



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PAMPA  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

TESINA PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO  
DE LICENCIADO EN FÍSICA

**Aplicaciones de las medidas de complejidad estadística**

San Martín, Víctor M.

Santa Rosa, La Pampa  
República Argentina

2013

El presente trabajo de tesina constituye uno de los requisitos necesarios para acceder al título de grado de licenciado en física, otorgado por la Universidad Nacional de la Pampa (UNLPam). Fue desarrollado entre marzo de 2011 y julio de 2013 en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de la Pampa.

Por este medio declaró que se trata de un trabajo propio que no ha sido presentado en la UNLPam ni en ninguna otra institución académica para acceder al título consignado previamente u otro título.

San Martín, Víctor M.

# Agradecimientos

Deseo agradecer a los que, de muchas maneras, me brindaron su ayuda para poder concluir con mi carrera. Expreso mi más sincera gratitud:

- a mis padres, por su apoyo incondicional y sus palabras de aliento en el momento indicado;
- a mis amigos y seres queridos, por compartir mis penas y alegrías;
- a Adolfo "Fito" Olguin, quien me brindó su ayuda desinteresadamente en tiempos oscuros y a quien tengo el honor de poder llamar amigo;
- a mi director Gustavo L. Ferri, por guiarme en el último tramo de mi carrera sin restringir mi iniciativa personal;
- a los profesores, compañeros y amigos de la UNLPam;
- a mi Nación, que me dió, al igual que a miles de jovenes, la posibilidad de explorar el area del conocimiento de mi interes, solo exigiendo a cambio mi esfuerzo y entrega al trabajo.

# Resumen

Las medidas de complejidad estadística han sido aplicadas exitosamente en distintas ramas de la ciencia. En particular, han sido de utilidad para estudiar los regímenes caóticos de sistemas no lineales de tiempo discreto. El objetivo de este trabajo es utilizar una medida de complejidad estadística basada en la medida de información de Shannon, conjuntamente con la medida de información de Fisher, para hacer un análisis de las distintas dinámicas correspondientes a sistemas no lineales de tiempo continuo. Se busca, a través de estas herramientas, procedentes de la teoría de información y la mecánica estadística, distinguir entre dinámicas periódicas de diversos períodos y dinámicas caóticas. Para eso se estudian tres transiciones al caos: la transición a través de un escenario de doblamientos de período, y las intermitencias tipo I y II.

Además, se lleva cabo la comparación entre la complejidad estadística basada en entropía de Shannon y un grupo de medidas de la complejidad construidos a partir de la entropía de Tsallis, para lo que se calculan simultáneamente estas medidas en el caso de la transición por doblamientos de período.

También se busca confrontar dos métodos distintos para la construcción de distribuciones de probabilidad a partir de series temporales de un sistema de tiempo continuo: un método basado en la construcción de histogramas y el método desarrollado por C. Bandt y B. Pompe. Esta comparación se logra calculando la distribución de probabilidad por ambos métodos y aplicándoles la complejidad estadística basada en entropía de Shannon.

El trabajo está conformado del siguiente modo: en el capítulo 1 se hace una revisión de los conceptos básicos de dinámica no lineal y caos. El capítulo 2 se encuentra abocado a realizar un breve resumen de la teoría de información, centrándonos en el formalismo de máxima entropía de Jaines. En el capítulo 3 se describen las variantes de medidas de complejidad de interés, su forma funcional y algunas propiedades de los funcionales con los cuales se construyen. Por último, en el capítulo 4 se presentan los resultados del análisis de sistemas con distintas transiciones al caos. Se enlistan luego las conclusiones obtenidas.

Algunos de los resultados consignados en el capítulo 4 de esta tesina han sido enviados a los Anales de la 97° Reunión de la Asociación de Física Argentina en el trabajo titulado "La complejidad estadística y la medida de Fisher como indicadores de transición al caos en sistemas de tiempo continuo"(V.M. San Martín y G.L. Ferri). El mismo ha sido aprobado para su publicación.

# Índice General

<b>Índice General</b>	<b>v</b>
<b>1. Sistemas no lineales y dinámica caótica</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas de tiempo continuo	1
1.1.1. Soluciones en equilibrio en sistemas de tiempo continuo	2
1.1.2. Bifurcaciones de sistemas continuos	5
1.1.3. Soluciones periódicas en sistemas de tiempo continuo	9
1.1.4. Bifurcaciones de soluciones periódicas	13
1.1.5. Soluciones cuasiperiódicas	17
1.2. Caos	18
1.2.1. Caos en sistemas de tiempo continuo	20
<b>2. Teoría de la información y mecánica estadística</b>	<b>25</b>
2.1. Formalismo general de máxima entropía	25
2.2. Generalización para sistemas descritos por una matriz de densidad o por distribuciones de probabilidad continuas	28
2.2.1. Matriz de densidad	28
2.2.2. Distribuciones continuas	28
<b>3. Medidas de la complejidad estadística</b>	<b>31</b>
3.1. Distribuciones de probabilidad	32
3.1.1. Método de histograma	32
3.1.2. Método de Bandt y Pompe	32
3.2. Medidas de la información	33
3.2.1. Shannon	33
3.2.2. Renyi	35
3.2.3. Tsallis	35
3.2.4. Resumen	36
3.3. Distancias estadísticas	36
3.3.1. Distancia euclidiana	37
3.3.2. Distancia de Wootters	37
3.3.3. Entropías relativas	37
3.3.4. Divergencias de Jensen	38
3.4. Medidas de complejidad	39
3.5. Medida de información de Fisher	40

<b>4. Aplicación a sistemas con diversas transiciones al caos</b>	<b>41</b>
4.1. Escenario de doblamiento de período . . . . .	42
4.2. Intermitencia tipo I . . . . .	50
4.3. Intermitencia tipo II . . . . .	57
<b>A. Conceptos de estabilidad</b>	<b>62</b>
A.1. Estabilidad de Lyapunov . . . . .	62
A.2. Estabilidad asintótica . . . . .	62
A.3. Estabilidad de Poincaré . . . . .	63
A.4. Estabilidad de Lagrange (estabilidad acotada) . . . . .	63
A.5. Estabilidad a través de la función de Lyapunov . . . . .	63
<b>B. Linealización cerca de una solución de equilibrio</b>	<b>65</b>
<b>C. Análisis de la estabilidad de los puntos fijos del oscilador de Duffing</b>	<b>67</b>
<b>D. Puntos fijos y bifurcaciones en mapas</b>	<b>70</b>
D.1. Puntos fijos de mapas . . . . .	70
D.2. Gráfico de telaraña: representación gráfica de una órbita . . . . .	70
D.3. Estabilidad de puntos fijos en mapas . . . . .	70
D.4. Bifurcaciones de mapas . . . . .	73
<b>E. Mapas de Poincaré: Estabilidad de soluciones periódicas de sistemas de tiempo continuo</b>	<b>75</b>
E.1. Mapa de Poincaré para soluciones cuasiperiódicas . . . . .	76
E.1.1. Tiempo de giro y número de rotación . . . . .	77
E.1.2. Mapas de Poincaré de segundo orden . . . . .	78
<b>F. Caos en mapas</b>	<b>80</b>
<b>G. Programas desarrollados</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>92</b>

# Capítulo 1

## Sistemas no lineales y dinámica caótica

El presente capítulo tiene como objetivo describir los conceptos fundamentales asociados a la dinámica de sistemas no lineales continuos: posibles soluciones, estabilidad, cambios cualitativos, etc. En particular, se hace foco en el comportamiento caótico de los sistemas, así como las distintas transiciones hacia esta dinámica. Las nociones que aquí se presentan, así como las que pueden encontrarse en los apéndices del **A** al **F**, son el resultado del estudio de los textos de Nayfeh y Balachandran [1], Ott [2], y Alligood, Sauer y York [3].

Un sistema dinámico es aquel que evoluciona con el tiempo. La evolución es gobernada por un conjunto de reglas (no necesariamente ecuaciones) que especifican el estado del sistema para cada valor discreto o continuo de  $t$ . Una evolución a tiempo discreto es usualmente descrita por un sistema de ecuaciones algebraicas (comúnmente llamado mapa), mientras que una evolución a tiempo continuo suele ser descrita por un sistema de ecuaciones diferenciales. El comportamiento de un sistema dinámico cuando  $t \rightarrow \infty$  es llamado estado estacionario. El comportamiento del sistema antes de alcanzar el estado estacionario se conoce como régimen transitorio.

Una solución de un sistema dinámico puede ser constante (llamada punto fijo, solución en equilibrio o solución estacionaria) o variable con el tiempo.

Llamamos sistemas no lineales a aquéllos que pueden ser modelados por ecuaciones algebraicas o diferenciales no lineales. Durante trabajos pioneros en este campo, se observó en algunos de estos sistemas un comportamiento aparentemente aleatorio. Más tarde se comprobó que este comportamiento era determinista y extremadamente sensible a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales. Dicha dinámica, que surge de la evolución temporal de los sistemas no lineales, fue llamada caos.

### 1.1. Sistemas de tiempo continuo

Para valores continuos de tiempo, la evolución del sistema es gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas o no autónomas. Un sistema se denomina no autónomo si las ecuaciones que lo describen dependen explícitamente del tiempo, es decir, son de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \tag{1.1}$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . A  $\mathbf{F}$  se lo llama campo vectorial,  $\mathbf{x}$  se llama vector de estado y  $\mathbb{R}^n$  es el espacio de estado. Un espacio de estado es llamado espacio fase cuando la mitad de los estados son desplazamientos y la otra mitad velocidades. El espacio  $(n + 1)$ -dimensional  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ , donde la dimensión adicional corresponde a  $t$ , es llamado espacio de estado extendido.

Un gráfico de una solución de (1.1) en el espacio de estado extendido es conocido como curva integral. Una proyección de una solución  $\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)$  de (1.1) sobre el espacio de estado se denomina

trayectoria u órbita del sistema a través del punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ . La estabilidad de las soluciones de sistemas, tanto de mapas como de sistemas de tiempo continuo, es un tema de suma importancia en el estudio de dinámicas no lineales. En el apéndice A se revisan brevemente los principales criterios de estabilidad para sistemas de tiempo discreto y continuo.

Si consideramos que la evolución del sistema está controlada por una serie de parámetros  $\mathbf{M}$ , podemos escribir esto explícitamente

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, \mathbf{M}) \quad (1.2)$$

con  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.1 (Teorema de existencia y unicidad)** *Si las componentes de  $\mathbf{F}$  son  $\mathcal{C}^{01}$  en un dominio  $D$  del espacio  $(\mathbf{x}, t)$ , entonces la solución  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0; t_0)$  existe en un pequeño intervalo temporal alrededor de  $t_0$  en  $D$ . Más aún, si las componentes de  $\mathbf{F}$  son  $\mathcal{C}^1$  en  $D$ , entonces, la solución es única en un pequeño intervalo de tiempo alrededor de  $t_0$ .*

Si la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de la forma (1.2) está asegurada, entonces este sistema es determinista. Esto significa que las curvas integrales que empiezan desde dos condiciones iniciales diferentes no pueden interceptarse en el espacio de estado extendido. Sin embargo, las órbitas correspondientes pueden interceptarse en el espacio estado.

Para un sistema autónomo, las ecuaciones son de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{M}). \quad (1.3)$$

$\mathbf{F}$  no depende explícitamente de  $t$ .  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

Un retrato de fase es una colección de órbitas en el espacio fase. Se dice que las órbitas que inician de diferentes condiciones iniciales describen el flujo bajo un dado sistema de ecuaciones. Sea  $T^t$  un operador de evolución que actúa sobre las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $T^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ . Aplicaciones reiteradas de  $T^t$  pueden llevar el estado del sistema a un subespacio llamado atractor, que es definido por las propiedades de invariancia, atractividad, recurrencia e indescomponibilidad.

La invariancia implica que un atractor  $X$  es un espacio invariante del flujo del sistema, es decir,  $T^t X \in X$ , las trayectorias iniciadas en  $X$  pertenecen al atractor. La atractividad consiste en la existencia de un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $T^t U \subset U$  para  $t \geq 0$  y  $T^t U \rightarrow X$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Se dice que un atractor es recurrente, ya que las trayectorias iniciadas en un estado de un subespacio de  $X$  se acercan arbitrariamente y de forma reiterada a este estado inicial para valores de tiempo arbitrariamente grandes. Por último, un atractor no puede separarse en dos piezas no triviales. Resulta útil distinguir entre puntos atractores y atractores periódicos, los cuales a diferencia de los primeros, son órbitas. Éstos son soluciones periódicas porque las variables de estado correspondientes son funciones del tiempo. Otros dos atractores, caracterizados por estados variables con el tiempo son atractores cuasiperiódicos y atractores caóticos.

El dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que incluye todas las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0$  tales que  $T^t \mathbf{x}_0 \rightarrow X$  cuando  $t \rightarrow \infty$  es llamado cuenca, dominio de atracción o región de estabilidad de  $X$  [1].

### 1.1.1. Soluciones en equilibrio en sistemas de tiempo continuo

En el caso de sistemas autónomos los puntos fijos se definen por la anulación del campo vectorial

---

<sup>1</sup>Se dice que  $\mathbf{F}$  es una función  $\mathcal{C}^r$  cuando cada uno de los componentes de  $\mathbf{F}$  es  $r$  veces continuamente diferenciable con respecto a las componentes de  $\mathbf{x}$ . Cuando cada componente de  $\mathbf{F}$  es continuo con respecto a las componentes de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{F}$  se dice una función  $\mathcal{C}^0$ .

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{M}) = 0. \quad (1.4)$$

Una posición en el espacio estado donde esta condición se cumple es llamada punto singular. En ese punto, la curva integral de  $\mathbf{F}$  corresponde al punto en sí mismo. Físicamente, un punto fijo corresponde a una posición de equilibrio del sistema.

Supongamos que  $\mathbf{x}_0$  es la solución de (1.4) para  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{R}^m$ . Para determinar la estabilidad de esta solución, realizamos una linealización del sistema de ecuaciones cerca de la solución de equilibrio (vease apéndice B). Incorporando una pequeña perturbación

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}(t) \quad (1.5)$$

obtenemos

$$\dot{\mathbf{y}} \approx D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{M}_0)\mathbf{y} = A\mathbf{y} \quad (1.6)$$

donde  $A$  es la llamada matriz Jacobiana.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Los autovalores de  $A$  proveen información acerca de la estabilidad local del punto  $\mathbf{x}_0$ .

Cuando todos los autovalores de  $A$  tienen partes reales distintas de cero, el punto fijo correspondiente es llamado punto fijo hiperbólico, sin importar la parte imaginaria; de lo contrario, se llama punto fijo no hiperbólico.

Hay tres tipos de puntos fijos hiperbólicos: sumideros, fuentes y puntos silla. Si todos los autovalores de  $A$  tienen partes reales negativas, entonces todas las componentes de la perturbación  $\mathbf{y}$  decaen con el tiempo, y  $\mathbf{x}$  se aproxima al punto fijo  $\mathbf{x}_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por tanto,  $\mathbf{x}_0$  es asintóticamente estable. Un punto fijo asintóticamente estable es llamado sumidero. Si la matriz  $A$  asociada con un sumidero tiene autovalores complejos, el sumidero también es llamado foco estable. Por otro lado, si los autovalores de  $A$  asociada con el sumidero son reales, el sumidero se llama nodo estable. Un sumidero es estable para  $t \rightarrow \infty$  e inestable para  $t \rightarrow -\infty$ ; por tanto todos los sumideros son atractores.

Si uno o más de los autovalores de  $A$  tienen parte real positiva, algunas de las componentes de  $\mathbf{y}$  crecen con el tiempo, y  $\mathbf{x}$  se aleja del punto fijo  $\mathbf{x}_0$  cuando  $t$  se incrementa. En este caso,  $\mathbf{x}_0$  es inestable. Cuando todos los autovalores de  $A$  tienen parte real positiva,  $\mathbf{x}_0$  se conoce como fuente. Si la  $A$  asociada con la fuente tiene autovalores complejos, la fuente es llamada foco inestable. Por otro lado, si los autovalores de  $A$  son reales, se dice que la fuente es un nodo inestable.

Cuando algunos, pero no todos, los autovalores tienen partes reales positivas mientras que el resto tienen partes reales negativas, el punto fijo asociado es llamado punto silla o punto fijo no estable.

Un punto fijo no hiperbólico es inestable si uno o más de los autovalores de  $A$  tienen partes reales positivas. Si algunos de los autovalores tienen partes reales negativas mientras que el resto tienen partes reales cero, el punto  $\mathbf{x}_0$  se dice neutralmente estable o marginalmente estable. Si todos los autovalores son puramente imaginarios y distintos de cero, el punto fijo correspondiente es llamado centro.

La figura 1.1 resume la clasificación de los puntos fijos.

En el apéndice C se presenta a modo de ejemplo un análisis de la estabilidad de los puntos fijos del oscilador de Duffing.

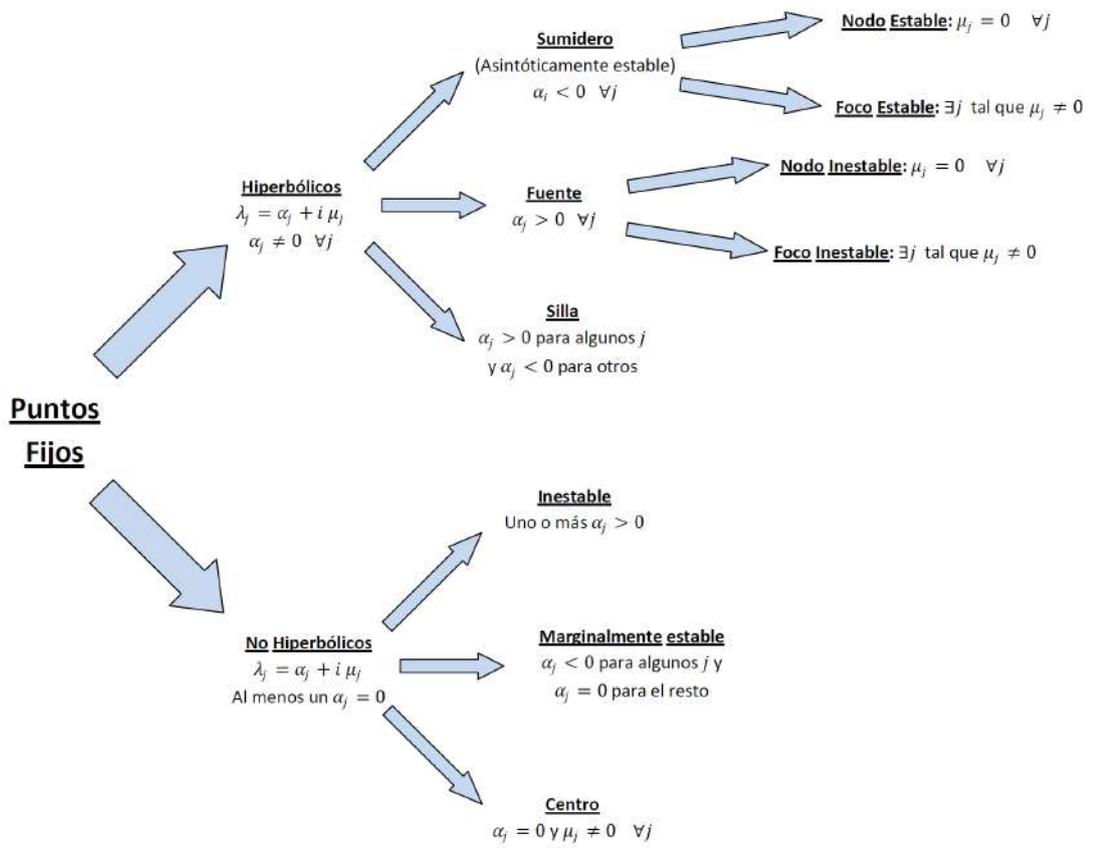


Figura 1.1: Clasificación de puntos fijos segun los autovalores  $\lambda_j$  de la matriz Jacobiana.

