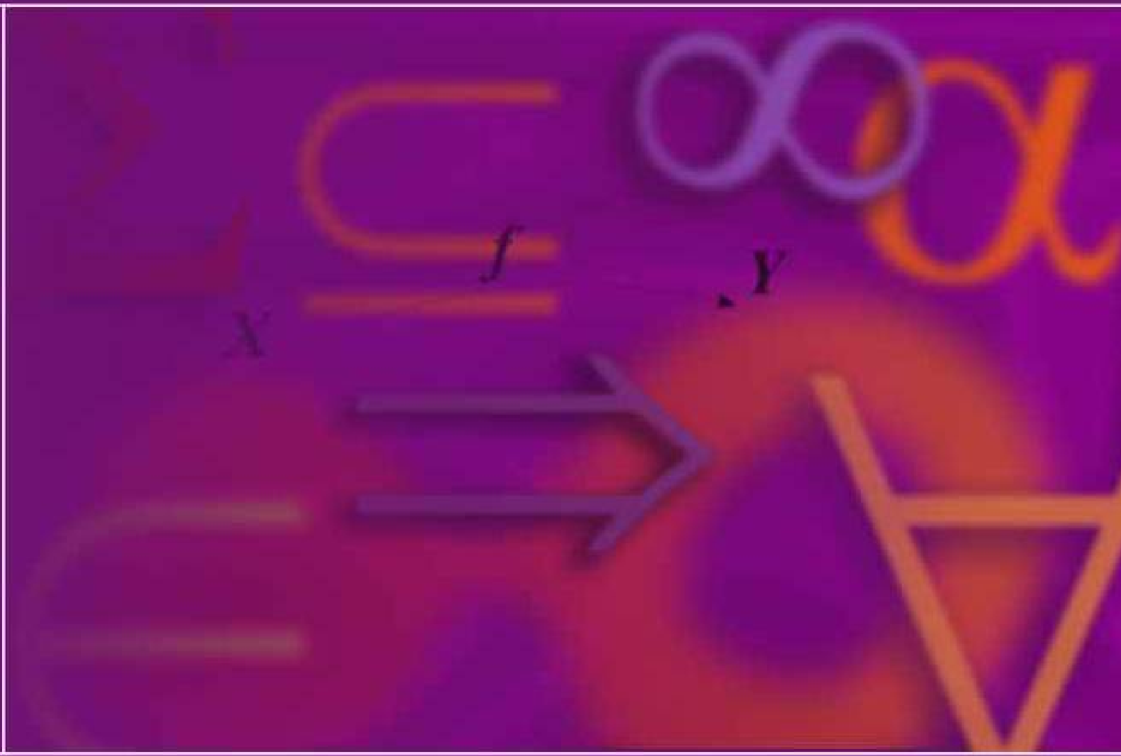
LIBRO DE TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Nociones previas a la Topología Métrica



María Eva ASCHERI
Marisa Elisabet REID

Universidad Nacional de La Pampa

2008

[2008] LIBRO DE TEXTO PARA **ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

Nociones Previas a la Topología Métrica

María Eva ASCHERI
Marisa Elisabet REID

LIBRO DE TEXTO PARA **ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

Nociones Previas a la Topología Métrica
María Eva Ascheri · Marisa Elisabet Reid.

Noviembre de 2008, Santa Rosa, La Pampa

Coordinación de Diseño y Diagramación: Gabriela HERNÁNDEZ (DCV-EdUNLPam).

Cumplido con lo que marca la ley 11.723
EdUNLPam - Año 2008
Cnel. Gil 353 PB - CP L6300DUG
SANTA ROSA - La Pampa - Argentina

Índice

P

Prólogo

La Topología trabaja con conceptos más generales que el Análisis. Por consiguiente, con la Topología podemos estudiar problemas que el Análisis no puede resolver. La Topología, que es un poderoso instrumento para el Análisis Funcional y para varias ramas del Análisis Clásico, que a su vez está conectado, por sus aplicaciones, con la Matemática Aplicada e Informática y con las Ciencias Naturales, hace uso de los métodos del Álgebra y de la Teoría de Conjuntos, y del Análisis Real.

El propósito de este texto es ofrecer una presentación fácilmente accesible de los conceptos fundamentales de la Teoría de Conjuntos y del Análisis Real, que cualquier estudiante que esté en condiciones de cursar la asignatura "Topología / Topología I" (Topología Métrica) debería recordar o entender fácilmente, sin que pierda su interés haciéndole repetir el estudio de conocimientos demasiado familiares.

