pompe y calcula $C^{(S)}$, $C_{q=0,5}^{(T)}$ y $C_{q=2}^{(T)}$.

```

clear all

global g

%parametro de la entropia de tsallis
q=0.5;

```

```

% Paso de integración
dt=0.01;

% tiempo de integración
tf=7000;

%Parametros del Bandt_Pompe
tau=1;
dimension=5;

%Parámetros de no linealidad
da=0.002;
G=4.2:da:5.3;
C=zeros(length(G),1);
T=zeros(length(G),1);

tspan=0:dt:tf;

for i=1:length(G)
    g=G(i);
    x0=-10.5+rand;
    y0=9.5+rand;
    [t,y]=ode45('ejemplo55',tspan,[x0 y0]);
    X=[t(50001:length(t)) y(50001:length(y),1)];
    [r,Z]=distanciaminimos(X);
    Min(:,i)=Z;
    xm=ones(1,length(Z))*g+rand(1,length(Z))*da;
    subplot(2,1,1)
    plot(xm,Z,'.b','MarkerSize',0.7)
    hold on

    p=bandt_y_pompe(Z',tau,dimension);
    C(i)=complejidad(p);
    T(i)=tsallis(p,q);
    clear y t X Z
    i
end

subplot(4,1,3)
plot(G,C,'b')
xlabel('Parametro de control: g','FontSize',14)
ylabel('C(S)[P]','FontSize',14)
subplot(4,1,4)
plot(G,T,'b')
xlabel('Parametro de control: g','FontSize',14)
ylabel('C(T)q=0.5[P]','FontSize',14)

```

Bibliografía

- [1] A.H. Nayfeh B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics. Analytical, Computational and experimental Methods*. Wiley-VCH, 2004.
- [2] E. Ott. *Chaos In Dynamical Systems*. Cambridge Press, 1993.
- [3] K.T. Alligood T.D. Sauer, J.A. Yorke. *Chaos. An Introduction To Dynamical Systems*. Springer, 1997.
- [4] F.A. Bais J.D. Farmer. The physics of information. *SFI Working paper*, 2007.
- [5] E.T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, **106**:620–630, 1957.
- [6] E.T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics II. *Phys. Rev.*, **108**:171–190, 1957.
- [7] E.T. Jaynes. *Brandeis Lectures in Theoretical Physics*, chapter Information Theory and Statistical Mechanics. W.A. Benjamin, INC., 1962.
- [8] S.R.A. Salinas. *Introduction to Statistical Physics*. Springer, 2001.
- [9] M.T. Martín A. Plastino, O.A. Rosso. Generalized statistical complexity measures: Geometrical and analytical properties. *Phys. A*, **369**:439–462, 2006.
- [10] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, **27**:379 – 423, 1948.
- [11] A. Rényi. *On Measures Of Entropy And Information*, chapter Information Theory and Statistical Mechanics. W.A. Benjamin, INC., 1962.
- [12] C. Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *J. of Stat. Phys.*, **52**:479–487, 1988.
- [13] R. Frieden. *Science from Fisher Information*. Cambridge Univ. Press, 2004.
- [14] J.P. Crutchfield K. Young. Inferring statistical complexity. *Phys. Rev. Lett.*, **63**:105–108, 1989.
- [15] J.C. Sprott. *Chaos and Time Series Analysis*. Oxford University Press, 2004.
- [16] J.A. Yorke E. Ott, T.D. Sauer. *Coping with Chaos*. Wiley, 1994.
- [17] R.J. Solomonoff. A formal theory of inductive inference. *Inf. Control*, **7**:1–22, 224–254, 1964.