Muchos teoremas proveen enunciados precisos en los que la estabilidad de soluciones de punto fijo del sistema linealizado (1.6) implican la estabilidad de soluciones de punto fijo del sistema no lineal completo (1.3). Del teorema de Hartman-Grobman, aplicable a puntos fijos hiperbólicos, y del teorema de Shoshitaishvili, para puntos fijos no hiperbólicos, tenemos que:

- (a) El punto fijo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  de (1.3) es estable cuando el punto fijo  $\mathbf{y} = 0$  de (1.6) es asintóticamente estable.
- (b) El punto fijo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  es inestable cuando el punto fijo  $\mathbf{y} = 0$  es inestable.
- (c) La linealización no determina la estabilidad de puntos fijos neutralmente estables (incluyendo centros) de (1.3). En estos casos se necesita un análisis no lineal. Será necesario retener términos cuadráticos o en ciertos casos de orden superior en la expansión en serie de Taylor de la perturbación  $\mathbf{y}$ .

El teorema de Hartman-Grobman implica que las trayectorias en la vecindad de un punto fijo hiperbólico  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  de (1.3) son cualitativamente similares a esas trayectorias en la vecindad del punto fijo hiperbólico  $\mathbf{y} = 0$  de (1.6). Existen también teoremas para la estabilidad de puntos fijos de un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (1.7)$$

donde  $A$  es una matriz  $n \times n$  y la función  $\mathbf{F}$  es continua en  $\mathbf{x}$  y  $t$ , y satisface la continuidad de Lipschitz<sup>2</sup> en  $\mathbf{x}$ , y es tal que  $\mathbf{F}$  es  $O(\|\mathbf{x}\|)$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$

El sistema (1.3) es un caso especial de (1.7).

El teorema de Poincaré-Lyapunov habla de la estabilidad de  $\mathbf{x} = 0$  de (1.7) cuando

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{B}\| = 0 \text{ y } \mathbf{g} = o(\|\mathbf{x}\|) \text{ cuando } \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$$

De acuerdo con el teorema de Poincaré-Lyapunov, si todos los autovalores de la matriz  $A$  tienen partes reales negativas, entonces  $\mathbf{x} = 0$  de (1.7) es asintóticamente estable.

Aunque la linealización ayuda a determinar si un punto fijo hiperbólico de  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  es estable, no provee información concerniente al tamaño del dominio alrededor del punto fijo donde la conclusión de estabilidad es válida.

### 1.1.2. Bifurcaciones de sistemas continuos

Se denomina bifurcación a todo cambio cualitativo en los rasgos de un sistema, tales como el número y tipo de soluciones, debido a la variación de uno o más parámetros de los cuales depende el sistema considerado. Llamaremos bifurcación local al cambio cualitativo ocurrido en

---

<sup>2</sup>Se dice que  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  cumple con la continuidad de Lipschitz en  $\mathbf{x}$  y que satisface la condición de Lipschitz en el espacio  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$  de  $(\mathbf{x}, t)$  si  $\exists K = cte > 0$  tal que

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{z}, t)\| \leq K \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$$

$\forall (\mathbf{y}, t)$  y  $(\mathbf{z}, t)$  en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ .  $K$  se conoce como constante de Lipschitz para  $\mathbf{F}$ .

el vecindario de un punto fijo o solución periódica del sistema. Cualquier otro cambio cualitativo será una bifurcación global.

En el apéndice D se revisan brevemente los conceptos principales sobre puntos fijos y bifurcaciones en sistemas de tiempo discreto.

Para estudiar estos fenómenos se usa un espacio formado por las variables de estado y los parámetros de control, llamado espacio estado-control. En este espacio, los lugares en los cuales ocurren las bifurcaciones son llamados puntos de bifurcación. Una bifurcación que requiere al menos  $m$  parámetros de control para ocurrir es llamada una bifurcación de codimensión- $m$ .

Las bifurcaciones pueden clasificarse en continuas y discontinuas o catastróficas, dependiendo de si los estados del sistema varían continua o discontinuamente a medida que el parámetro de control es variado gradualmente a través de su valor crítico. Las bifurcaciones discontinuas o catastróficas pueden subdividirse en peligrosas o explosivas, dependiendo de si el sistema responde saltando a un atractor desconectado del inicial o explota en un atractor mayor, con este nuevo atractor incluyendo al viejo.

En una bifurcación explosiva el resultado es determinista; dada una reversión en el recorrido sobre el control de un modo cuasi-estacionario, el nuevo atractor implosiona en el viejo atractor pequeño en el mismo valor crítico de la bifurcación, sin histéresis. El nuevo atractor puede o no ser caótico.

En una bifurcación peligrosa, el atractor desaparece repentinamente del espacio estado del sistema considerado ("catástrofe del cielo azul"). Luego de la bifurcación, el sistema salta a un atractor remoto que no se encuentra conectado con el primer atractor. Si luego de la bifurcación se invierte el sentido de variación del parámetro de control, la respuesta del sistema permanece en el dominio del nuevo atractor, resultando en una histéresis.

Si iniciamos con parámetros de control correspondientes a un punto fijo estable de un sistema a tiempo continuo, y vamos variando lentamente uno de los parámetros de control, este punto fijo puede perder su estabilidad a través de una de las siguientes bifurcaciones: (a) bifurcación silla-nodo, (b) bifurcación tridente o de ruptura simétrica, (c) bifurcación transcítica, o (d) bifurcación Hopf. Sólo ramas de puntos fijos o soluciones estáticas alcanzan puntos de bifurcación asociados con bifurcaciones silla-nodo, tridente y transcítica. Por eso estas tres bifurcaciones se clasifican como bifurcaciones estáticas. En contraste, ramas de puntos fijos y soluciones periódicas alcanzan puntos de bifurcación Hopf. Entonces, una bifurcación Hopf es clasificada como bifurcación dinámica.

Para estudiar de forma aproximada la dinámica de un sistema en la vecindad de un punto de bifurcación se utiliza un conjunto simplificado de ecuaciones, llamado forma normal de bifurcaciones. La dimensión de la forma normal es generalmente menor que la dimensión del sistema de ecuaciones completo. Para bifurcaciones estáticas, la forma normal es un sistema autónomo unidimensional, y para bifurcaciones Hopf, la forma normal es un sistema autónomo bidimensional. En la tabla 1.1 se presenta un resumen de las distintas bifurcaciones locales estáticas de punto fijo, sus formas normales y una ilustración del espacio estado-control típico para cada caso. Las líneas sólidas y punteadas corresponden a los puntos fijos estables e inestables respectivamente. Se dice que una bifurcación Hopf ocurre en un punto fijo de un sistema como (1.3) en  $\alpha = \alpha_c$  si se satisfacen las siguientes condiciones:

- I.  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \alpha_c) = 0$ ;
- II. la matriz  $D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$  tiene un par de autovalores puramente imaginarios  $\pm i\omega_h$  y mientras que todos los otros autovalores tienen partes reales distintas de cero en  $(\mathbf{x}_0; \alpha_c)$ ;
- III. para  $\alpha \approx \alpha_c$ , sea  $\hat{\lambda} \pm i\omega_h$  la continuación analítica del par de autovalores imaginarios. Entonces  $\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha} \neq 0$  en  $\alpha = \alpha_c$ . Esta condición implica una velocidad transversal no nula al

Bifurcación		Forma normal	Puntos fijos	autovalores	Espacio estado-control
Silla-nodo		$\dot{x} = \mu - x^2$	$\mu < 0$ : no hay $\mu > 0$ : $x = \sqrt{\mu}$ y $x = -\sqrt{\mu}$	$\lambda = -2x$	
Tridente	subcrítica	$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$ ( $\alpha > 0$ )	$x = 0$ Además, para $\mu < 0$ , $x = \pm \sqrt{-\mu/\alpha}$	$\lambda = \mu$ en $x = 0$ $\lambda = -2\mu$ en $\pm \sqrt{-\mu/\alpha}$	
	supercrítica	$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$ ( $\alpha < 0$ )	$x = 0$ Además, para $\mu > 0$ , $x = \pm \sqrt{\mu/\alpha}$	$\lambda = \mu$ en $x = 0$ $\lambda = -2\mu$ en $\pm \sqrt{\mu/\alpha}$	
transcrítica		$\dot{x} = \mu x - x^2$	$x = 0$ $x = \mu$	$\lambda = \mu$ en $x = 0$ $\lambda = -\mu$ en $x = \mu$	

Tabla 1.1: Distintas bifurcaciones locales estáticas de punto fijo.

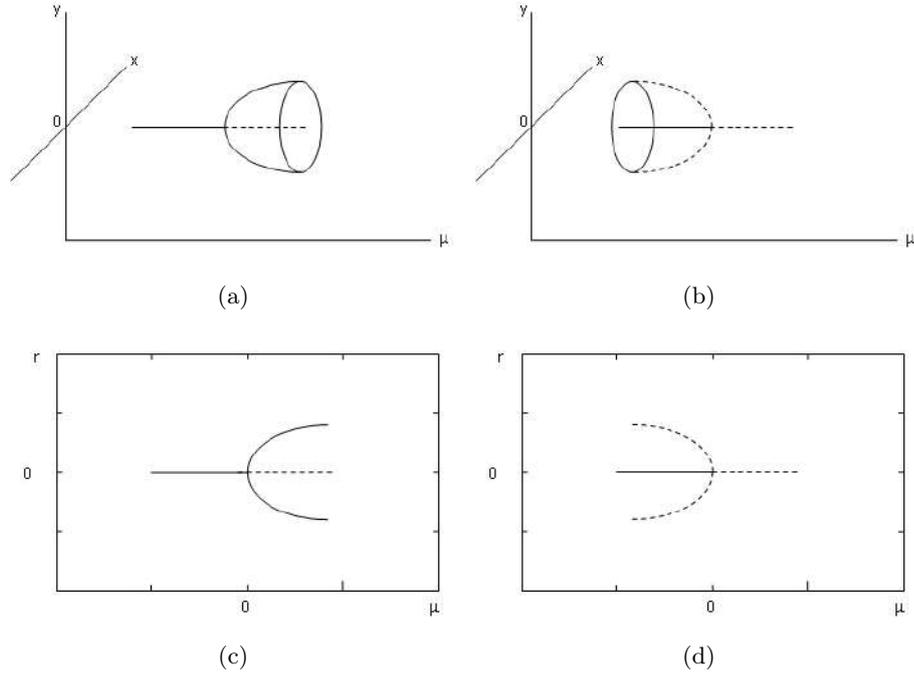


Figura 1.2: Escenario local de las bifurcaciones Hopf supercrítica y subcrítica.

cruzar el eje imaginario.

Cuando las tres condiciones son satisfechas, una solución periódica de período  $\frac{2\pi}{\omega_h}$  nace en  $(\mathbf{x}_0; \alpha_c)$ . Soluciones periódicas bifurcadas pueden también ocurrir cuando la condición III no es satisfecha. La forma normal de una bifurcación Hopf es

$$\dot{x} = \omega x - \mu y + (\alpha x - \beta y)(x^2 + y^2) \quad (1.8a)$$

$$\dot{y} = \mu x + \omega y + (\beta x + \alpha y)(x^2 + y^2). \quad (1.8b)$$

Cuando  $\mu = 0$  se produce una bifurcación de este tipo en  $(0, 0)$ . El período de la solución periódica bifurcada es  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Usando la transformación

$$x = r \cos \theta \quad (1.9a)$$

$$y = r \sin \theta \quad (1.9b)$$

transformamos el sistema en

$$\dot{r} = \mu r + \alpha r^3 \quad (1.10)$$

$$\dot{\theta} = \omega + \beta r^2, \quad (1.11)$$

donde  $r$  es la amplitud y  $\dot{\theta}$  es la frecuencia de la solución periódica creada por la bifurcación Hopf. El punto fijo trivial de (1.10) corresponde al punto fijo  $(0, 0)$  de (1.8), y un punto fijo no trivial (es decir,  $r \neq 0$ ) corresponde a una solución periódica del sistema original. Un punto fijo no trivial estable (inestable) de (1.10) corresponde a una solución periódica estable (inestable) de (1.8).

Vemos que (1.10) es idéntica a la forma normal de la bifurcación tipo tridente, entonces la bifurcación Hopf en  $(0, 0, 0)$  en el espacio  $x - y - \mu$  es equivalente a una bifurcación tridente en  $(0, 0)$  en el espacio  $r - \mu$ . Cuando  $\alpha = -1$  tenemos una bifurcación tridente supercrítica en el espacio  $r - \mu$  y, entonces, una bifurcación Hopf supercrítica en el espacio  $x - y - \mu$ . Cuando  $\alpha = 1$  tenemos una bifurcación tridente subcrítica en el espacio  $r - \mu$  y, entonces, una bifurcación Hopf subcrítica en el espacio  $x - y - \mu$ . En la figura 1.2 se esquematizan los espacios estado control  $x - y - \mu$  y  $r - \mu$  para las bifurcaciones Hopf subcrítica y supercrítica.

Cuando  $\alpha = 0$  en (1.8), aunque las condiciones para una bifurcación Hopf sean satisfechas no hay órbitas periódicas en la vecindad del punto de bifurcación. Este caso es degenerado.

### 1.1.3. Soluciones periódicas en sistemas de tiempo continuo

Si una solución  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)$  de un sistema de tiempo continuo satisface que  $\mathbf{X}(t + T) = \mathbf{X}(t)$  y  $\mathbf{X}(t + \tau) \neq \mathbf{X}(t)$  para  $0 < \tau < T$ , entonces se dice que es periódica con período mínimo  $T$ .

Una solución periódica  $\mathbf{X}$  de período mínimo finito  $T > 0$  del sistema autónomo (1.3) corresponde a una órbita cerrada  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^n$  y es tal que  $\mathbf{X}(t_0 + T) = \mathbf{X}(t_0)$  y  $\mathbf{X}(t_0 + \tau) \neq \mathbf{X}(t_0)$  para  $0 < \tau < T$ . Una solución periódica de (1.3) puede ser tratada como un punto fijo de un mapa apropiadamente definido llamado mapa de Poincaré (véase apéndice G).

Una solución periódica de (1.3) es llamada ciclo límite si no hay otras soluciones periódicas suficientemente cerca de ella. En otras palabras, un ciclo límite es una solución periódica aislada y corresponde a una órbita cerrada aislada en el espacio de estado. Toda trayectoria iniciada cerca de un ciclo límite se aproxima a él (ya sea para  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ ).

Una solución periódica  $\mathbf{X}$  de periodo mínimo  $T$  del sistema  $n$ -dimensional no autónomo (1.2) también describe una trayectoria cerrada  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si suponemos que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  está en esta órbita en  $t = t_0$ , entonces la periodicidad de la solución implica que  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0; t_0) = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0; t_0 + T)$ .

Debemos notar que una órbita cerrada en el espacio estado de un sistema no autónomo no siempre representa una solución periódica.

Es posible determinar la estabilidad de soluciones periódicas a través de herramientas tales como la teoría de Floquet o los mapas de Poincaré.

La teoría de Floquet se basa en un análisis perturbativo de la solución periódica del sistema de ecuaciones en estudio. Consideremos que la solución periódica de un sistema autónomo de la forma (1.3) en  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$  es  $\mathbf{X}_0(t)$  y tiene un período mínimo  $T$ . Introducimos una perturbación  $\mathbf{y}$  en  $\mathbf{X}_0$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{y}(t). \quad (1.12)$$

Sustituimos (1.12) en (1.3), asumiendo que  $\mathbf{F}$  es al menos  $\mathcal{C}^2$ , expandiendo el resultado en serie de Taylor alrededor de  $\mathbf{X}_0$ , y reteniendo sólo el término lineal

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0; \mathbf{M}_0)\mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2) \text{ o } \dot{\mathbf{y}} \simeq A(t; \mathbf{M}_0)\mathbf{y}. \quad (1.13)$$

La matriz  $A$  es periódica en el tiempo, con un período  $T$ , que puede no ser el mínimo.

El sistema lineal  $n$ -dimensional (1.13) tiene  $n$  soluciones linealmente independientes  $\mathbf{y}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Estas soluciones son usualmente llamadas un conjunto fundamental de soluciones. Este conjunto fundamental puede ser expresado en forma de una matriz  $n \times n$  llamada solución matricial fundamental

$$Y(t) = [\mathbf{y}_1(t) \ \mathbf{y}_2(t) \ \dots \ \mathbf{y}_n(t)]. \quad (1.14)$$

Se puede demostrar que

$$Y(t+T) = [\mathbf{y}_1(t+T) \mathbf{y}_2(t+T) \dots \mathbf{y}_n(t+T)] \quad (1.15)$$

es también una solución matricial fundamental. Dado que (1.13) tiene como máximo  $n$  soluciones linealmente independientes y como las  $\mathbf{y}_i(t)$  son esas soluciones, las  $\mathbf{y}_i(t+T)$  deben ser combinaciones lineales de  $\mathbf{y}_i(t)$

$$Y(t+T) = Y(t)\Phi, \quad (1.16)$$

donde  $\Phi$  depende de la solución matricial fundamental elegida y no es única. Especificando la condición inicial  $Y(0) = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de  $n \times n$ , y tomando  $t = 0$  en (1.16) obtenemos

$$Y(T) = \Phi. \quad (1.17)$$

La matriz  $\Phi$  es llamada matriz monodrómica.

Introduciendo la transformación  $Y(t) = V(t)P^{-1}$ , donde  $P$  es una matriz  $n \times n$  constante no singular, reescribimos (1.16)

$$V(t+T) = V(t)J \quad (1.18)$$

donde

$$J = P^{-1}\Phi P. \quad (1.19)$$

Cuando los autovalores  $\rho_m$  de la matriz  $\Phi$  son distintos, se puede elegir la matriz  $P$  tal que sus columnas  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  sean los autovectores de  $\Phi$

$$\Phi \mathbf{p}_m = \rho_m \mathbf{p}_m. \quad (1.20)$$

Entonces

$$J = P^{-1}PD = D \quad (1.21)$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n \end{bmatrix}.$$

Los autovalores  $\rho_m$  de  $\Phi$  son llamados multiplicadores característicos o de Floquet. Hay un único conjunto de multiplicadores característicos asociados con la matriz  $A$  de (1.13).

Cuando los multiplicadores de Floquet son distintos, (1.18) puede ser escrito o en forma de componentes como

$$\mathbf{v}_m(t+T) = \rho_m \mathbf{v}_m(t) \text{ para } m = 1, 2, \dots, n \quad (1.22)$$

donde,  $\mathbf{v}_m(t)$  corresponde a la  $m$ -ésima columna de la matriz  $V(t)$ . Entonces

$$\mathbf{v}_m(t+NT) = \rho_m^N \mathbf{v}_m(t) \quad (1.23)$$

donde  $N$  es un entero. Cuando  $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{v}_m(t) \rightarrow 0 \text{ si } |\rho_m| < 1 \quad (1.24)$$

$$\mathbf{v}_m(t) \rightarrow \infty \text{ si } |\rho_m| > 1. \quad (1.25)$$

Cuando  $\rho_m = 1$ ,  $\mathbf{v}_m(t)$  es periódico con período  $T$ , y cuando  $\rho_m = -1$ ,  $\mathbf{v}_m(t)$  tiene período  $2T$ . Es importante notar que uno de los multiplicadores de Floquet asociados con una solución periódica de un sistema autónomo es siempre la unidad.