El plan, esencialmente didáctico, de los distintos temas que se analizan, está trazado con vistas a dar una base sencilla pero suficientemente rigurosa para estudios posteriores inmediatos de Topología y de Análisis avanzado. Por lo tanto, no se pretende desarrollar una introducción general a la topología completa y acabada, sino por el contrario, hacer un repaso o una introducción (en los casos que fuese necesario) de aquellos conceptos, propiedades, teoremas, corolarios, entre otros, del Álgebra básico y del Cálculo elemental, cuya utilidad posterior es inmediata. También, se pretende introducir al alumno en el lenguaje, conceptos fundamentales y teoremas clásicos del Análisis y del Álgebra, de modo que esté capacitado para leer literatura matemática (en especial, referida a la Topología Métrica), comprendiéndola y gozando con su lectura. Para tal fin, se han incluido enunciados claros de las definiciones, principios y teoremas pertinentes, numerosos ejemplos y una serie de ejercicios propuestos. Los ejemplos que se presentan tienen como finalidad ilustrar y ampliar la teoría. Los ejercicios propuestos servirán de profundización y revisión de los contenidos temáticos que aquí se presentan.

Cabe señalar que, en los textos citados en la bibliografía se pueden encontrar los fundamentos matemáticos necesarios para orientar al lector interesado en profundizar los contenidos temáticos que aquí se abordan.

1

Capítulo I

Elementos de la teoría de conjuntos.

1

1.1. Conjuntos.

Definiciones

Un *conjunto* es una colección de objetos. Los objetos de la colección son los *elementos* del conjunto. Los conjuntos se indican con letras mayúsculas y son susceptibles de tener propiedades o relaciones entre ellos. Los elementos se indican con letras minúsculas.

La relación $x = y$ significa que los objetos indicados por los símbolos x e y son un mismo elemento; su negación se escribe $x \neq y$.

Si X es un conjunto, la relación $x \in X$ significa que *x es un elemento del conjunto X* o que *pertenece a X*; la negación de esta relación se escribe $x \notin X$.

Si *X* e *Y* son conjuntos, la relación $X \subseteq Y$ significa que cada elemento de *X* es un elemento de *Y*. En este caso, se dice que *X está contenido en Y* o que *X está incluido en Y* o que *X es un subconjunto de Y* o que *X es una parte de Y* o que *Y contiene a X*. También se puede escribir $Y \supseteq X$.

Si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$ es $X = Y$, es decir, dos conjuntos son *iguales* si y sólo si poseen los mismos elementos.

Si *X* e *Y* *no son iguales*, se escribe $X \neq Y$.

Si $X \subseteq Y$ y $X \neq Y$ se dice que *X es un subconjunto propio de Y* o que *X está contenido estrictamente en Y*, y se indica $X \subset Y$.

En todas las aplicaciones se fijará de antemano un cierto conjunto U, y sólo interesarán subconjuntos de éste. El conjunto fundamental U puede variar de una aplicación a otra; y se considerará como el *conjunto universal* de cada teoría particular. La notación

$$\{x \in U : x \text{ satisface } P\}$$

designará el conjunto de todos los elementos de U que satisfacen la propiedad *P*.

Puede ocurrir que un conjunto no contenga elementos. Un tal conjunto se llama *conjunto vacío*, y se representa mediante el símbolo $\varnothing$.

Para evitar confusiones, debe distinguirse entre el elemento *x* y el conjunto $\{x\}$ cuyo único elemento es *x*. En particular, el conjunto vacío $\varnothing$ no es el mismo que el conjunto $\{\varnothing\}$. En realidad, el conjunto vacío $\varnothing$ no contiene elementos, mientras que el conjunto $\{\varnothing\}$ contiene un elemento, $\varnothing$. Los conjuntos que contienen un solo elemento se llaman *conjuntos unitarios.*

1.2. Álgebra de conjuntos.

Definiciones y propiedades

1.2.1. Sea U el conjunto universal y sean $X, Y \subseteq U$.

La *unión* de dos conjuntos *X* e *Y*, que se denota $X \cup Y$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a X o a *Y*, es decir

$$X \cup Y = \{x \in U : \ x \in X \quad \text{o} \quad x \in Y\}$$

La *intersección* de dos conjuntos *X* e *Y*, que se denota $X \cap Y$, es el conjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a X y a *Y*, es decir

$$X \cap Y = \{x \in U : \ x \in X \quad \text{y} \quad x \in Y\}$$

Si $X \cap Y = \varnothing$, es decir si X e Y no tienen elementos comunes, se dice que X e Y son *disjuntos*.