- [18] A.N. Kolmogorov. Three approaches to the quantitative definition of information. *Problems Inf. Transmission*, **1**:1-7, 1965.
- [19] O.A. Rosso. Generalized statistical complexity measure: a new tool for dynamical systems. Charla semiplenaria de la 95° Reunión de la Asociación de Física Argentina, 2010.
- [20] R. López-Ruiz H.L. Mancini, X. Calbet. A statistical measure of complexity. *Phys. Lett. A*, **209**:321-326, 1995.
- [21] O.A. Rosso-M.T. Martín A. Figliola K. Keller, A. Plastino. Eeg analysis using wavelet-based information tools. *J. Neuroscience Methods*, **153**:163-182, 2006.
- [22] A.M. Kowalski-M.T. Martin A. Plastino A.N. Proto, O.A. Rosso. Wavelet statistical complexity analysis of the classical limit. *Phys. Lett. A*, **311**:180-191, 2003.
- [23] G.L. Ferri F. Pennini, A. Plastino. Lmc-complexity and various chaotic regimes. *Phys. Lett. A*, **373**:2210-2214, 2009.
- [24] M.T. Martín J. Perez, A. Plastino. Fisher information and nonlinear dynamics. *Phys. A*, **291**:523-532, 2001.
- [25] G.E. Powell I.C. Percival. A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of hamiltonian systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **12**:2053, 1979.
- [26] O.A. Rosso M.L. Mairal. Characterization of time dynamical evolution of electroencephalographic epileptic records. *Phys. A*, **312**:469-504, 2002.
- [27] C. Bandt B. Pompe. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series. *Phys. Rev. Lett.*, **88**:174102-1-174102-4, 2002.
- [28] C.E. Shannon W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, 1949.
- [29] A.I. Khinchin. *Mathematical Foundations of Information Theory*. Dover, 1957.
- [30] M.A. Martín F.J. Taguas. Fractal modeling, characterization and simulation of particle-size distribution in soil. *Proc. R. Soc. London*, **A 454**:1457-1468, 1998.
- [31] A. Lobo V. Zucarello J.J. Ibañez, S. De-Alba. Pedodiversity and global soil patterns at coarse scales (with discussion). *Geoderma*, **83**:71-192, 1998.
- [32] J. Bajorath J.W. Godden, F.L. Stahura. Variability of molecular descriptors in compound databases revealed by shannon entropy calculations. *J. of Chem. Inf. and Comp. Sciences*, **40**(3):796-800, 2000.
- [33] L. Xue J. Bajorath F.L. Stahura, J.W. Godden. Distinguishing between natural products and synthetic molecules by descriptor shannon entropy analysis and binary qsar calculations. *J. of Chem. Inf. and Comp. Sciences*, **40**:1245-1252, 2000.
- [34] X. Wen G. Zweiger J.J. Seilhamer R. Somogyi S. Fuhrman, M. J. Cunningham. The application of shannon entropy in the identification of putative drug targets. *Biosystems*, **55**:5-14, 2000.
- [35] C. Ricotta. Bridging the gap between ecological diversity indices and measures of biodiversity with shannon's entropy: comment to izaac and papp. *Ecological Modelling*, **152**:1-3, 2002.

- [36] L. Szeidl C. Ricotta. Towards a unifying approach to diversity measures: Bridging the gap between the shannon entropy and rao's quadratic index. *Theoretical Population Biology*, **70**:237-243, 2006.
- [37] A.C. Santos J. Elias Jr. U.P.C. Neves O. Baffa D.B. de Araujo, W. Tedeschi. Shannon entropy applied to the analysis of event-related fmri time series. *NeuroImage*, **20**:311-317, 2003.
- [38] H. Röpcke T.W. Bouillon A. Hoeft J.Bruhn, L.E. Lehmann. Shannon entropy applied to the measurement of the electroencephalographic effects of desflurane. *American Society of Anesthesiologists*, **95**:30-35, 2001.
- [39] A.R. Gesualdi Mello M. Portes de Albuquerque M. Portes de Albuquerque, I.A. Esquef. Image thresholding using tsallis entropy. *Pattern Recognition Lett.*, **25**:1059-1065, 2004.
- [40] G. Balasis K. Eftaxias M. Kalimeri, C. Papadimitriou. Dynamical complexity detection in pre-seismic emissions using nonadditive tsallis entropy. *Phys. A*, **387**:1161-1172, 2008.
- [41] L. Borland R. Osorio C.Tsallis, C. Anteneodo. Nonextensive statistical mechanics and economics. *Phys. A*, **324**:89-100, 2003.
- [42] A. Plastino A.R. Plastino. Stellar polytropes and tsallis entropy. *Phys. Lett. A*, **174**:384-386, 1993.
- [43] W.K. Wootters. Statistical distance and hilbert space. *Phys. Rev. D*, **23**:357-362, 1981.
- [44] L.D. Zavodney A.H. Nayfeh, N.E. Sanchez. The response of a single-degree-of-freedom system with quadratic and cubic non-linearities to a principal parametric resonance. *J. Sound Vib.*, **129**:417-442, 1989.
- [45] O.E. Rossler. An equation for continuous chaos. *Phys.Lett. A*, **57**:397-398, 1976.
- [46] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**:130-141, 1963.
- [47] J.M. Malasoma C.H. Lamarque, L. Jezequel. Chaotic behavior of a parametrically excited nonlinear mechanical system. *Nonlinear Dyn.*, **5**:153-160. 299, 300, 308-313, 1994.