Una solución periódica de un sistema autónomo es conocida como hiperbólica si sólo uno de los multiplicadores de Floquet está localizado en el círculo unidad en el plano complejo. Una solución periódica hiperbólica puede ser estable o inestable. Podemos inferir de (1.23) que una solución periódica hiperbólica es asintóticamente estable si no hay multiplicadores de Floquet fuera del círculo unidad. En todas las direcciones no tangentes a una órbita periódica asintóticamente estable, las órbitas vecinas positivas son atraídas hacia la órbita periódica. En esta situación, la solución es llamada ciclo límite estable o atractor periódico. Una solución periódica hiperbólica es inestable si uno o más de los multiplicadores de Floquet caen fuera del círculo unidad. En este caso, si todos los multiplicadores de Floquet (con excepción del que es unidad) caen fuera del círculo unidad, entonces todas las trayectorias vecinas de la solución periódica son repelidas de ésta en tiempos positivos. Entonces, esta solución es llamada ciclo límite inestable o repulsor periódico. Cuando algunos de los multiplicadores de Floquet asociados con una solución hiperbólica inestable caen dentro del círculo unidad, la solución periódica es llamada ciclo límite inestable de tipo silla.

Si dos o más multiplicadores de Floquet están ubicados en el círculo unidad, la solución periódica es llamada solución periódica no hiperbólica. Una solución periódica de este tipo es inestable si uno o más de los multiplicadores de Floquet asociados caen fuera del círculo unidad. Si ninguno de los multiplicadores de Floquet cae fuera del círculo unidad, es necesario un análisis no lineal para determinar la estabilidad de una solución periódica no hiperbólica.

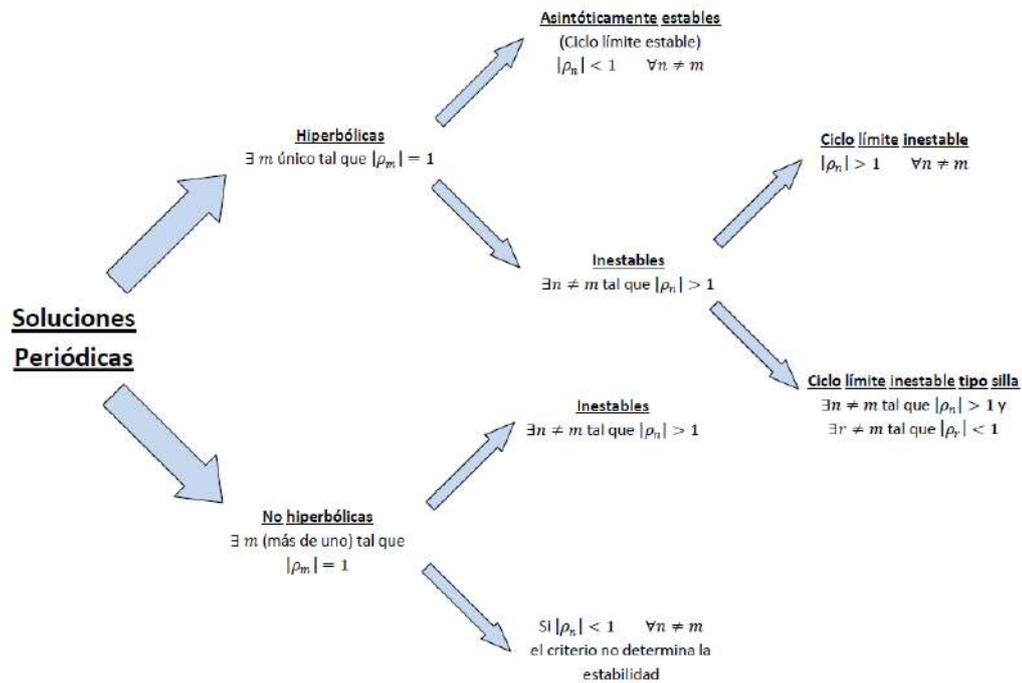
Por otro lado, si estamos interesados en la estabilidad de una solución periódica de un sistema no autónomo de la forma (1.2) en  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ , indicamos la misma como  $\mathbf{X}_0(t)$ . Suponemos que tiene un período  $T$ .

Introduciendo una perturbación  $\mathbf{z}(t)$  en  $\mathbf{X}_0(t)$ , sustituyendo esto en (1.2), suponiendo que  $\mathbf{F}$  es como mínimo  $\mathcal{C}^2$ , expandiendo  $F$  en serie de Taylor alrededor de  $\mathbf{X}_0$  y reteniendo sólo los términos lineales obtenemos

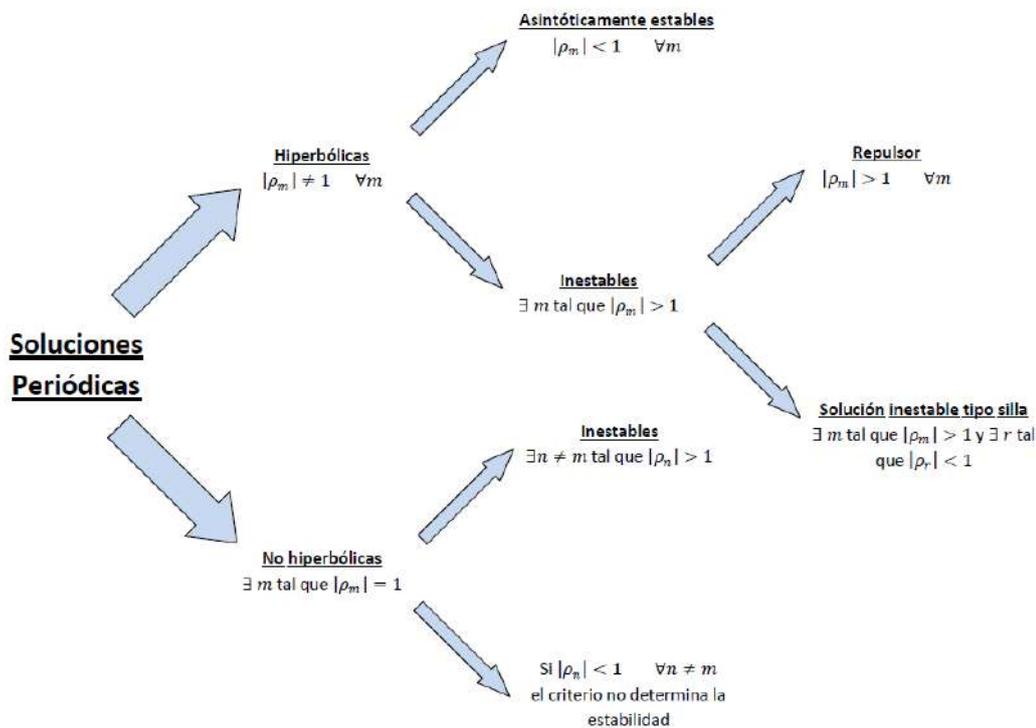
$$\dot{\mathbf{z}} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0; \mathbf{M}_0)\mathbf{z} + O(\|\mathbf{z}\|^2) \text{ o } \dot{\mathbf{z}} \simeq A(t; \mathbf{M}_0)\mathbf{z} \quad (1.26)$$

Procediendo del mismo modo que en el caso de sistemas autónomos, usamos la teoría de Floquet para tratar (1.26) y determinar la matriz monodrómica.

Los autovalores de la matriz monodrómica proveen información acerca de la estabilidad de la solución periódica. En contraste con el caso autónomo para el cual uno de los multiplicadores de Floquet es siempre la unidad, en el caso no autónomo, esa condición no se satisface. Si ninguno de los multiplicadores de Floquet cae en el círculo unidad, la solución periódica es llamada hiperbólica; de otro modo, es llamada no hiperbólica. Si todos los multiplicadores de Floquet se encuentran dentro del círculo unidad, entonces la solución correspondiente es asintóticamente estable y es llamada ciclo límite estable o atractor periódico. Si al menos uno de los multiplicadores de Floquet se encuentra fuera del círculo unidad, la solución asociada es inestable. Si todos los multiplicadores de Floquet están fuera del círculo, la solución periódica es llamada repulsor. Si algunos pero no todos los multiplicadores de Floquet están fuera del círculo, la solución periódica es de tipo silla. Si ninguno de los multiplicadores de Floquet asociados con una solución no hiperbólica del sistema cae fuera del círculo, un análisis no lineal es necesario para determinar la estabilidad.



(a) Sistemas autónomos



(b) Sistemas no autónomos

Figura 1.3: Clasificación de soluciones periódicas en función de los multiplicadores de Floquet asociados.

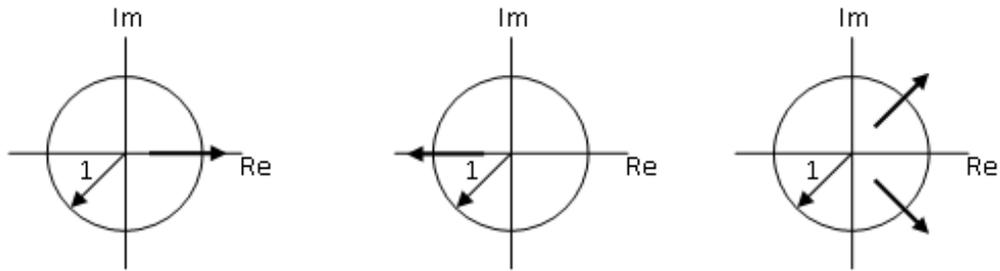


Figura 1.4: Posibles modos en los cuales los multiplicadores de Floquet pueden dejar el círculo unidad en el plano complejo durante una bifurcación.

Situación	Bifurcación resultante
Un multiplicador de Floquet deja el círculo unidad a través de +1	Transcrítica
	Ruptura de simetría
	Cyclic-fold
Un multiplicador de Floquet deja el círculo unidad a través de -1	Doblamiento de período
Dos multiplicadores de Floquet complejos conjugados dejan el círculo unidad fuera del eje real	Hopf secundaria o Neimark

Tabla 1.2: Bifurcaciones producidas en función de la forma en que los multiplicadores de Floquet dejan el círculo unidad.

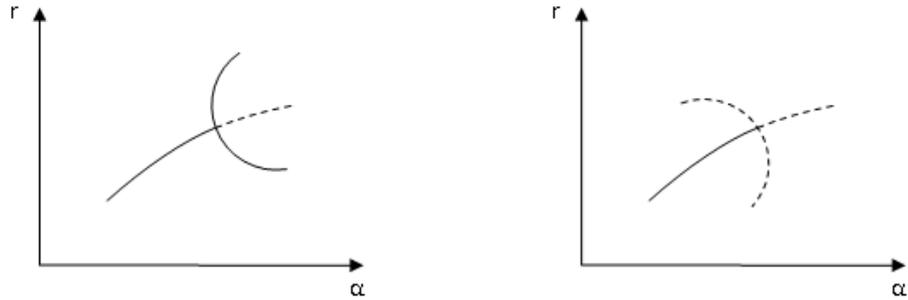
Puede verse una síntesis de la clasificación de soluciones periódicas en los cuadros de la figura 1.3.

#### 1.1.4. Bifurcaciones de soluciones periódicas

La matriz monodrómica de un sistema de tiempo continuo y los multiplicadores de Floquet asociados dependen de los parámetros de control  $\mathbf{M}$ . Supongamos que cuando uno o más de los parámetros de control es variado, para cierto valor del parámetro de control, se modifica cualitativamente el retrato del espacio estado. Entonces, esta ubicación es llamada punto de bifurcación y el cambio cualitativo es llamado bifurcación.

Si iniciamos con parámetros de control correspondientes a una solución periódica estable y entonces variamos uno de esos parámetros de control hasta que la solución periódica pierda su estabilidad, la solución resultante depende del modo en el cual los multiplicadores de Floquet dejen el círculo unidad en el plano complejo. Hay tres posibilidades, que se enlistan en el cuadro 1.2 y se ilustran en la figura 1.4.

Dado que los multiplicadores de Floquet son autovalores de la matriz monodrómica, la cual es



(a) Punto de ruptura de simetría supercrítico      (b) Punto de ruptura de simetría subcrítico

Figura 1.5: Escenarios en la proximidad de puntos de ruptura de simetría.

obtenida resolviendo un sistema linealizado de ecuaciones alrededor de la solución periódica, las bifurcaciones asociadas de la solución periódica son locales. Estas consideraciones locales puede no ser suficientes para determinar el estado de postbifurcación del sistema, y pueden ser necesarias consideraciones globales.

Las bifurcaciones de ciclos límites pueden ser clasificadas en continuas y discontinuas o catastróficas. Estas últimas pueden ser peligrosas o explosivas.

Supongamos que una solución periódica de un sistema posee una propiedad de simetría (por ejemplo, supongamos un sistema tridimensional dependiente de las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  que sea invariante frente a la transformación  $(x, y, z) \Leftrightarrow (-x, -y, z)$ ). Cuando un multiplicador de Floquet deja el círculo unidad a través de  $+1$ , si la bifurcación rompe la simetría de la solución periódica, es llamada bifurcación de ruptura de simetría.

En la figura 1.5 pueden verse los escenarios en la proximidad de puntos de ruptura de simetría supercríticos y subcríticos. La amplitud de la solución periódica se indica como  $r$  y  $\alpha$  es el parámetro de control. En ambas figuras, la rama estable de las soluciones periódicas simétricas que existe previa a la bifurcación continua como una rama inestable de las soluciones simétricas después de la bifurcación.

En una bifurcación cyclic-fold, una rama de soluciones periódicas estables, y una de soluciones periódicas inestables, las cuales existen para  $\alpha < \alpha_c$ , colapsan y se destruyen en  $\alpha_c$ . Típicamente, las soluciones periódicas inestables son de tipo silla. En la figura 1.6, notamos que localmente no hay otras soluciones en la vecindad del punto de bifurcación para  $\alpha > \alpha_c$ . Por tanto, las bifurcaciones cyclic-fold son bifurcaciones discontinuas o catastróficas.

Para  $\alpha > \alpha_c$  el comportamiento del sistema no puede ser determinado solo por consideraciones locales. Existen dos posibilidades para el estado de postbifurcación: la bifurcación puede ser peligrosa, o explosiva.

En el caso de la bifurcación explosiva el viejo atractor explota en un nuevo atractor mayor que contiene al viejo atractor. Una órbita dentro de este atractor pasa mucho tiempo cerca del ciclo límite destruido, con excursiones fuera de este ciclo límite "fantasma". Cuando el atractor es caótico o extraño (ver sección 1.2), el tiempo transcurrido cerca del ciclo límite fantasma es llamado fase laminar, y las excursiones hacia fuera del ciclo límite fantasma son llamadas rupturas turbulentas o caóticas. A medida que  $\alpha$  es variado aproximándose a  $\alpha_c$  por encima, el tiempo entre las rupturas irregulares se aproxima a infinito y el atractor caótico implosiona

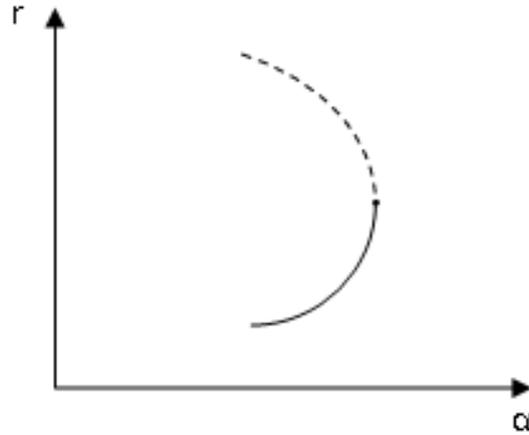


Figura 1.6: Escenario en la proximidad de punto de bifurcación Cyclic-fold.

en el ciclo límite viejo para  $\alpha_c$ . Esta transición desde la periodicidad al comportamiento caótico siguiendo una bifurcación cyclic-fold es llamada transición intermitente de tipo I al caos.

Una bifurcación transcítica de una solución periódica puede ocurrir cuando un multiplicador de Floquet deja el círculo unidad a través de  $+1$ . En las figuras 1.7(a) y 1.7(b) se grafica la amplitud  $r$  de la solución periódica de un sistema dinámico en función del parámetro de control en la vecindad de puntos de bifurcación transcíticos. Una bifurcación de este tipo da un intercambio de estabilidad.

Cuando un multiplicador de Floquet deja el círculo unidad a través de  $-1$  se produce una bifurcación de doblamiento de período y la rama de soluciones periódicas estables que existe antes de la bifurcación continúa como una rama inestable después de la misma. Una rama de soluciones periódicas dobles estables es creada si la bifurcación es supercrítica, mientras que una rama de soluciones periódicas dobles inestables es destruido si la bifurcación es subcrítica.

En el caso subcrítico, sea  $\alpha$  el parámetro de control, para  $\alpha > \alpha_c$  existen dos posibilidades de comportamiento. La primera es que la bifurcación sea peligrosa y típicamente acompañada por una histéresis. En segundo lugar, la respuesta del sistema puede explotar en un nuevo atractor cuando  $\alpha$  varíe lentamente pasando por  $\alpha_c$ , con el antiguo atractor siendo un conjunto propio de este nuevo atractor. Una órbita dentro de este atractor pasa mucho tiempo cerca del ciclo límite destruido, con excursiones fuera de este ciclo límite "fantasma". A medida que  $\alpha$  es variado aproximándose a  $\alpha_c$  por encima, el tiempo entre las rupturas irregulares se aproxima a infinito y el atractor caótico implosiona en el ciclo límite viejo para  $\alpha_c$ . Esta transición desde la periodicidad al comportamiento caótico siguiendo una bifurcación de doblamiento de período subcrítica es llamada transición intermitente de tipo III al caos.

En la figura 1.8(a), se muestra una órbita periódica de un sistema de tiempo continuo y su intersección con una sección de Poincaré  $\Sigma$ . El escenario después de que esta órbita periódica alcance una bifurcación de doblamiento de período se muestra en la figura 1.8(b). La órbita en esta figura intercepta la sección de Poincaré dos veces. Después de  $k$  sucesivas bifurcaciones de doblamiento de período, tendríamos  $2k$  puntos en la sección de Poincaré.

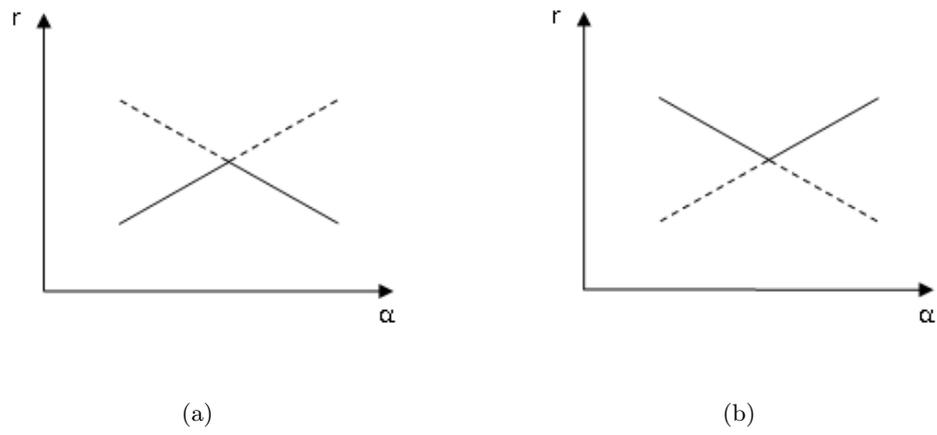


Figura 1.7: Vecindad de puntos de bifurcación transcíticos.

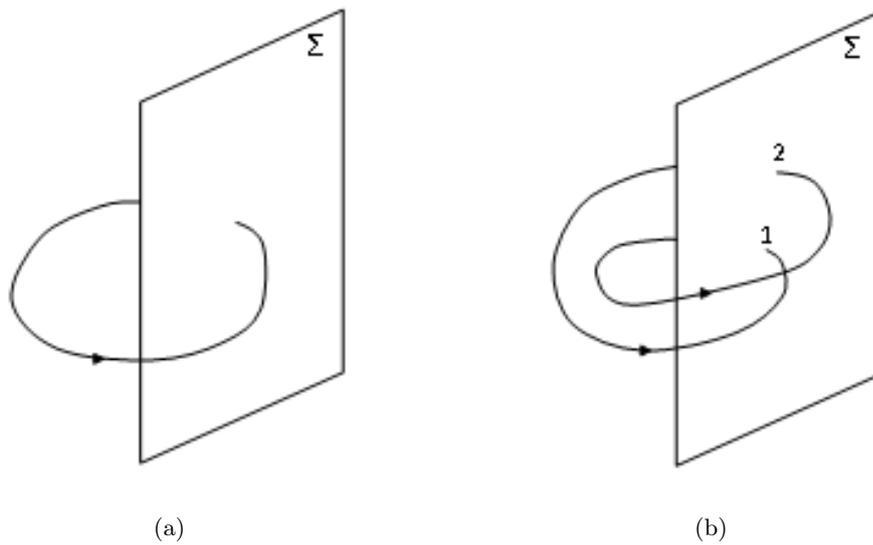


Figura 1.8: Órbitas periódicas de un sistema de tiempo continuo y su intersección con una sección de Poincaré.

Una bifurcación Hopf de un punto fijo de un sistema de tiempo continuo da una solución periódica de este sistema. Una bifurcación Hopf de una solución periódica es llamada bifurcación Hopf secundaria o Neimark. Esencialmente, esta bifurcación introduce una nueva frecuencia, posiblemente inconmensurable, con la primera existente en la solución. Existen bifurcaciones subcríticas y supercríticas de este tipo. En ambas, la rama de soluciones periódicas estables que existe previa a la bifurcación continúa como una rama inestable luego de la misma. Una rama de soluciones cuasiperiódicas estables es creada en la bifurcación supercrítica. Una rama de soluciones cuasiperiódicas inestables es destruida si la bifurcación es subcrítica.

En el caso subcrítico, sea  $\alpha$  el parámetro de control, para  $\alpha > \alpha_c$  existen dos posibilidades de comportamiento. La primera es que la bifurcación sea peligrosa y típicamente acompañada por una histéresis. En segundo lugar, cuando  $\alpha$  varíe lentamente pasando por  $\alpha_c$  la respuesta del sistema puede explotar en un nuevo atractor, incluyendo la región correspondiente al antiguo atractor. Una órbita dentro de este atractor pasa mucho tiempo cerca de la solución destruida, y explora esporádicamente fuera de la solución "fantasma".

Una transición desde la periodicidad al comportamiento caótico siguiendo una bifurcación Hopf subcrítica es llamada transición intermitente de tipo II al caos.

### 1.1.5. Soluciones cuasiperiódicas

Una solución cuasiperiódica es una solución dinámica caracterizada por dos o más frecuencias inconmensurables. Dos frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son inconmensurables si  $\omega_1/\omega_2$  es un número irracional. Una solución cuasiperiódica es llamada solución cuasiperiódica  $k$ -periódica si está caracterizada por  $k$  frecuencias inconmensurables.

En general, una función cuasiperiódica  $k$ -periódica tiene la forma

$$x = x(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_k t). \quad (1.27)$$

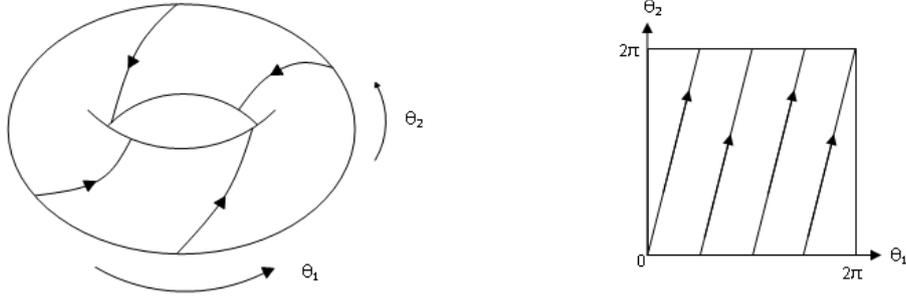
El espectro de  $x$  consiste de puntas en  $|n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \dots + n_k \omega_k|$ , donde algunas de las componentes pueden tener amplitud cero. Entonces, aunque la forma de la onda de una señal cuasiperiódica puede parecer complicada, su espectro revela su simplicidad. En principio, puede usarse el espectro para distinguir una función cuasiperiódica de una periódica ya que las puntas en el espectro de la función cuasiperiódica no se encuentran espaciadas por múltiplos enteros de una frecuencia particular. Sin embargo, en la práctica, debido a la dificultad de determinar cuándo la razón de dos valores medidos es racional o irracional, un espectro que parece ser de una función cuasiperiódica puede corresponder a una función periódica con un período muy largo.

Para sistemas tanto autónomos, no autónomos, una órbita cuasiperiódica no se cierra sobre sí misma.

Una órbita cuasiperiódica de período dos puede ser mejor visualizada en la superficie de un toro en un espacio tridimensional. Iniciaremos nuestro análisis con órbitas periódicas. Consideremos las coordenadas angulares  $\theta_1 = \omega_1 t$  y  $\theta_2 = \omega_2 t$  con  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 4$ .

La órbita periódica se desarrolla a lo largo de una hélice en la superficie del toro (figura 1.9(a)). Cuando el toro es cortado y desenrollado obtenemos un plano  $\theta_2 - \theta_1$  (figura 1.9(b)). En este plano, cuando cualquiera de las coordenadas alcanza el valor  $2\pi$  cae de nuevo a 0 antes de continuar la evolución. El número finito de paralelas en el plano indica que la órbita correspondiente se cierra sobre sí misma.

Si las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son inconmensurables, la órbita generada también cae en una hélice en la superficie del toroide. Sin embargo, esta órbita no se cierra sobre sí misma, serpenteando sobre toda la superficie del toro. Consecuentemente, cuando el toro es desenvuelto, encontramos un denso conjunto de líneas paralelas en un tiempo finito y un número infinito de paralelas cuando  $t \rightarrow \infty$ .



(a) Ilustración de solución periódica en la superficie de un toro cuando  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 4$

(b) Toroide desenrollado

Figura 1.9: Órbita cuasiperiódica de período dos en la superficie de un toro.

## 1.2. Caos

Los movimientos caóticos, a diferencia de los periódicos o estacionarios, no pueden ser representados usando funciones analíticas estándar. A pesar de la complejidad de estos movimientos, comúnmente ocurren en sistemas que no son complejos en sí mismos, sino que son sorprendentemente simples.

Es razonable conjeturar que la complejidad de la estructura de las órbitas de un sistema en el espacio fase sea mayor a medida que aumenta la dimensionalidad del sistema. En concordancia con esto, para el caso de un sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden, debe darse que  $N \geq 3$  para que exista un comportamiento caótico.

Con respecto a los mapas, si un mapa es invertible, no puede existir caos a menos que  $N \geq 2$ . Si el mapa no es invertible, el caos es posible aún en mapas unidimensionales (ejemplo: mapa logístico).

Como se sabe, en base a un sistema de tiempo continuo  $N$ -dimensional es posible construir un mapa de Poincaré invertible de dimensión  $(N - 1)$ , interceptando las trayectorias con una sección de Poincaré adecuada. De esta equivalencia entre un flujo  $N$ -dimensional y un mapa invertible  $(N - 1)$ -dimensional se observa que el requerimiento de dimensionalidad mínima para la existencia de caos en mapas sigue del requerimiento para el caos en flujos.

El espectro de una señal caótica es una forma de banda continua, por lo que un movimiento caótico es la superposición de un gran número de movimientos periódicos.

Asumamos que tenemos un conjunto de puntos que caen en un espacio cartesiano  $N$ -dimensional. Imaginemos que cubrimos ese espacio con una grilla de cubos  $N$ -dimensionales cuyas aristas tienen una longitud  $\varepsilon$ . Contamos el número de cubos  $n(\varepsilon)$  necesarios para cubrir el conjunto. Hacemos esto para  $\varepsilon$  cada vez más pequeños. Entonces, la dimensión por el conteo de cubos del conjunto es

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}. \quad (1.28)$$

De acuerdo con esta definición de dimensión, los atractores caóticos comúnmente tienen una dimensión no entera. Los objetos geométricos que no poseen una dimensión entera son llamados fractales. Los fractales se caracterizan por ser invariantes con respecto a diferentes escalas. Cuando un atractor es fractal, es llamado atractor extraño.

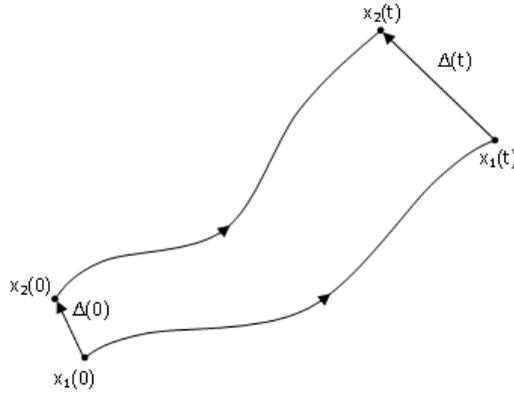


Figura 1.10: Evolución de dos órbitas próximas en el espacio fase.

Un atractor caótico se caracteriza por presentar una dependencia sensitiva exponencial a las condiciones iniciales. Consideremos dos condiciones iniciales  $x_1(0)$  y  $x_2(0) = x_1(0) + \Delta(0)$ , e imaginemos que evolucionan hacia adelante en el tiempo por medio de un sistema dinámico de tiempo continuo dando como resultado las órbitas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , como se muestra en la figura 1.10. A tiempo  $t$ , la separación entre las órbitas es  $\Delta(t) = x_2(t) - x_1(t)$ . Si, en el límite  $|\Delta(0)| \rightarrow 0$  y para  $t$  largo, las órbitas permanecen acotadas y la diferencia entre las soluciones  $|\Delta(t)|$  crece exponencialmente, entonces decimos que el sistema presenta una dependencia sensitiva a las condiciones iniciales y es caótico.

La sensibilidad exponencial de las soluciones caóticas significa que, a medida que transcurre el tiempo, pequeños errores en la solución pueden crecer rápidamente. Entonces, después de algún tiempo, efectos tales como el ruido y la falta de precisión del cálculo computacional pueden cambiar totalmente la solución con respecto a la que se obtendría en ausencia de estos efectos. Entonces, dado el estado de un sistema caótico, su futuro se vuelve difícil de predecir después de cierto punto.

Consideremos ahora dos puntos cercanos a un atractor de un mapa, separados entre sí una distancia  $d_0$ . Para la evolución iniciada en esos puntos, la separación  $d_k$  varía con  $k$ , en promedio, como

$$d_k = d_0 e^{\gamma k}$$

donde  $\gamma$  representa la pendiente promedio en el gráfico  $\log d_k$  vs  $k$ , y se conoce como el exponente de Lyapunov.

El exponente de Lyapunov asociado con una órbita periódica es negativo.

Una solución caótica se caracteriza por tener uno o más exponentes de Lyapunov positivos. Un atractor con dos o más exponentes de Lyapunov positivos es llamado hipercaótico.

Debido a estos exponentes positivos, hay una sensibilidad a las condiciones iniciales y, consecuentemente, las órbitas iniciadas en dos puntos cercanos de un atractor caótico se alejan uno del otro a una tasa exponencial hasta que la separación alcanza el tamaño del atractor. Debido a la precisión finita y al ruido, siempre hay alguna incerteza al especificar una condición inicial. Si esta condición inicial es ubicada en una órbita caótica, no es posible hacer predicciones a largo plazo acerca de la evolución iniciadas en este punto ya que la incerteza será amplificada debido a los exponentes de Lyapunov positivos. Entonces, despreciando el hecho de que una

solución caótica es gobernada por un sistema determinista, la precisión finita y el ruido limitan la predicción de la evolución.

En el apéndice F se describen someramente las soluciones caóticas en mapas.

### 1.2.1. Caos en sistemas de tiempo continuo

Hay  $n$  exponentes de Lyapunov asociados con una órbita de un sistema autónomo  $n$ -dimensional. Uno de los exponentes asociados con un atractor periódico, cuasiperiódico, o caótico siempre es cero. Este corresponde a una dirección tangente a la órbita.

Para una órbita de un sistema disipativo, la suma de los exponentes de Lyapunov siempre es negativa. Por eso, para una órbita caótica de un sistema autónomo, uno de los exponentes de Lyapunov es cero, la suma de los exponentes es negativa, y uno o más son positivos. Este es el motivo por el cual las soluciones caóticas sólo pueden ocurrir en sistemas autónomos tridimensionales o de dimensión mayor. Más aún, para un sistema disipativo tridimensional, sólo uno de los exponentes de Lyapunov puede ser positivo. Sin embargo, para sistemas disipativos 4-dimensionales y de dimensiones superiores, dos o más exponentes pueden ser positivos y la dinámica correspondiente es llamada hipercaótica.

Para el caso de sistemas no autónomos, pueden ocurrir soluciones caóticas a partir de sistemas bidimensionales.

Es necesario aclarar la diferencia entre un atractor extraño y uno caótico. El primero tiene dimensión fractal, mientras que el segundo se caracteriza por uno o más exponentes de Lyapunov positivos. Un atractor extraño puede ser también caótico, pero no siempre es así. Atractores extraños y no caóticos han sido hallados en sistemas forzados cuasiperiódicamente. En esos casos, los atractores tienen una estructura fractal pero no se encuentran asociados con ningún exponente de Lyapunov positivo.

Actualmente existen varias transiciones a dinámicas caóticas que han sido bien estudiadas. Podemos mencionar las secuencias de doblamiento de período, los mecanismos de intermitencia (entre los que se encuentran los de tipo I, II y III). También existe un grupo de transiciones al caos denominadas rutas cuasiperiódicas, entre las que se cuentan el escenario de Ruelle-Takens, la ruptura de toroide y el doblamiento de toroide. Por último, es posible llegar a comportamientos caóticos de un sistema a través de las llamadas crisis.

#### Escenario de doblamiento de período

Esta transición a soluciones caóticas se encuentra asociada con bifurcaciones locales. A medida que el parámetro de control se varía gradualmente, se procede de una solución periódica a una solución caótica a través de una secuencia de bifurcaciones de doblamiento de período supercríticas.

#### Mecanismos de intermitencia

En mecánica de fluidos, intermitencia se refiere al estado en el cual el flujo laminar es interrumpido por estallidos turbulentos a intervalos irregulares.

El mecanismo de intermitencia puede describirse del siguiente modo: supongamos un sistema dinámico caracterizado por un parámetro de control  $r$ , y consideremos que para valores de  $r$  menores que un valor crítico  $r_c$ , el sistema presenta un ciclo límite atractor. A medida que  $r$  supera ligeramente el valor umbral  $r_c$  (umbral de intermitencia), la respuesta del sistema consiste en largos intervalos de oscilaciones (fases laminares) que parecen ser regulares y se asemejan el comportamiento oscilatorio para  $r < r_c$ , pero este comportamiento regular es interrumpido intermitentemente por estallidos caóticos (explosiones turbulentas) a intervalos irregulares. Con

el incremento de  $r$ , las fases laminares entre dos explosiones consecutivas se vuelven cada vez más pequeñas y más difíciles de reconocer. A medida que  $r$  se incrementa más, eventualmente las fases laminares desaparecen y la respuesta se vuelve completamente irregular (caótica).

Entonces, en el mecanismo de intermitencia, cuando un parámetro de control excede el umbral de intermitencia, la respuesta del sistema explota en un atractor mayor con el antiguo atractor periódico contenido como un subconjunto del nuevo atractor caótico. Entonces, como resultado de la bifurcación, una órbita periódica es reemplazada por caos en lugar de con una órbita periódica estable cercana. Esto se debe a que, durante las explosiones, la trayectoria se aleja de la vecindad de la órbita periódica que existe para  $r < r_c$ . Tres tipos de bifurcaciones cumplen con estos requerimientos: las bifurcaciones cyclic-fold, Hopf subcrítica, y de doblamiento de período subcrítica. Los mecanismos de intermitencia asociados con cada uno se denominan intermitencia de tipo I, tipo II, y tipo III, respectivamente. La pérdida de estabilidad de la órbita periódica a través de estas bifurcaciones no es suficiente para que ocurra intermitencia. La otra condición necesaria es la existencia de un mecanismo global que repetidamente reinyecte la trayectoria en la vecindad de la órbita periódica original (órbita fantasma). De otro modo, la trayectoria nunca revisitará la órbita fantasma.

Ejemplo: Consideremos el sistema de Lorentz

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{1.29}$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz \tag{1.30}$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy. \tag{1.31}$$

A medida que  $\rho$  es gradualmente incrementado, una bifurcación cyclic-fold ocurre aproximadamente en  $\rho_c = 166,06$ . Subsecuentemente, ocurren oscilaciones caóticas para  $\rho > \rho_c$ , como puede verse en la figura 1.11.

### Escenario de Ruelle-Takens

En el llamado escenario de Landau, una secuencia de bifurcaciones Hopf toma lugar, añadiendo una frecuencia fundamental con cada bifurcación. Por tanto, después de la  $(k - 1)$ -ésima bifurcación, el estado  $x_i$  asociado con el movimiento es descrito por

$$x_i = f_i(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_k t) \tag{1.32}$$

con los  $\omega_j$  incommensurables. A medida que  $k$  aumenta el movimiento se vuelve más irregular. Entonces, en el escenario de Landau, una secuencia infinita de bifurcaciones Hopf es requerida en la transición a un movimiento turbulento, el cual es caracterizado por un número infinito de frecuencias incommensurables. No obstante, este movimiento final no puede ser llamado caótico dado que no posee sensibilidad a las condiciones iniciales.

Por otra parte, se ha demostrado que una perturbación arbitraria de un flujo cuasiperiódico en un  $N$ -toroide, donde  $N \geq 3$ , puede dar como resultado:

- (a) La persistencia de la cuasiperiodicidad con  $N$  frecuencias incommensurables;
- (b) el enlazamiento de frecuencias durante el cual la órbita asociada es ya sea periódica o cuasiperiódica con menos de  $N$  frecuencias incommensurables;
- (c) caos.

Esto forma la base del escenario Ruelle-Takens, donde, en contraste con el escenario de Landau, un número finito de bifurcaciones Hopf sucesivas puede llevar de una solución de equilibrio a un atractor caótico.

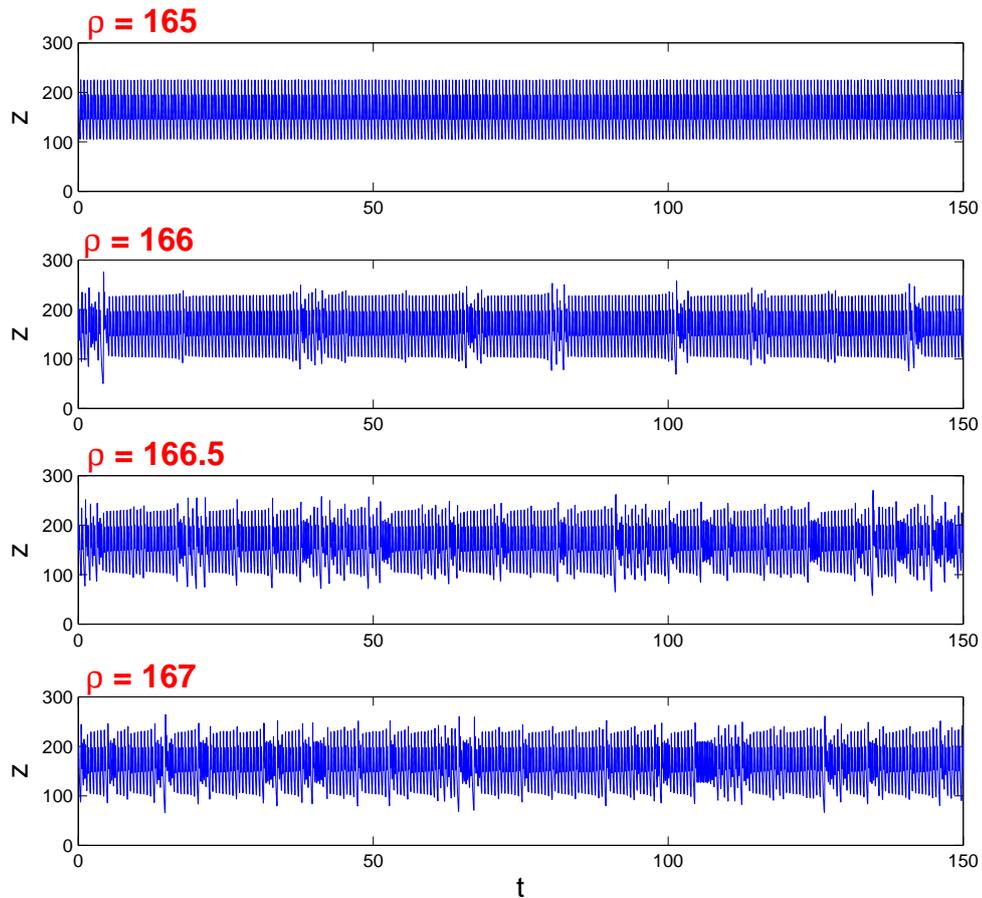


Figura 1.11: Transición al caos a través de intermitencia en las ecuaciones de Lorenz para  $\sigma = 10$  y  $\beta = 8/3$ .

### Ruptura de toro

Supongamos que un atractor puntual pierde su estabilidad debido a una bifurcación Hopf supercrítica, resultando en un atractor periódico. Subsecuentemente, este atractor periódico experimenta una bifurcación Hopf secundaria supercrítica, resultando en un atractor cuasiperiódico bi-periódico (bi-toro).

A medida que un parámetro de control del sistema es variado pueden ocurrir una variedad de bifurcaciones del toro, dando lugar a los siguientes escenarios de postbifurcación:

- (1) Un atractor periódico complejo (oscilaciones de bloqueo de fase o de modo mezclado);
- (2) un atractor no extraño cuya órbita exhibe el rasgo de excursiones intermitentes similar al discutido en el contexto de mecanismos de intermitencia;
- (3) un atractor caótico.

Si el acoplamiento entre los dos modos de oscilación es suficientemente fuerte, el atractor cuasiperiódico pierde estabilidad, resultando en un atractor de fase bloqueada. En la sección de

Poincaré asociada, la órbita cerrada se rompe resultando en un número discreto de puntos. En este caso tenemos un fenómeno de sincronización<sup>3</sup>.

Como se dijo, el sistema también puede evolucionar a través de la destrucción del toroide y el surgimiento de un atractor caótico. Esta transición al caos a través de un atractor cuasiperiódico bi-periódico suele llamarse caos a través de la ruptura del toro. En este escenario, la curva cerrada que originalmente se ve en la sección de Poincaré se deforma, se vuelve fractal, y finalmente se rompe. Entonces esta transición al caos ocurre a través de la destrucción de la curva cerrada en la sección de Poincaré.

### **Doblamiento de toroide**

En este escenario, un punto fijo pierde su estabilidad a través de una bifurcación Hopf supercrítica, originando una solución periódica estable caracterizada por una frecuencia  $\omega_1$ . Hay un punto atractor en la sección de Poincaré correspondiente. A medida que el parámetro de control es variado, la solución periódica pierde su estabilidad a través de una bifurcación Hopf secundaria supercrítica, produciendo una segunda frecuencia  $\omega_2$  (inconmensurable). El atractor cuasiperiódico bi-periódico resultante es un bi-toro. La intersección con la sección de Poincaré llena densamente una curva cerrada cuando  $\omega_2/\omega_1$  es irracional. A medida que se varía del parámetro de control, el atractor toro-dos experimenta una cascada de bifurcaciones de doblamiento de período en la cual el período  $2\pi/\omega_2$  es doblado en cada bifurcación. Después de cada bifurcación, el estado de post bifurcación es un nuevo toroide que forma dos lazos alrededor del toroide original.

Hay dos posibilidades: que la cascada sea completa o incompleta. En la última posibilidad, el sistema experimenta una transición al caos mediante la deformación del toroide de modo similar a la transición por ruptura de toroide. Cuando la cascada es completa, el caos emerge al final de la secuencia, y la respuesta del sistema es un movimiento caóticamente modulado.

### **Crisis**

El término crisis describe ciertos cambios cualitativos repentinos en la dinámica caótica de un sistema disipativo a medida que un parámetro de control es variado. Una crisis ocurre cuando un atractor caótico entra en contacto con una solución periódica inestable.

Se distinguen tres tipos de crisis, de acuerdo con la naturaleza de la discontinuidad inducida en el atractor caótico. Las mismas se enlistan en la tabla 1.3.

---

<sup>3</sup>El bloqueo de frecuencia o sincronización es un proceso en el cual, por ejemplo, un flujo cuasiperiódico caracterizado por las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , sufre una pequeña perturbación por la cual es reemplazado por un flujo asintótico a órbitas periódicas atractivas con una razón de frecuencias  $p/q$ .

Crisis exterior o de contorno	Bifurcaciones explosivas	
	Crisis interior	Crisis de fusión de atractores
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El atractor caótico es repentinamente destruido a medida que el parámetro de control <math>\alpha</math> pasa a través de su valor crítico <math>\alpha_c</math>.</li> <li>• En el estado de postbifurcación, el movimiento es transitoriamente caótico antes de tender a un movimiento limitado (punto fijo, solución periódica, solución cuasiperiódica, o solución caótica) o a una solución no limitada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El tamaño del atractor caótico se incrementa repentinamente a medida que <math>\alpha</math> es variado a través de <math>\alpha_c</math>.</li> <li>• Durante esta crisis, el atractor caótico colisiona con una solución periódica o de equilibrio inestable que se encuentra en el interior de su cuenca de atracción.</li> <li>• Viene acompañado por el proceso llamado intermitencia inducida por crisis: para <math>\alpha</math> ligeramente mayor que <math>\alpha_c</math>, la órbita en el atractor pasa mucho tiempo en la región en la cual estaba confinado el viejo atractor. Seguidamente, el atractor escapa de la región fantasma y circula alrededor de la nueva región, para luego regresar a la zona fantasma y así sucesivamente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dos o más atractores caóticos de un sistema con simetrías se unen para formar un solo atractor caótico a medida que <math>\alpha</math> pasa a través de <math>\alpha_c</math>.</li> <li>• El nuevo atractor puede ser mayor en tamaño que la unión de los dos atractores previos a la crisis.</li> <li>• A medida que <math>\alpha</math> es variado en la otra dirección, ocurre la crisis inversa; es decir, ocurre la creación de un atractor.</li> </ul>

Tabla 1.3: Clasificación de las posibles crisis de un atractor.

## Capítulo 2

# Teoría de la información y mecánica estadística

La noción de información usada por Shannon es una generalización del concepto de entropía. La entropía surge originalmente en la termodinámica, como una función que caracteriza un sistema y depende de los parámetros extensivos del mismo. La mecánica estadística, que explica los fenómenos macroscópicos tratados por la termodinámica como consecuencias estadísticas de la dinámica de las partes microscópicas constitutivas de ellos, reinterpreta la entropía como una medida del desorden microscópico, directamente relacionada con el número de microestados accesibles del sistema en estudio.

No obstante, la entropía puede ser usada para describir el orden de un sistema en un contexto mucho más general que el de la física. Shannon fue uno de los pioneros en el desarrollo de este enfoque. Argumentó que medir orden y medir información es esencialmente lo mismo; es decir, en una situación altamente desordenada, hacer una medida brindará una gran ganancia de información, e inversamente, en una situación altamente ordenada, llevar a cabo una medida nos dará poca información. Entonces para un sistema que puede encontrarse aleatoriamente en uno de varios estados diferentes la entropía de su distribución es lo mismo que la información ganada al conocer en qué estado se encuentra.

Existen dos conjuntos de postulados a través de los cuales es posible desarrollar la mecánica estadística de equilibrio; el primer conjunto está basado en la idea de que la situación de equilibrio coincide con una energía interna mínima del sistema. Por otro lado, el segundo conjunto de postulados sugiere que dicha situación de equilibrio implica una maximización de la entropía. Con este segundo enfoque, Jaynes desarrolló un modo de inferencia conocido como formalismo de máxima entropía, que tiene aplicaciones más amplias que la mecánica estadística en sí misma. Las nociones desarrolladas en este capítulo proceden fundamentalmente de un SFI working paper de Farmer y Bais [4], y de dos artículos de E. T. Jaynes [5, 6], así como de los apuntes de una de las clases que impartió durante un curso en la universidad de Brandeis en 1962, publicados por dicha universidad [7].

### 2.1. Formalismo general de máxima entropía

Al comienzo de cualquier problema en la teoría de probabilidad, surge la necesidad de asignar alguna distribución de probabilidades inicial. Éste es un problema para el cual las leyes físicas no nos brindan ayuda. Para resultar de utilidad, la asignación de probabilidades iniciales debe coincidir con la información inicial que disponemos (es decir, los resultados de medidas de ciertos parámetros). Debe notarse que el problema no es hallar la distribución de probabilidades inicial

que describa correctamente la situación física real. Ésta es desconocida, y siempre permanecerá así, debido a nuestra carencia de información. A fin de disponer de una teoría útil debemos encontrar una distribución que describa lo mejor posible nuestro estado de conocimiento acerca de la situación física.

La asignación de probabilidades que describe con mayor honestidad lo que conocemos es aquella lo más suave y ensanchada posible, sujeta a los datos disponibles. Ésta es la asignación más conservadora, en el sentido de que no nos permite realizar cualquier conclusión que no esté garantizada por los datos.

Esto sugiere que el problema de hallar una distribución de probabilidades inicial es de tipo variacional. Necesitamos una medida del ensanchamiento de una distribución de probabilidades que podamos maximizar, sujeta a las ligaduras que representan la información disponible. La medida de información introducida por Shannon posee las propiedades matemáticas apropiadas (ver apartado 3.2.1) para ser empleada como medida de la cantidad de incerteza en una distribución de probabilidades. Por ende, definimos la entropía en la teoría de información para una distribución de probabilidades discreta  $P = \{p_i\}_{i=1,\dots,n}$  como

$$S_I = - \sum_i^n p_i \ln(p_i). \quad (2.1)$$

Supongamos que la cantidad  $x$  puede tomar los valores  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  donde  $n$  puede ser finito o infinito, y los valores promedio de varias funciones  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  están dados, donde  $m < n$ . El problema es hallar la asignación de probabilidades  $p_i = p(x_i)$  que satisfaga la información disponible:

$$p_i \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i f_k(x_i) = \langle f_k(x) \rangle = F_k \quad (2.4)$$

sujeta a estas condiciones que maximice la entropía (2.1).

La solución de este problema matemático puede ser hallado inmediatamente por el método de multiplicadores de Lagrange [5, 7].

Introduciendo los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  la distribución de probabilidad de máxima entropía está dada por

$$p_i = \exp\{-[\lambda_0 + \lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i)]\} \quad (2.5)$$

donde las constantes están determinadas por

$$\langle f_r(x) \rangle = - \frac{\partial}{\partial \lambda_r} \ln Z \quad (2.6)$$

$$\lambda_0 = \ln Z \quad (2.7)$$

siendo

$$Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_i \exp\{-[\lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i)]\} \quad (2.8)$$

conocida como función de partición.

La entropía de la distribución (2.5) entonces se reduce a

$$(S_I)_{max} = \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle f_k \rangle. \quad (2.9)$$

Las funciones  $\ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  y  $S(\langle f_1 \rangle, \dots, \langle f_m \rangle)$  son equivalentes en el sentido de que cada una brinda la información completa acerca de la distribución de probabilidades (nótese de (2.9), y explicitando que  $(S_I)_{max} = S(\langle f_1 \rangle, \dots, \langle f_m \rangle)$ , que estas funciones son transformadas de Legendre una de la otra).

Las relaciones (2.5-2.9) son consecuencias de la maximización de la entropía de la teoría de información sujeta a las ligaduras de los valores promedio de ciertas cantidades. Aunque muestran una fuerte semejanza formal con las reglas de cálculo provista por la mecánica estadística, no hacen referencia a la física, y, por tanto, pueden aplicarse igualmente bien a cualquier problema, dentro o fuera de la física, donde sea posible describir la situación a través de la enumeración de un conjunto discreto de probabilidades y por la especificación de valores promedio de varias cantidades.

Como ya hemos dicho, la asignación de probabilidades de máxima entropía no puede ser considerada como la descripción de un estado objetivo existente; es sólo un medio para describir un estado de conocimiento de modo que éste posea el mínimo sesgo con un cierto criterio. Entonces, las ecuaciones (2.5-2.9) representan simplemente las mejores predicciones que somos capaces de hacer con la información dada. No podemos asegurar que esas predicciones sean las correctas, sólo que para ser mejores, necesitaríamos más información.

Se puede dar una interpretación un poco más objetiva de este formalismo en los casos en los que  $x_i$  ha sido el resultado de algún experimento aleatorio que puede ser repetido varias veces. Supongamos que se dispone como datos de los mismos valores promedio  $\langle f_k(x) \rangle$  que en la situación anterior. Si el experimento aleatorio es repetido  $N$  veces el resultado  $x_i$  será obtenido  $m_i$  veces,  $i = 1, \dots, n$ . Vamos a calcular las mejores estimadores de los números  $m_i$  en base a la información disponible. Tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{N} f_k(x_i) = \langle f_k \rangle ; k = 1, \dots, m \quad (2.10)$$

y

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{N} = 1. \quad (2.11)$$

Las ecuaciones (2.10) y (2.11) no determinan unívocamente los  $m_i$  si  $m < n - 1$ , por lo que es necesario introducir algún principio adicional, que contribuya a establecer el significado de mejor estimador. En  $N$  repeticiones del experimento aleatorio, hay a priori  $n^N$  resultados concebibles. Pero para un dado  $m_i$  hay sólo

$$W \equiv \frac{N!}{m_1! \dots m_n!} = \frac{N!}{(Ng_1)! \dots (Ng_n)!} \quad (2.12)$$

con

$$g_i = \frac{m_i}{N} \quad (2.13)$$

la frecuencia relativa con la cual el resultado  $x_i$  es obtenido.

Si se intenta encontrar la elección de los  $g_i$  que ocurre en el mayor número de modos sin más información que (2.10), un criterio razonable parece ser el preguntar qué elección maximizará (2.12) mientras coincide con (2.10). En el límite de  $N$  grande

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log W = - \sum_{i=1}^n g_i \log g_i. \quad (2.14)$$

Entonces, sí tenemos que estimar las frecuencias límite para un gran número de pruebas, (2.10) y (2.14) constituyen el mismo problema matemático que (2.4) y (2.1). La misma solución y propiedades formales surgen inmediatamente, no obstante, ésto nos brinda una interpretación alternativa del formalismo de máximo entropía: la probabilidad  $p_i$  que la teoría de información asigna a un evento  $x_i$  en una sola medición es numéricamente igual a un estimador de la frecuencia relativa de este resultado en un gran número de pruebas.

## 2.2. Generalización para sistemas descritos por una matriz de densidad o por distribuciones de probabilidad continuas

### 2.2.1. Matriz de densidad

Los valores esperados de los operadores  $F_k$  de un sistema descrito por una matriz de densidad  $\rho$  son [8, Pág.34]

$$\langle F_k \rangle = Tr(\rho F_k). \quad (2.15)$$

La entropía de la teoría de información correspondiente a  $\rho$  es [6]

$$S_I = -Tr(\rho \ln \rho). \quad (2.16)$$

Maximizar  $S_I$  sujeta a las ligaduras impuestas por el conocimiento de  $\langle F_k \rangle$  da

$$\rho = \frac{1}{Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} \exp\{-\lambda_1 F_1 - \dots - \lambda_m F_m\} \quad (2.17)$$

donde

$$Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = Tr \exp\{-\lambda_1 F_1 - \dots - \lambda_m F_m\}. \quad (2.18)$$

### 2.2.2. Distribuciones continuas

La expresión de la entropía de Shannon para una distribución de probabilidades discreta está dada por la expresión (2.1)

$$S_I^{(d)} = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i). \quad (2.19)$$

Supongamos que los puntos discretos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , se vuelven más y más numerosos, tal que en el límite  $n \rightarrow \infty$ , la densidad de puntos se aproxima a una función definida  $m(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\text{número de puntos en } a < x < b) = \int_a^b m(x) dx. \quad (2.20)$$

En este límite, las diferencias adyacentes  $(x_{i+1} - x_i)$  en la vecindad de un valor particular de  $x$  tienden a cero tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_{i+1} - x_i) = [m(x_i)]^{-1}. \quad (2.21)$$

La distribución de probabilidades discreta  $p_i$  tenderá a una densidad de probabilidad continua  $w(x)$ ,

$$p_i = w(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (2.22)$$

o

$$p_i \rightarrow w(x_i)[nm(x_i)]^{-1}. \quad (2.23)$$

En consecuencia, (2.19) se vuelve

$$S_I^{(d)} \rightarrow - \int w(x) \ln \left[ \frac{w(x)}{nm(x)} \right] dx. \quad (2.24)$$

En el límite, esta expresión contiene un término infinito  $\ln n$ ; si lo restamos, la diferencia se aproximará a un límite definido que tomaremos como la medida de información continua

$$S_I^{(c)} = \lim[S_I^{(d)} - \ln n] = - \int w(x) \ln \left[ \frac{w(x)}{m(x)} \right] dx. \quad (2.25)$$

Con el mismo razonamiento, al pasar de una distribución discreta a una distribución continua de varias variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , obtenemos

$$S_I^{(c)} = - \int \dots \int w(x_1, x_2, \dots, x_r) \ln \left[ \frac{w(x_1, x_2, \dots, x_r)}{m(x_1, x_2, \dots, x_r)} \right] dx_1 dx_2, \dots dx_r. \quad (2.26)$$

Apliquemos esto a la ecuación de Liouville de la mecánica clásica. Para un sistema de  $N$  partículas de masa  $m_0$ ,  $W_N(x_1 p_1, \dots, x_N p_N; t) d^3 x_1 \dots d^3 p_N$  es la probabilidad de que al tiempo  $t$  el sistema se encuentre en el elemento  $d^3 x_1 \dots d^3 p_N$  del espacio fase. Para poder establecer la medida de información en este caso, debemos decidir una medida  $m(x_1, \dots, p_N)$  para el espacio fase. Considerando la mecánica estadística clásica como una forma límite de la mecánica estadística cuántica discreta; entonces la proposición de que cada estado cuántico discreto corresponde a un volumen  $h^{3N}$  del espacio de fases clásico determinará nuestra medida uniforme como resultado de pesar de igual forma todos los estados cuánticos ortogonales, y realizar el límite  $h \rightarrow 0$ . En este caso,  $m(x_1, \dots, p_N) = \text{const}$ , y es descartada.

Entonces, nuestra medida de información será simplemente el negativo de la función H de Gibbs,

$$-S_I = H_G = \int W_N \ln W_N d^3 x_1 \dots d^3 p_N. \quad (2.27)$$

Supongamos que conocemos una función macroscópica del sistema, por ejemplo la densidad de masa  $\rho(x)$ , como función de la posición. Interpretamos esta función como la especificación, en cada punto del espacio, del valor esperado de cierta cantidad:

$$\langle f_1(x_1 p_1 \dots x_N p_N; x) \rangle = \int W_N f_1 d^3 x_1 \dots d^3 p_N = \rho(x) \quad (2.28)$$

donde

$$f_1(x_1 p_1 \dots x_N p_N; x) = \sum_{i=1}^N m_0 \delta(x_i - x). \quad (2.29)$$



## Capítulo 3

# Medidas de la complejidad estadística

Este capítulo tiene como objetivo presentar y describir brevemente las medidas que se utilizarán en el estudio del capítulo siguiente. Se basa primordialmente en los artículos de Rosso, Martín y Plastino [9], Shannon [10], Renyi [11] y Tsallis [12], y en el libro de Frieden [13].

Existen en la literatura distintas formas de cuantificar la complejidad estadística, así como distintas definiciones de la misma (entre otras, podemos citar [14, 15, 16, 17, 18]). Una posible definición de complejidad estadística está relacionada con la existencia de intrincados patrones en la dinámica de un sistema sencillo [9, 19]. Así, tanto una dinámica periódica como un ruido blanco, no revisten una gran complejidad; el primer comportamiento por resultar de gran simplicidad, y el segundo porque no posee una estructura no trivial.

Podemos decir entonces que, en base a esta interpretación de la complejidad estadística, estamos interesados en cuantificar el grado de regularidad u orden de la dinámica de un sistema. En este sentido, podríamos tener tres comportamientos posibles de una hipotética medida de complejidad estadística:

- que su valor se incremente con un creciente "desorden";
- que crezca con un orden creciente;
- que tenga valores bajos para alto grado tanto de orden como desorden, y posea un máximo en alguna situación intermedia.

Las medidas que son de interés en el presente trabajo son del tercer tipo. Una de las primeras definiciones de complejidad con estas características es la llamada complejidad LMC, por las iniciales de sus autores [20].

Esperamos que las características de la dinámica se vean reflejadas en una distribución de probabilidades obtenida para el sistema en estudio. Entonces, es lógico pensar que un cuantificador de la complejidad estadística sea algún tipo de funcional de la distribución de probabilidades correspondiente al sistema.

Una medida de complejidad debe dar cuenta de la falta de información cuando nos enfrentamos al hecho de que el conocimiento que tenemos acerca del sistema es probabilístico, es decir debe ser influenciada por la incerteza asociada a los procesos físicos descritos por una distribución de probabilidades. Por tanto, debe involucrar una medida de información.

No obstante, una medida de complejidad no puede ser desarrollada sólo en función de una medida de información. Resulta razonable además incorporar una medida que de cuenta de qué tan "separadas" se encuentran la distribución de probabilidades del sistema en tratamiento y la distribución uniforme, que nos da una incerteza máxima del estado del sistema.

Las medidas de complejidad poseen en la actualidad diversas aplicaciones, como el estudio de sistemas biológicos [21] y del límite clásico de la mecánica cuántica [22], así como el análisis de distintos regímenes caóticos en sistemas a tiempo discreto [23]. Esta última aplicación fue de la que motivó el presente trabajo.

### 3.1. Distribuciones de probabilidad

Para evaluar la complejidad estadística, el punto de partida es determinar una distribución de probabilidades  $P$  que describa las características propias de la dinámica o serie temporal en estudio. Se han propuesto distintos procedimientos para la elección de  $P$ , como procedimientos basados en la construcción de histogramas de amplitudes [23, 24], análisis de Fourier [25], transformaciones wavelet [26], o probabilidad de permutaciones [27].

#### 3.1.1. Método de histograma

Para construir una distribución de probabilidades, ya sea para una serie discreta o continua de datos, a través de un procedimiento de histograma, se divide el intervalo  $[a, b]$  determinado por los valores máximo y mínimo de la serie en un número finito  $N$  de subintervalos consecutivos de igual tamaño y no superpuestos  $A_i$ , de modo que  $\bigcup_{i=1}^N A_i = [a, b]$  y  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ . Luego se cuenta el número de datos de la serie correspondientes a cada subintervalo. Por último, se dividen estas cantidades por el total de datos, obteniendo así un histograma normalizado.

#### 3.1.2. Método de Bandt y Pompe

Este método, desarrollado por C. Bandt y B. Pompe, está basado en las frecuencias de ocurrencia de permutaciones de elementos vecinos de una serie.

Consideremos una serie de datos  $\{x_t\}_{t=1, \dots, T}$ . Se toman todos los conjuntos de  $n$  elementos vecinos de la serie, es decir, todos los conjuntos de la forma  $\{x_{t+i}\}$  con  $i = 1, \dots, n$ , correspondientes a cada valor  $t = 1, \dots, T - n$ . Se numeran los elementos de cada conjunto

$$x_{t+i} \implies i$$

con  $i = 1, \dots, n$  y se ordenan en forma creciente o decreciente en función del valor de cada dato. Cada conjunto de  $n$  elementos ordenados se considera como un evento; a su vez, cada evento tiene asociado una permutación  $\pi$  de  $n$  enteros con los que se numeraron los elementos del evento.

$$\{x_{t+i}\}_{i=1, \dots, n} \equiv \text{evento } j \iff \pi$$

con  $j = 1, \dots, T - n$ .

Se consideran entonces las  $n!$  posibles permutaciones correspondientes a las distintas formas de ordenar  $n$  elementos. Luego se cuentan los eventos que tienen asociados cada una de las permutaciones. De este modo se obtiene una lista de ocurrencia de cada uno de los eventos. Dividiendo cada componente de esta lista por el número total de eventos se consigue una distribución de probabilidad de cada permutación posible.

$$p(\pi) = \frac{\#\{t \mid t \leq T - n, (x_{t+1}, \dots, x_{t+n}) \text{ es del tipo } \pi\}}{T - n + 1}$$

donde  $\#$  significa número de casos.

## 3.2. Medidas de la información

Una medida de información puede definirse como una cantidad que caracteriza una distribución de probabilidades asociada a un sistema. Su función es la de cuantificar la incerteza presente en el estudio de procesos descriptos probabilísticamente.

Supongamos que caracterizamos un sistema con una distribución de probabilidades discreta  $P = \{p_i\}_{i=1}^n$ , ( $0 < p_i < 1$ ), siendo  $n$  el número de eventos posibles,  $n < \infty$ , y, además,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . La falta de información que caracteriza la naturaleza aleatoria de las probabilidades  $p_1, \dots, p_n$  puede medirse con una cierta función  $S(p_1, \dots, p_n)$  de estas probabilidades, también llamada entropía estadística, incerteza, o dispersión.

Una medida de información debe ser tal que si  $S[P] = 0$  estamos en condiciones de predecir con certeza cuál de los posibles resultados  $i$  cuyas probabilidades están dados por los  $p_i$  tendrá lugar. Nuestro conocimiento del proceso descrito por la distribución de probabilidades es, en esta instancia, máximo. Por otro lado, nuestra ignorancia es máxima para una distribución uniforme  $P_e = \{p_j = \frac{1}{N}, j = 1, \dots, N\}$ . Entonces,  $S[P_e] = S_{max}$ .

### 3.2.1. Shannon

Si tenemos una distribución de probabilidad  $\{p_i\}_{i=1}^n$ , la entropía de Shannon viene dada por

$$S(p_1, \dots, p_n) = -k \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \quad (3.1)$$

donde  $k$  es una constante positiva. Dicha constante está relacionada con la elección de la base del logaritmo. En la teoría de comunicación se elige  $k = 1$  (en tal caso, la base del logaritmo es 2, ya que se trabaja con bits como unidades de información).

La innovación de Shannon fue mostrar que la relevancia del concepto de entropía considerada como una medida de información no se encontraba restringida a la termodinámica y a la mecánica estadística, sino que podía ser usada en cualquier contexto donde pudiera definirse una distribución de probabilidades.

Para justificar que la elección de la expresión (3.1) como una medida de información no era arbitraria, Shannon en 1949 [28], y Khinchin en 1957 [29] enunciaron teoremas con hipótesis similares. Los mismos demostraban que, bajo esas condiciones, la única medida de información posible estaba dada por (3.1).

**Teorema 3.1 (Teorema de Shannon)** *Sea  $\{p_i\}_{i=1}^n$  un conjunto normalizado de probabilidades, y  $n$  la cantidad de eventos posibles (microestados de un sistema en el contexto de la mecánica estadística):*

- I.  $S(p_1, \dots, p_n)$  es una función continua con respecto a todos sus argumentos;
- II.  $S(p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n})$  es monótonamente creciente con  $n$ ;
- III.  $S(A + B) = S(A) + S(B)$  si  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ , siendo  $A$  y  $B$  dos subsistemas independientes con distribuciones de probabilidades  $p_i^A$  y  $p_j^B$  respectivamente;
- IV.

$$S(p(n_m)_1, \dots, p(n_m)_{n_m}, p(n_l)_1, \dots, p(n_l)_{n_l}) = S(p_m, p_l) + p_m S\left(\frac{p(n_m)_1}{p_m}, \dots, \frac{p(n_m)_{n_m}}{p_m}\right) + p_l S\left(\frac{p(n_l)_1}{p_l}, \dots, \frac{p(n_l)_{n_l}}{p_l}\right) \quad (3.2)$$

donde  $p_m = \sum_{i=1}^{n_m} p(n_m)_i$ ,  $p_l = \sum_{i=1}^{n_l} p(n_l)_i$  y  $n = n_l + n_m$

Un funcional  $S(p_1, \dots, p_n)$  satisface estas cuatro condiciones si y sólo si  $S$  está dada por (3.1).

**Teorema 3.2 (Teorema de Khinchin)** Sea  $\{p_i\}_{i=1}^n$  un conjunto normalizado de probabilidades, y  $n$  la cantidad de microestados de un sistema:

- I.  $S(p_1, \dots, p_n)$  es una función continua con respecto a todos sus argumentos;
- II.  $S(p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n})$  es monótonamente creciente con  $n$ ;
- III. la inclusión de un evento imposible no altera el valor de  $S$ :  $S(p_1, \dots, p_n, 0) = S(p_1, \dots, p_n)$ ;
- IV. sea un sistema  $\Theta = A + B$ . Sean  $\{p_i^A\}$  y  $\{p_j^B\}$  las distribuciones de probabilidad de los subsistemas  $A$  y  $B$  respectivamente, y sea  $\{p_{ij}\}$  la distribución de  $\Theta$ . Entonces

$$S(\{p_{ij}\}) = S(\{p_i^A\}) + \sum_i p_i^A S(\{p_j^B\} | p_i^A)$$

$$S(\Theta) = S(A) + S(B | A).$$

El término  $S(\{p_j^B\} | p_i^A)$  representa la entropía condicional del sistema  $B$  bajo la situación de que el sistema  $A$  se encuentre en el estado  $i$ . Cuando los subsistemas son independientes, este postulado se reduce a la aditividad de la entropía.

Un funcional  $S(p_1, \dots, p_n)$  satisface estas cuatro condiciones si y sólo si  $S$  está dada por (3.1).

Dos propiedades importantes de la entropía son la aditividad y la concavidad.

La entropía es una función cóncava de sus argumentos. Esto significa que para dos distribuciones de probabilidad cualquiera  $P$  y  $P'$  y para cualquier  $\lambda$  tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$  tenemos

$$S[\lambda P + (1 - \lambda)P'] \geq S[P] + (1 - \lambda)S[P'].$$

Físicamente, la aditividad (postulado III del teorema 3.1) significa que la entropía de un experimento combinado consistente en el desarrollo de dos experimentos independientes es igual a la suma de las entropías de esos experimentos.

Además, podemos decir que la entropía es una función simétrica de sus argumentos:

$$S(p_1, \dots, p_i, p_j, \dots, p_n) = S(p_1, \dots, p_j, p_i, \dots, p_n).$$

Esta medida de información fue propuesta por C. E. Shannon en 1948 [?]. Surgió en el marco de la teoría de comunicación. El problema fundamental de la comunicación es el de reproducir en un punto, ya sea exacta o aproximadamente, un mensaje seleccionado en otro. Se trata de cuantificar la cantidad de información contenida en un mensaje. Información no debe confundirse con significado; el aspecto significativo es que el mensaje actual es uno seleccionado de un conjunto de posibles mensajes. El sistema debe ser diseñado para operar para cada selección posible.

El objetivo de Shannon fue postular una cantidad que midiera cuánta información es "producida", o mejor aún, qué tasa de información es producida en un proceso estocástico<sup>1</sup> en el cual existe un número finito de posibles estados de un sistema ( $s_1, s_2, \dots, s_n$ ) y, asociados a estos, un conjunto de probabilidades de transición  $p_i(j)$  (la probabilidad de que si el sistema se encuentra en el estado  $s_i$  vaya al estado  $s_j$ ). Los procesos de este tipo, en los que la probabilidad en un cierto tiempo depende de la probabilidad en un instante inmediatamente anterior, son conocidos como procesos de Markoff discretos.

<sup>1</sup>Proceso estocástico: sistema físico o modelo matemático de un sistema que produce una secuencia de símbolos gobernada por un conjunto de probabilidades.

Como se dijo en el capítulo 2, la forma de la cantidad  $S$  puede ser reconocida como la entropía definida en ciertas formulaciones de la mecánica estadística donde  $p_i$  es la probabilidad de que un sistema se encuentre en la celda  $i$  de su espacio fase. En ese contexto, la constante  $k$  se identifica con  $k_b$ , la constante de Boltzmann.

Actualmente, la entropía de Shannon es utilizada en distintas ramas del conocimiento, como las ciencias de la tierra [30, 31], química [32, 33], biología y farmacología [34], ecología [35, 36], medicina [37, 38], entre otras.

### 3.2.2. Renyi

Renyi presenta en un artículo [11] una serie de postulados, debidos a D. K. Fadeev, que caracterizan la entropía de Shannon. Estos son:

- a)  $S(p_1 p_2, \dots, p_n)$  es una función simétrica de sus variables para  $n = 2, 3, \dots$ ;
- b)  $S(p, 1 - p)$  es una función continua de  $p$  para  $0 \leq p \leq 1$ ;
- c)  $S(1/2, 1/2) = 1$ ;
- d)  $S(tp_1, (1 - t)p_1, p_2, \dots, p_n) = S(p_1, p_2, \dots, p_n) + p_1 S(t, 1 - t)$  para cualquier distribución  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  y para  $0 \leq t \leq 1$ .

A éstos, añade la condición de aditividad de la entropía (postulado III del teorema 3.1). Dado que esta condición es más débil que el postulado (d) de la lista, existen otras cantidades además de (3.1) que satisfacen los postulados (a), (b), (c) y la aditividad. Un conjunto de esas cantidades es el que postula Renyi:

$$S_\alpha^{(R)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \left( \sum_{k=1}^n (p_k)^\alpha \right) \quad (3.3)$$

donde  $\alpha > 0$  y  $\alpha \neq 1$ .

Khinchin también demostró que si se reemplaza el cuarto postulado de su teorema por la condición menos restrictiva de que las entropías son aditivas cuando los subsistemas no están correlacionados, entonces los postulados son satisfechos por dos formas entrópicas: la entropía de Shannon y la entropía de Renyi.

Una interpretación de la entropía de Renyi es que, mientras mayor es el parámetro  $\alpha$ , mayor es la dependencia de la entropía de las probabilidades de los eventos más probables.

Puede verse claramente que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha^{(R)}(p_1 p_2, \dots, p_n) = - \sum p_i \log p_i.$$

### 3.2.3. Tsallis

La entropía de Tsallis [12] viene dada por

$$S_q^{(T)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{(q - 1)} \sum_{k=1}^n [p_k - (p_k)^q] \quad (3.4)$$

donde el parámetro  $q$  es un número real  $q \neq 1$ . Las probabilidades son entonces escaladas por  $q$ , lo que significa que pueden ser reforzadas o debilitadas. La entropía de Tsallis posee las propiedades usuales de positividad, simetría y concavidad que caracterizan a las entropías de

Medidas de las información	Ecuación	N° de ecuación
Shannon	$S(p_1, \dots, p_n) = -k \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$	(3.1)
Renyi	$S_\alpha^{(R)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{1-\alpha} \ln(\sum_{k=1}^n (p_k)^\alpha)$	(3.3)
Tsallis	$S_q^{(T)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{(q-1)} \sum_{k=1}^n [p_k - (p_k)^q]$	(3.4)

Tabla 3.1: Resumen de las distintas medidas de la información.

Shannon y Renyi. No obstante, no satisface el postulado IV del teorema 3.1 ni la aditividad estándar (postulado III del teorema 3.1).

La propiedad característica de la entropía de Tsallis es la pseudoaditividad:

$$S_q^{(T)}(A, B) = S_q^{(T)}(A) + S_q^{(T)}(B) + (1 - q)S_q^{(T)}(A)S_q^{(T)}(B),$$

con  $A$  y  $B$  siendo dos sistemas de eventos finitos mutuamente independientes cuya distribución conjunta de probabilidades satisface

$$p(A, B) = p(A)p(B).$$

De esto, es evidente que  $q$  es una medida de la no-extensividad del sistema.

La entropía de Shannon es recuperada en el límite de  $q \rightarrow 1$ .

La entropía de Tsallis ha encontrado diversas aplicaciones no sólo en el campo de la física teórica, sino también en áreas prácticas y del conocimiento como el análisis de imágenes [39], la geología [40], economía [41], astrofísica [42], etc.

### 3.2.4. Resumen

En la tabla 3.1 se encuentra un resumen de las distintas medidas de la información.

## 3.3. Distancias estadísticas

Para construir una medida de complejidad estadística no alcanza sólo con una medida de desorden o información. Es sensato incorporar algún tipo de distancia  $D$  a la distribución de probabilidades uniforme (teniendo en cuenta que una distribución uniforme maximiza las medidas de información tratadas anteriormente). Dicha distancia se conoce como distancia estadística. Existen varias cantidades que pueden ser utilizadas como una distancia estadística; algunas de ellas son:

- Distancia euclidiana
- Distancia de Wootters
- Entropías relativas
- Divergencias de Jensen

### 3.3.1. Distancia euclidiana

La elección más simple para una distancia es la euclidiana. Si  $D$  es la norma euclidiana en  $R^n$  tenemos

$$D_E[P, P_e] = \|P - P_e\|_E = \sum_{j=1}^N \left\{ p_j - \frac{1}{N} \right\}^2. \quad (3.5)$$

El problema de esta definición es que se ignora el hecho de que se está trabajando con un espacio de distribuciones de probabilidad y por tanto no se tiene en consideración la naturaleza estocástica de la distribución  $P$ .

### 3.3.2. Distancia de Wootters

Dadas dos distribuciones de probabilidad  $P_i = \{p_j^{(i)}, j = 1, \dots, N\}$  con  $i = 1, 2$  la distancia estadística de Wootters está dada por [43]

$$D_W[P_1, P_2] = \cos^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^N (p_j^{(1)})^{\frac{1}{2}} (p_j^{(2)})^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.6)$$

### 3.3.3. Entropías relativas

Otro modo de construir distancias estadísticas es a través de funcionales de la entropía. Es posible definir dos clases: la primera trabaja con entropías relativas mientras que la segunda hace uso de diferencias entrópicas. Considere dos distribuciones discretas  $P_i = \{p_j^{(i)}, j = 1, \dots, N\}$  con  $i = 1, 2$ . La entropía relativa de  $P_1$  con respecto a  $P_2$  asociada con la medida de Shannon (ec. (3.1)) es la entropía de Kullback-Shannon, que en el caso discreto es

$$K^{(S)}[P_1|P_2] = \sum_{j=1}^N p_j^{(1)} \ln \frac{p_j^{(1)}}{p_j^{(2)}}. \quad (3.7)$$

En base a esta definición, la distancia entre una distribución de probabilidades  $P$  y la distribución uniforme  $P_e$  en términos de Kullback-Shannon es

$$D_{KS}[P, P_e] = K^{(S)}[P|P_e] = S_1^{(S)}[P_e] - S_1^{(S)}[P]. \quad (3.8)$$

La entropía relativa de  $P_1$  con respecto a  $P_2$  asociada a la entropía de Tsallis es llamada entropía relativa de Kullback-Tsallis, que para  $q \neq 1$  es

$$K_q^{(T)}[P_1|P_2] = \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^N (p_j^{(1)})^q \left\{ (p_j^{(2)})^{(1-q)} - (p_j^{(1)})^{(1-q)} \right\}. \quad (3.9)$$

La distancia de una distribución  $P$  a la distribución uniforme en términos de la entropía de Kullback-Tsallis es

$$D_{K_q^T}[P, P_e] = K_q^{(T)}[P|P_e] = N^{q-1} \left( S_q^{(T)}[P_e] - S_q^{(T)}[P] \right). \quad (3.10)$$

Por último, la entropía relativa asociada a la medida de Renyi es la entropía relativa de Renyi, que para  $q \neq 1$  es

Entropía relativa	Expresión	Nº de ecuación
Kullback-Shannon	$K^{(S)}[P P_e] = S_1^{(S)}[P_e] - S_1^{(S)}[P]$	(3.8)
Kullback-Tsallis	$K_q^{(T)}[P P_e] = N^{q-1} \left( S_q^{(T)}[P_e] - S_q^{(T)}[P] \right)$	(3.10)
Kullback-Renyi	$K_q^{(R)}[P P_e] = S_q^{(T)}[P_e] - S_q^{(T)}[P]$	(3.12)

Tabla 3.2: Entropías relativas usadas como distancia entre una distribución de probabilidades arbitraria y la distribución uniforme.

$$K_q^{(R)}[P_1|P_2] = \frac{1}{q-1} \ln \left\{ \sum_{j=1}^N \left( p_j^{(1)} \right)^q \left( p_j^{(2)} \right)^{1-q} \right\}. \quad (3.11)$$

Entonces, la distancia entre  $P$  y  $P_e$  en función de esta definición es

$$D_{K_q^{(R)}}[P, P_e] = K_q^{(R)}[P|P_e] = S_q^{(T)}[P_e] - S_q^{(T)}[P]. \quad (3.12)$$

En la tabla 3.2 se resumen las distintas entropías relativas utilizadas para establecer la distancia entre una distribución de probabilidades  $P$  y la distribución uniforme  $P_e$ .

### 3.3.4. Divergencias de Jensen

También es posible definir distancias estadísticas por medio de diferencias entrópicas. No obstante, dado que las simples diferencias entrópicas no son necesariamente positivas, no sirven como medida de ganancia de información. Por tanto son necesarios otros funcionales de la entropía. Los más utilizados son las llamadas divergencias de Jensen. Dado  $S$  una determinada entropía, y siendo  $P_1$  y  $P_2$  dos distribuciones de probabilidad, la divergencia de Jensen asociada se define como

$$J_S^\beta[P_1, P_2] = S[\beta P_1 + (1 - \beta)P_2] - \beta S[P_1] - (1 - \beta)S[P_2], \quad (3.13)$$

con  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Si  $S = S^{(S)}$  (entropía de Shannon)

$$J_{S^S}^\beta[P_1, P_2] = S^{(S)}[\beta P_1 + (1 - \beta)P_2] - \beta S^{(S)}[P_1] - (1 - \beta)S^{(S)}[P_2]. \quad (3.14)$$

En términos de entropías relativas esto puede escribirse como

$$J_{S^S}^\beta[P_1, P_2] = K^{(S)}[P_1|\beta P_1 + (1 - \beta)P_2] + (1 - \beta)K^{(S)}[P_2|\beta P_1 + (1 - \beta)P_2]. \quad (3.15)$$

Reemplazando en la ecuación (3.15) las entropías relativas de Shannon por las correspondientes a Tsallis y Renyi es posible encontrar las divergencias de Jensen asociados para estas medidas entrópicas. Las mismas son respectivamente

$$J_{S_q^T}^\beta[P_1, P_2] = \beta K_q^{(T)}[P_1|\beta P_1 + (1 - \beta)P_2] + (1 - \beta)K_q^{(T)}[P_2|\beta P_1 + (1 - \beta)P_2] \quad (3.16)$$

$$J_{S_q^R}^\beta[P_1, P_2] = \beta K_q^{(R)}[P_1|\beta P_1 + (1 - \beta)P_2] + (1 - \beta)K_q^{(R)}[P_2|\beta P_1 + (1 - \beta)P_2]. \quad (3.17)$$

### 3.4. Medidas de complejidad

Como se dijo en el inicio de este capítulo, una medida de complejidad estadística debe ser influenciada tanto por una medida de información como por la distancia de la distribución de probabilidades propia de un sistema en estudio a la distribución uniforme.

Definimos una cantidad de desorden para una dada distribución de probabilidad como

$$H[P] = \frac{S[P]}{S_{max}}, \quad (3.18)$$

donde  $S_{max} = S[P_e]$ , siendo  $P_e$  la distribución de probabilidad uniforme.

Definimos también el desequilibrio como

$$Q[P] = Q_0 D[P, P_e], \quad (3.19)$$

donde  $Q_0$  es una constante de normalización con la que  $0 \leq Q \leq 1$ , y  $D[P, P_e]$  es un funcional que da cuenta de la distancia de la distribución de probabilidad  $P$  a la distribución uniforme.

Vamos entonces a adoptar la siguiente forma funcional para una medida de complejidad estadística:

$$C[P] = Q[P]H[P]. \quad (3.20)$$

En el presente trabajo se utilizarán dos definiciones de complejidad estadística: una basada en la entropía de Shannon y otra basada en la entropía de Tsallis.

En el primer caso, como medida de información asociada a una distribución de probabilidad discreta utilizaremos la medida de Shannon (3.1) con  $k = 1$

$$S[P] = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i).$$

Por tanto,

$$S_{max} = \ln(N).$$

Como medida del desequilibrio tomaremos la divergencia de Jensen-Shannon.

Dado que lo que nos interesa es la distancia entre una distribución de probabilidades cualquiera y la distribución uniforme, utilizaremos  $P_1 = P$  y  $P_2 = P_e$ . Además los remitiremos al caso particular en que  $\beta = \frac{1}{2}$ , resultando

$$D[P, P_e] = J_{Ss}^{\frac{1}{2}}[P, P_e] = S^{(S)} \left[ \frac{P + P_e}{2} \right] - \frac{1}{2} S^{(S)}[P] - \frac{1}{2} S^{(S)}[P_e].$$

La constante de normalización correspondiente es

$$Q_0^{(J)} = -2 \left\{ \left( \frac{N+1}{N} \right) \ln(N+1) - 2 \ln(2N) + \ln N \right\}^{-1}.$$

Por tanto,

$$C_J^{(S)}[P] = Q_0^{(J)} J_{Ss}^{\frac{1}{2}}[P, P_e] \frac{S^{(S)}[P]}{S_{max}^{(S)}}. \quad (3.21)$$

Para la medida de complejidad basada en la entropía de Tsallis usaremos como desorden

$$H[P] = \frac{S_q^{(T)}[P]}{S_{max}^{(T)}}, \quad (3.22)$$

con  $S_q^{(T)}$  dada por (3.4) y

$$S_{max}^{(T)} = \frac{1 - N^{1-q}}{q - 1}.$$

En este caso, el desequilibrio viene dado por la divergencia de Jensen-Tsallis para  $P_1 = P$  y  $P_2 = P_e$ . Como en el caso anterior, utilizaremos  $\beta = \frac{1}{2}$ , resultando

$$J_{S_q^{(T)}}^{1/2}[P, P_e] = \frac{1}{2}K_q^{(T)} \left[ P \left| \frac{P + P_e}{2} \right. \right] + \frac{1}{2}K_q^{(T)} \left[ P_e \left| \frac{P + P_e}{2} \right. \right]. \quad (3.23)$$

La constante de normalización correspondiente es

$$Q_0^{(J_q^T)} = (1 - q) \left\{ 1 - \left[ \frac{(1 + N^q)(1 + N)^{(1-q)} + (N - 1)}{2^{2-q}N} \right] \right\}.$$

Entonces,

$$C_{J_q^T}^{(T)}[P] = Q_0^{(J_q^T)} J_{S_q^{(T)}}^{1/2}[P, P_e] \frac{S_q^{(T)}[P]}{S_{max}^{(T)}}. \quad (3.24)$$

### 3.5. Medida de información de Fisher

La medida de información de Fisher surge como una medida del error esperado en una medición [13]. Si  $P(x)$  denota una función de distribución de probabilidades continua, la medida de información de Fisher asociada es

$$F[P] = \int \frac{|\nabla P|}{P} dx. \quad (3.25)$$

Dado que la medida de Fisher involucra el gradiente de la distribución  $P$ , es sensible incluso en perturbaciones pequeñas, a diferencia de la entropía de Shannon.

Sea  $P = \{p_j\}_{j=1}^N$  un conjunto normalizado de probabilidades discretas. La aproximación discreta de la medida de Fisher  $F$  para este caso es

$$F[P] = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \left[ \frac{2(p_{j+1} - p_j)^2}{(p_{j+1} + p_j)} \right]. \quad (3.26)$$

El factor  $\frac{1}{4}$  es incorporado como constante de normalización [23].

El máximo valor que puede alcanzar  $F$  es la unidad y ocurre cuando casi todos los  $p_j$ -s son cero excepto por unos cuantos  $p_j$ -s finitos. Siempre que  $p_j = p_{j+1} = 0$  para algún  $j$ , el  $j$ -ésimo término de (3.26) será tomado como cero. Esto puede justificarse definiendo  $\Delta p_j = p_{j+1} - p_j$ . En ese caso,

$$\lim_{\Delta p_j \rightarrow 0} \left[ \frac{(\Delta p_j)^2}{p_j + \frac{\Delta p_j}{2}} \right] = 0.$$

## Capítulo 4

# Aplicación a sistemas con diversas transiciones al caos

Se analizó un conjunto de sistemas de ecuaciones que revisten distintas transiciones al caos a través de las medidas de complejidad estadística asociadas con la entropía de Shannon (3.21) y Tsallis (3.24) y la medida de información de Fisher (3.26). Las distintas transiciones estudiadas son la transición por doblamientos de período, y las intermitencias tipo I y II. En todos los casos, tanto las variables como los parámetros de los sistemas se analizaron de manera adimensional.

El trabajo con los sistemas de ecuaciones se llevó a cabo a través de su integración numérica. Para cada uno, se realizó un análisis exploratorio de las series temporales y los diagramas de bifurcación para determinar la duración de sus regímenes transitorios, la longitud apropiada de los pasos de integración, los distintos intervalos del parámetro de control asociados con diferentes dinámicas, la extensión de los atractores, entre otras características. Con esto, se seleccionó el rango de valores del parámetro de control de cada sistema y el número de unidades temporales a descartar para eliminar el transitorio de las series temporales, así como también la región del espacio fase dentro de la que se seleccionarían las condiciones iniciales.

Para cada sistema se obtuvo una distribución de probabilidades a través de un método de histogramas. A estas distribuciones se les aplicó la complejidad de Shannon y la medida de Fisher. Además, sobre un sistema se utilizó el método de Bandt y Pompe para obtener las distribuciones de probabilidad, que fueron analizadas a posteriori con las medidas de complejidad basadas en las entropías de Shannon y Tsallis.

Luego del análisis exploratorio de cada sistema se procedió del siguiente modo para cada valor del parámetro de control seleccionado dentro del rango de interés:

- Se realizó la integración numérica del sistema con condiciones iniciales aleatorias obteniéndose así series temporales. Se descartaron las primeras unidades temporales para eliminar los regímenes transitorios y se seleccionó una de las series temporales obtenidas para trabajar sobre ella.
- Se obtuvieron los mínimos de la serie temporal. Inicialmente se obtuvieron los mínimos locales de la serie temporal por comparación con sus vecinos próximos. Se seleccionaron los mínimos locales y sus dos vecinos próximos (uno previo y otro posterior). Con cada uno de estos conjuntos de datos se ajustó una parábola y se calculó el vértice de la misma tomando el valor de la ordenada del mismo como el mínimo local.
- Con esta serie de mínimos se obtuvieron las distribuciones de probabilidad con los métodos antes mencionados y se calcularon las medidas de complejidad correspondientes.

Para construir las distribuciones de probabilidad a partir de histogramas fue necesario en primera instancia seleccionar una región del espacio de mínimos dentro de la cual se encontrarán incluidos todos los atractores para el rango de valores del parámetro de control analizado. Se dividió esa región en mil canales, se contó cuántos mínimos se encontraban incluidos en cada canal. Se normalizó esta distribución dividiéndola por la suma de los mínimos, obteniéndose así la distribución de probabilidades.

El método de Bandt y Pompe fue aplicado seleccionando conjuntos de cinco elementos vecinos para cada uno de los elementos de las series de mínimos  $\{X_i, i = 1, \dots, N - 5 + 1\}$ . Cada elemento de los conjuntos fue numerado del uno al cinco, se los ordenó de forma decreciente, obteniendo así los eventos presentes en cada serie. Se contó qué cantidad de eventos tienen asociados cada una de las  $5! = 120$  permutaciones posibles.

Se realizaron gráficos de los diagramas de bifurcación de cada sistema y se los comparó con gráficos de las distintas medidas de complejidad en función del parámetro de control. Los diagramas de bifurcación se construyeron graficando, para cada valor del parámetro de control, los mínimos correspondientes. De este modo se obtienen gráficos de los mínimos de la serie en función del parámetro de control que nos brindan la posibilidad de conocer cómo varían las respuestas de los sistemas frente a la modificación de sus parámetros. En ellos, un rango del parámetro caracterizado por una dinámica periódica de período uno se ve representada por una línea continua. En una bifurcación de doblamiento de período de esta trayectoria se ve cómo la línea se divide en dos líneas continuas. Por otra parte, una dinámica caótica se distingue como una banda ancha que cubre buena parte de la extensión vertical del gráfico.

Se estudiaron también los espacios  $F - C$  para las transiciones, reconociendo en ellos las distintas regiones asociadas con dinámicas periódicas y caóticas de los sistemas.

A título ilustrativo se presentan en el apéndice G los códigos de programación usados para el estudio de un oscilador no lineal que experimenta una transición al caos por medio de una cascada de doblamientos de período (ver sección 4.1).

## 4.1. Escenario de doblamiento de período

### Oscilador no lineal

Se analizó el oscilador no lineal [44, 1]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon[2\mu\dot{x} + \delta x^2 + g \cos(\Omega t)x] + \epsilon^2 \alpha x^3 = 0. \quad (4.1)$$

Manteniendo fijos los parámetros  $\epsilon = 0,1$ ,  $\omega_0 = 0,1$ ,  $\delta = 5,0$ ,  $\alpha = 4,0$ ,  $\Omega = 2,0$  y  $\mu = 1$  usamos  $g$  como parámetro de control. Para  $g \in [4,2; 5,3]$  el sistema experimenta una serie de doblamientos de período que desemboca en una dinámica caótica [1].

Se integró el sistema en  $g \in [4,2; 5,3]$  con  $\Delta g = 0,002$ . Para cada  $g$  se integraron 7000 unidades temporales a pasos  $\delta t = 0,01$  y se descartaron las primeras 500. Las condiciones iniciales fueron seleccionadas en todos los casos de forma aleatoria en  $-10,5 \leq x_0 \leq -9,5$ ,  $9,5 \leq \dot{x}_0 \leq 10,5$ . Se trabajó con la serie temporal  $x$ .

Para construir el histograma se tomó la región del espacio de mínimos  $[x_{min}; x_{max}] = [-14,5; -13,5]$ . En la figura 4.1 se presentan espacios fase correspondientes a este sistema para los valores del parámetro de control  $g = 4,2$ ,  $g = 4,496$ ,  $g = 4,564$  y  $g = 5,3$ , en los que se ve, respectivamente, una dinámica de período uno, una de período dos, una de período cuatro y una dinámica caótica. Para las dinámicas correspondientes a  $g = 4,496$  y  $g = 4,564$ , se presenta también un detalle del espacio fase que permite diferenciar claramente los dos comportamientos del sistema.

El diagrama de bifurcación y las medidas  $C^{(S)}$  y  $F$  en función de  $g$  están en la figura 4.2. En ella se puede apreciar que, dentro de la región I, el sistema tiene una dinámica periódica de período

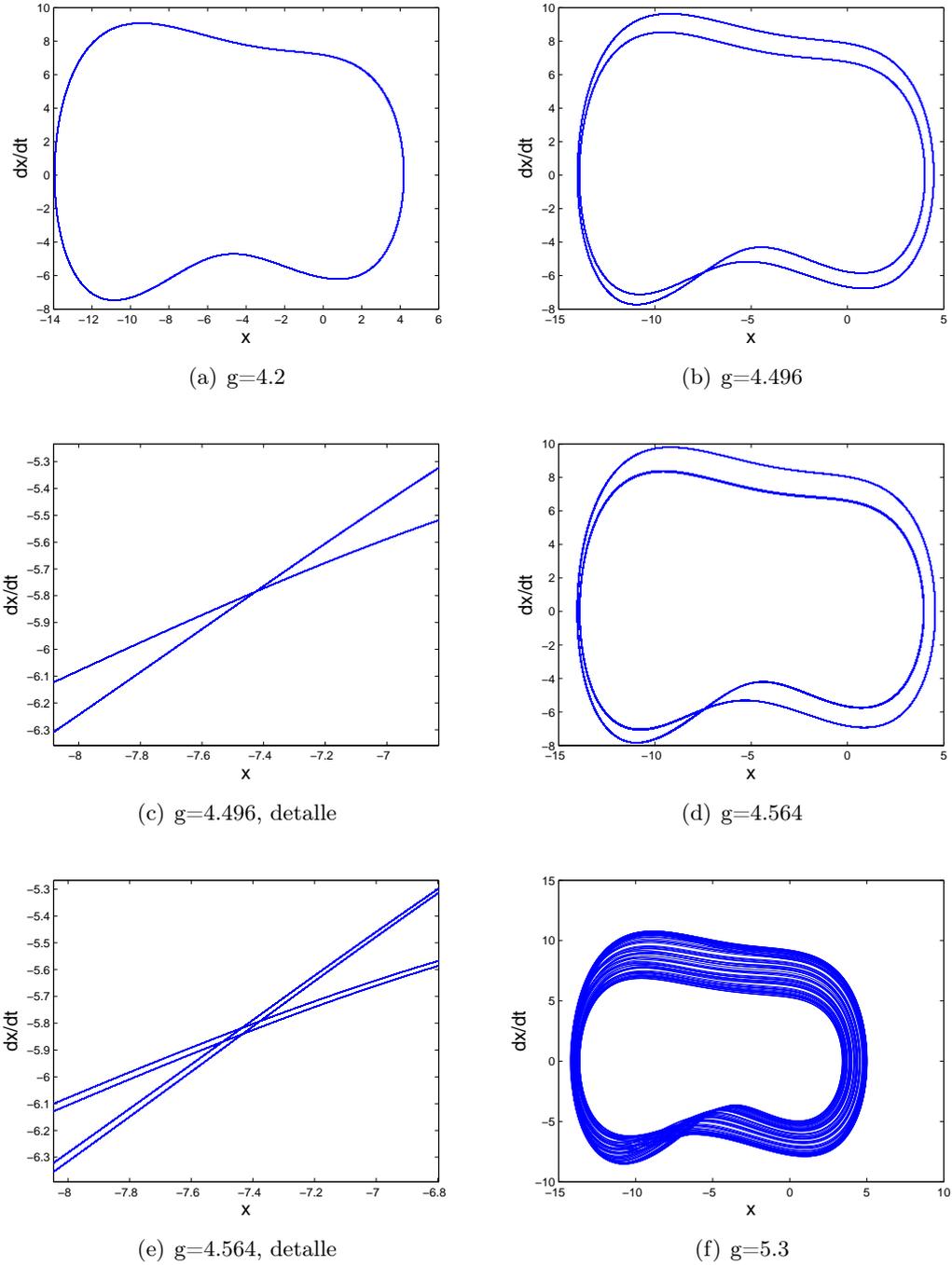


Figura 4.1: Espacios fase correspondientes al sistema (4.1) para distintos valores del parámetro de control.

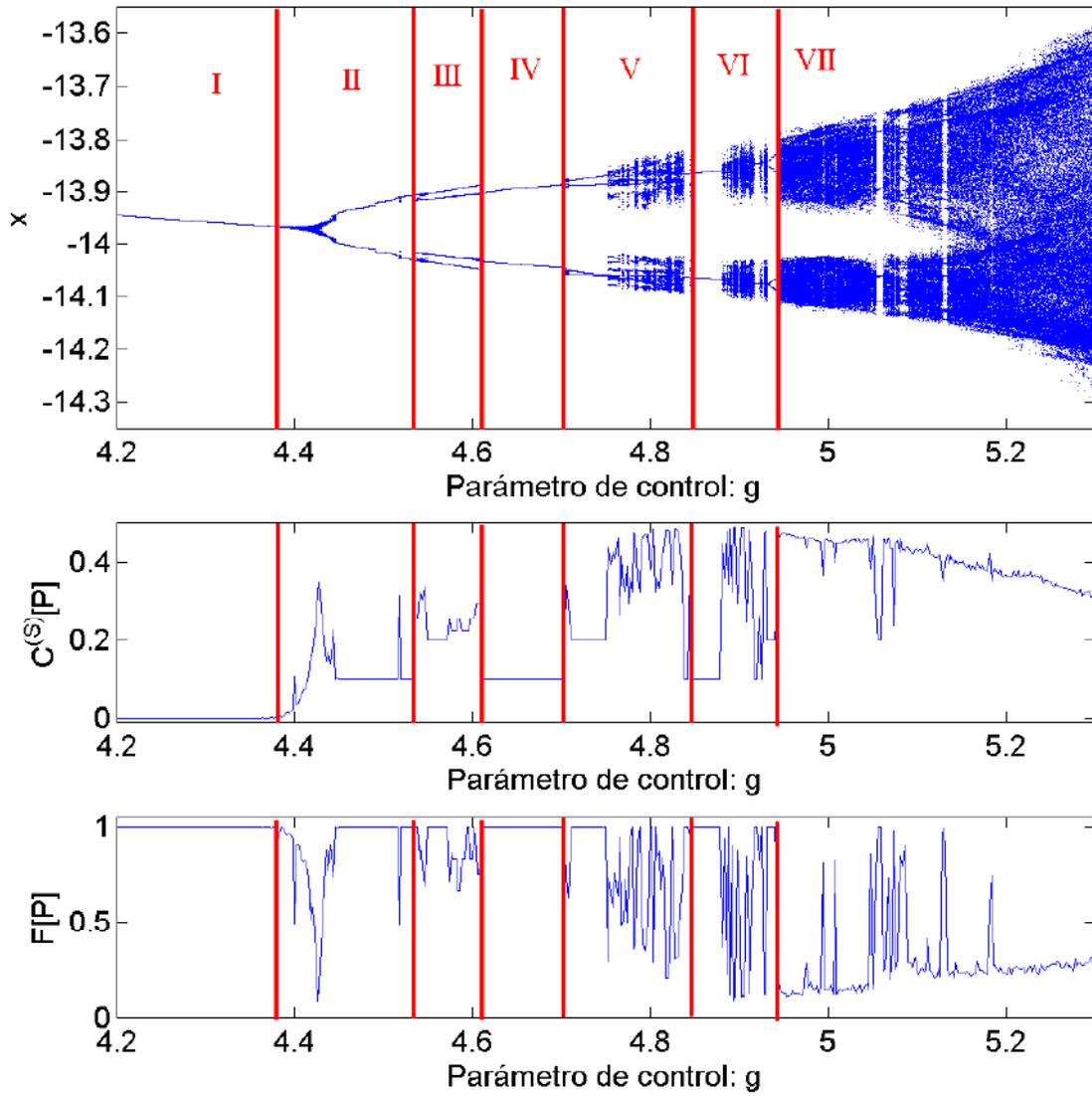


Figura 4.2: Diagramas de complejidad y Fisher en función del parámetro de control comparados con el diagrama de bifurcación del sistema (4.1).

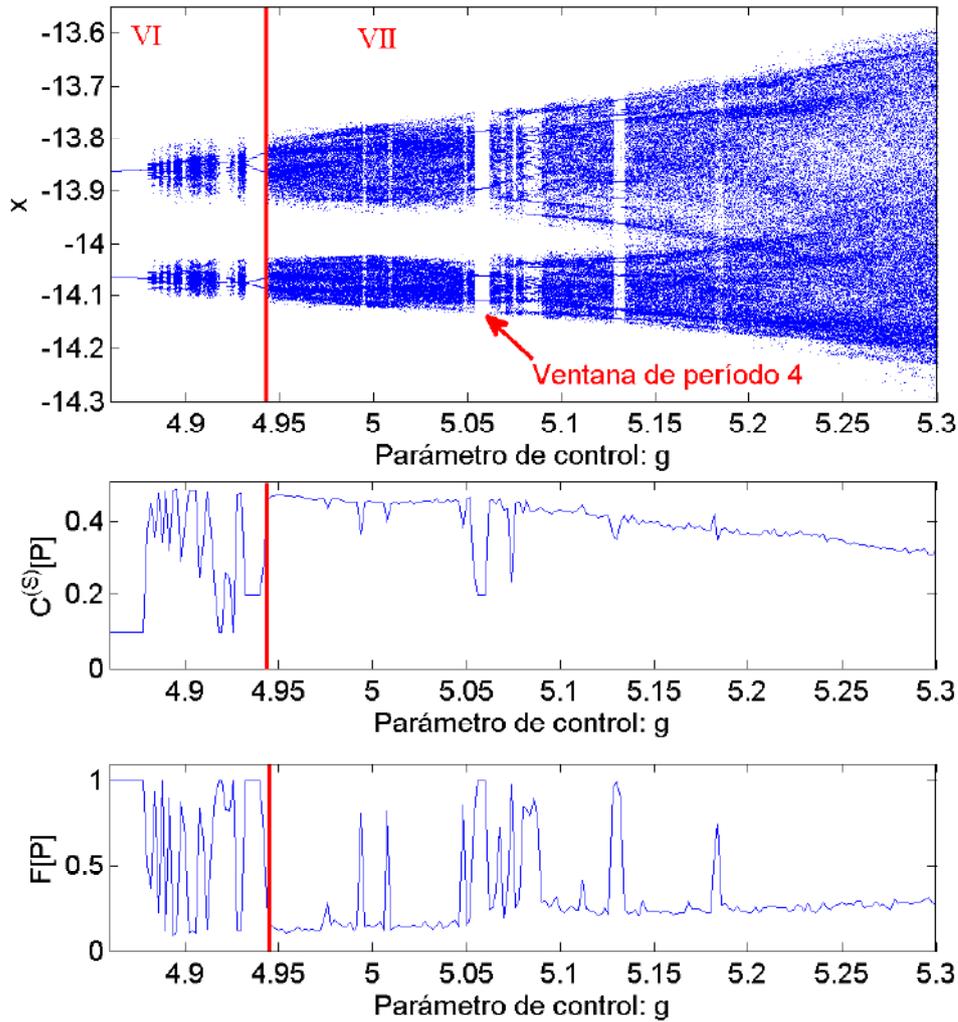


Figura 4.3: Detalles de los diagramas de complejidad y Fisher y del diagrama de bifurcación del sistema (4.1) en las regiones VI y VII.

uno. Aquí la complejidad adopta el valor cero y la medida de Fisher vale uno. En las regiones II y IV el sistema experimenta una periodicidad de período dos. En estas zonas  $C^{(S)} \simeq 0,1$  y  $F = 1$ . En la región III, se distingue un período cuatro, con  $C^{(S)} \simeq 0,2$  y  $F = 1$ . Si bien, teóricamente, los fenómenos de bifurcación de doblamiento de período ocurren en un punto, la solución es de lenta convergencia antes y después de la bifurcación, por lo tanto, al aproximarse el parámetro de control al punto de bifurcación, la solución tiene alguna inestabilidad que se expresa en un pequeño desplazamiento de los mínimos, la función de distribución de probabilidad se ensancha, la medida de Fisher toma valores menores que la unidad y la complejidad aumenta. Aumento de complejidad y disminución de la medida de Fisher son indicadores de que se aproxima una bifurcación de un atractor más simple a uno más complejo como se evidencia en el primer tramo de la zona II del diagrama de bifurcación que se presenta en la figura 4.2 donde se produce una transición de una dinámica periódica de período uno a otra de período dos. En la zona VII, la dinámica es claramente aperiódica. Los valores típicos de  $C^{(S)}$  y  $F$  para esta región son, respectivamente, de 0,44 y 0,15.

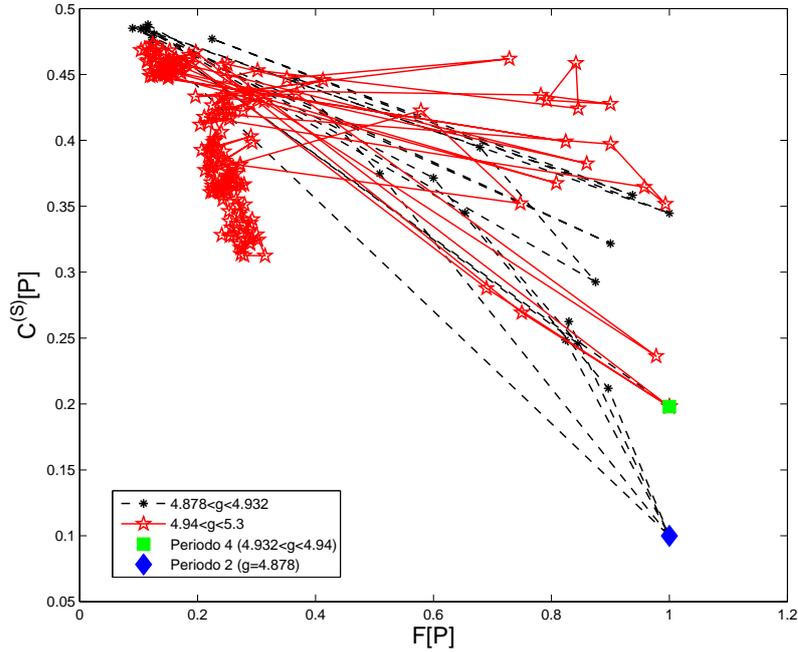


Figura 4.4: Plano  $F - C$  para el sistema (4.1).

En las regiones V y VI, el sistema experimenta una sucesión de doblamientos de período que dan lugar a dinámicas aperiódicas, y luego evolucionan nuevamente a nuevos regímenes periódicos. Vemos cómo, en estas regiones, la complejidad estadística va aumentando su valor a medida que se tiende a una dinámica caótica y luego esta cantidad se reduce nuevamente al volver a una dinámica periódica. Del mismo modo, la información de Fisher adopta un valor igual a la unidad en los momentos de periodicidad y simultáneamente con la complejización de la dinámica del sistema, va adquiriendo valores cada vez más bajos hasta llegar a medidas típicas del comportamiento caótico. Luego de esto y, de forma coincidente con el retorno a una dinámica periódica, Fisher adopta nuevamente el valor uno. En la figura 4.3 se presenta en detalle las regiones VI y VII. Nótese cómo ambas medidas distinguen claramente la presencia de ventanas periódicas que afloran en la región de dinámica caótica.

En la figura 4.4 se presenta un gráfico de  $C^{(S)}$  versus  $F$  para el sistema (4.1) en el rango del parámetro de control  $4,878 \leq g \leq 5,3$ . Puede notarse en el diagrama  $F - C$ , dos puntos asociados a dinámicas periódicas de períodos dos y cuatro, respectivamente, que se encuentran ubicados sobre una línea en la que  $F = 1$ .

Comenzamos a recorrer el gráfico desde la región de período dos, ubicada en la esquina inferior derecha del mismo. En  $4,878 \lesssim g \lesssim 4,918$  se da una sucesión de dinámicas periódicas separadas por inestabilidades. Durante las inestabilidades la línea en el espacio  $F - C$  explora la región central del gráfico, orientándose hacia la esquina superior izquierda del mismo. Esta secuencia culmina con un comportamiento aperiódico.

Luego de la dinámica caótica nos encontramos de nuevo en presencia de un período dos ( $4,918 \lesssim g \lesssim 4,92$ ), por lo que la línea que estamos siguiendo vuelve a visitar el punto inicial.

Se producen más tarde dos dinámicas caóticas, correspondientes a  $4,92 \lesssim g \lesssim 4,926$  y  $4,926 \lesssim g \lesssim 4,932$ , separadas por una región de período dos ( $g \simeq 4,926$ ). Durante los regímenes caóticos, la línea en el espacio  $F - C$  se ubica en la esquina superior izquierda del mismo. En la dinámica periódica la línea vuelve nuevamente al punto de inicio.

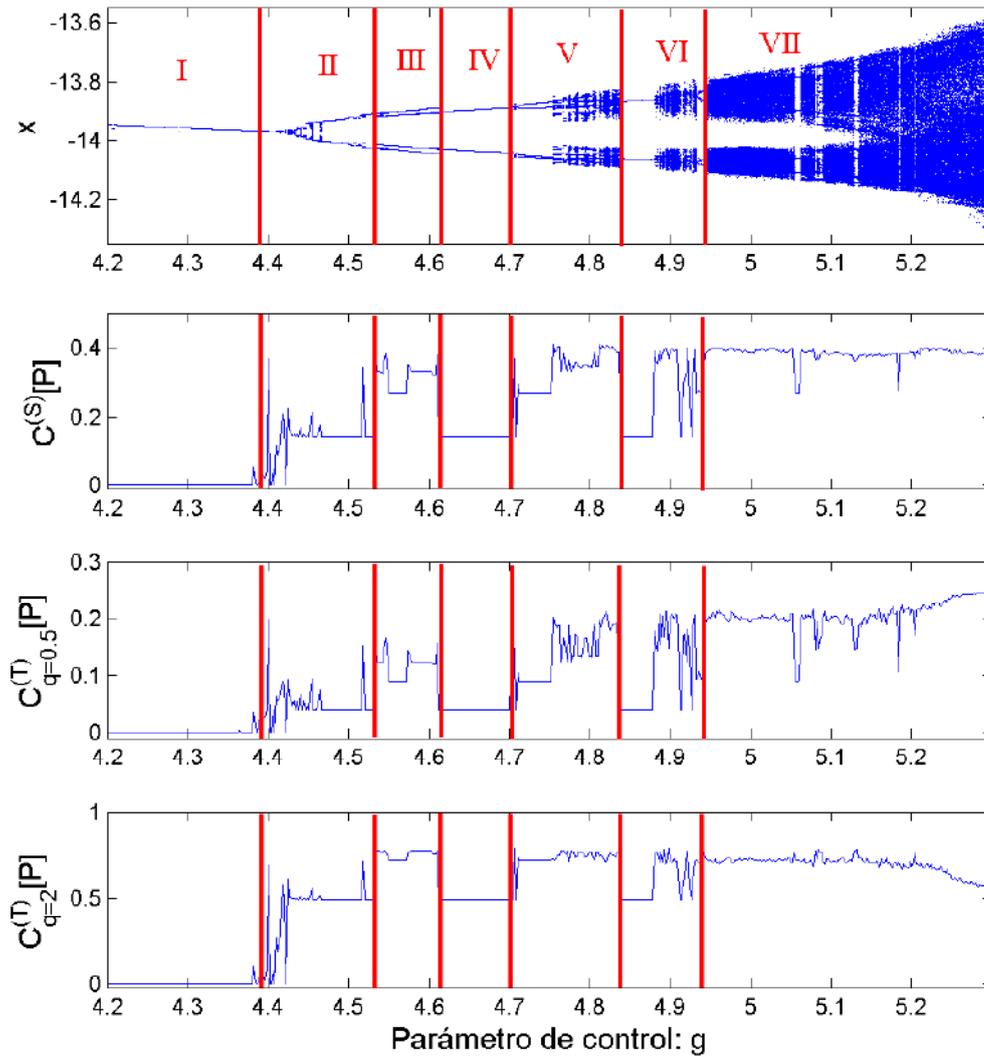


Figura 4.5: Diagramas de  $C^{(S)}$ ,  $C_{q=0,5}^{(T)}$  y  $C_{q=2}^{(T)}$  en función del parámetro de control comparados con el diagrama de bifurcación del sistema (4.1).

Después de la última dinámica caótica se vislumbra una nueva dinámica periódica, en este caso, de período cuatro, que corresponde a  $4,932 \lesssim g \lesssim 4,94$ . Aquí, en la línea alcanza un punto correspondiente a la abscisa  $F = 1$  y cuya ordenada es  $C^{(S)} \simeq 0,198$ .

Por último, en este gráfico se ha representado la dinámica caótica correspondiente al rango  $4,94 \lesssim g < 5,3$ . Se ve cómo los puntos correspondientes a estos valores del parámetro de control se ubican nuevamente próximos a la esquina superior izquierda del gráfico, región típicamente correspondiente a dinámicas caóticas. Dentro de esta región, y en coincidencia con los valores del parámetro de control que tienen asociados ventanas periódicas puede verse cómo los puntos en el gráfico  $F - C$  incursionan a regiones próximas a la línea  $F = 1$ . Particularmente se distingue con claridad que para los parámetros de control asociados a una ventana periódica de período cuatro, los puntos de la línea se ubican sobre el punto del período cuatro antes ubicado.

A las series de mínimos obtenidas para este sistema se le aplicó también el método de Bandt y Pompe. Las distribuciones de probabilidad resultantes fueron analizadas con las medidas  $C^{(S)}$  y  $C^{(T)}$ . La figura 4.5 muestra el diagrama de bifurcación del sistema comparado con los gráficos  $C^{(S)}$ ,  $C_{q=0,5}^{(T)}$  y  $C_{q=2}^{(T)}$  en función del parámetro de control. Se ve claramente que el comportamiento de las medidas  $C_{q=0,5}^{(T)}$  y  $C_{q=2}^{(T)}$  es cualitativamente igual al de  $C^{(S)}$ . Las tres medidas valen cero en la región de periodicidad uno (región I). En las zonas en las que el sistema posee una dinámica periódica de período dos  $C_{q=0,5}^{(T)}$  adquiere un valor menor que  $C^{(S)}$ , ( $C_{q=0,5}^{(T)} \approx 0,04$ ) mientras que  $C_{q=2}^{(T)}$  es cuantitativamente mayor ( $C_{q=2}^{(T)} \approx 0,5$ ). Una situación análoga ocurre en las regiones de periodicidad cuatro ( $C_{q=0,5}^{(T)} \approx 0,09$  y  $C_{q=2}^{(T)} \approx 0,7$ ) y en las otras regiones periódicas. En las regiones de dinámicas caóticas se observa el mismo comportamiento, con valores típicos de  $0,2 \lesssim C_{q=0,5}^{(T)} \lesssim 0,25$  y  $0,57 \lesssim C_{q=2}^{(T)} \lesssim 0,72$  respectivamente.

Las medidas de complejidad basados en entropía de Tsallis parecen ser más sensibles al aumento de la región ocupada por una dinámica caótica que  $C^{(S)}$ . Esto se ve en el último tramo de la zona VII, donde los dos atractores caóticos se fusionan en uno que ocupan una región mayor que la que ocupaban por separado. Frente a esa circunstancia  $C_{q=0,5}^{(T)}$  muestra un pequeño incremento de su valor, mientras que  $C_{q=2}^{(T)}$  sufre una reducción del mismo.

## **Rosler**

El sistema tridimensional de Rosler es [45, 1]:

$$\dot{x} = -(y + z) \quad (4.2)$$

$$\dot{y} = x + ay \quad (4.3)$$

$$\dot{z} = b + (x - c)z. \quad (4.4)$$

Se mantuvieron fijos los parámetros  $b = 2$  y  $c = 4$ . Variando  $a$  en el intervalo  $0,32 < a < 0,555$  el sistema experimenta una serie de bifurcaciones de doblamiento de período, culminando en una dinámica aperiódica como puede verse en la figura 4.6.

Para construir el diagrama de bifurcación, integramos el sistema variando el parámetro de control  $a$  a lo largo del intervalo indicado, con incrementos  $\Delta a = 0,000128$ . La integración se hizo partiendo de condiciones iniciales aleatorias, durante 10000 unidades temporales en pasos  $\delta t = 0,01$ . Se descartaron luego los valores correspondientes a las primeras 3000 unidades temporales a fin de eliminar transitorios. A continuación se construyó la serie temporal con los mínimos locales para la variable  $z$ , y se seleccionó el intervalo  $[z_{\min}, z_{\max}] = [0,2; 4]$  del espacio de mínimos, que fue dividido en mil celdas sobre las cuales se construyó el histograma de frecuencias normalizado.