Cualesquiera sean los subconjuntos X, Y, Z, W de *U*, de las dos definiciones anteriores, se deducen las siguientes propiedades (quedan como ejercicio a cargo del lector):

a) *Propiedades conmutativas*:

$$X \cap Y = Y \cap X \ ; \quad X \cup Y = Y \cup X$$

b) *Propiedades asociativas:*

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

c) *Propiedades idempotentes*:

$$X \cup X = X \;;\; X \cap X = X$$

d) *Propiedades distributivas*:

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

Otras propiedades importantes son (quedan como ejercicio a cargo del lector):

e) $X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y$

f) Si $X \subseteq Z$ y $Y \subseteq W$ entonces

$$X \cup Y \subseteq Z \cup W \quad \text{y} \quad X \cap Y \subseteq Z \cap W$$

1.2.2. Sean $X, Y \subseteq U$. La *diferencia* entre los conjuntos *X* e *Y*, que se denota $X - Y$, es el conjunto de los elementos que pertenecen a X pero no pertenecen a *Y*, es decir

$$X - Y = \{x \in U : \; x \in X \quad \text{y} \quad x \notin Y\}$$

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la definición (quedan como ejercicio a cargo del lector):

$$X - X = \varnothing \quad ; \quad X - \varnothing = X$$

1.2.3. Sean $X, Y \subseteq U$ tales que $Y \subseteq X$. El *complemento de Y con respecto a X*, que se denota $C_X Y$, es el conjunto de los elementos que pertenecen a *X* pero no pertenecen a *Y*, esto es

$$C_X Y = X - Y$$

Si X es el conjunto universal U, en este caso, la diferencia $U - Y$ se llama simplemente el *complemento de* Y y se indica con la notación:

$$\complement_U Y = \complement Y = Y'$$

De 1.2.2 y 1.2.3 surge que

$$\begin{aligned} X - Y &= \{x \in U : \; x \in X \;\text{ y }\; x \notin Y\} \\ &= \{x \in U : \; x \in X \;\text{ y }\; x \in Y'\} = X \cap Y' \end{aligned}$$

Sean $X, Y \subseteq U$. Las siguientes propiedades son inmediatas de las definiciones (quedan como ejercicio a cargo del lector):

a) $X \cup X' = U$; $\quad X \cap X' = \varnothing$

b) $\varnothing' = U$; $\quad U' = \varnothing$

c) $(X')' = X$

d) $X \subseteq Y$ implica $Y' \subseteq X'$

$$\left.\begin{array}{l} \text{e) } (X \cup Y)' = X' \cap Y' \\ \text{f) } (X \cap Y)' = X' \cup Y' \end{array}\right\} \text{Leyes de De Morgan}$$

1.3. Producto de dos conjuntos.

A cada dos elementos x e y les corresponde un nuevo elemento, su *par ordenado* (x, y). La relación $(x, y) = (x', y')$ es equivalente a "$x = x'$ e $y = y'$"; en particular, $(x, y) = (y, x)$ si y sólo si $x = y$. El primer (segundo) elemento de un par ordenado $z = (x, y)$ se denomina *primera* (respectivamente, *segunda*) *proyección de z*, y se escribe $x = pr_1 z$ (respectivamente, $y = pr_2 z$).

Definición. Dados dos conjuntos X, Y (distintos o no) existe un conjunto (único) cuyos elementos son todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \in X$ e $y \in Y$; se escribe $X \times Y$ y se denomina *producto cartesiano* (o simplemente *producto*) *de* X e Y; esto es

$$X \times Y = \{(x, y) : \ x \in X \quad \text{y} \quad y \in Y\}$$

Sean $X, Y, Z, W \subseteq U$. Las siguientes propiedades son inmediatas de las definiciones (quedan como ejercicio a cargo del lector):

a) $X \times Y = \varnothing$ si y sólo si $X = \varnothing$ o $Y = \varnothing$

b) Si $X \times Y \neq \varnothing$ (lo que significa que ambos, X e Y son no vacíos), la relación $X \times Y \subseteq W \times Z$ es equivalente a $X \subseteq W$ y $Y \subseteq Z$

c) $(X \times Y) \cup (Z \times Y) = (X \cup Z) \times Y$

d) $(X \times Y) \cap (W \times Z) = (X \cap W) \times (Y \cap Z)$

Observación

Por inducción sobre n se pueden definir la unión, intersección y producto de más de dos conjuntos valiendo todas las propiedades anteriores para un número finito de conjuntos. En consecuencia, se define

Unión de n conjuntos: $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$

Intersección de n conjuntos: $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$

Producto de n conjuntos: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

1.4. Familia de conjuntos.

Definiciones y propiedades

1.4.1. Sea A un conjunto de índices no vacío y supongamos que para cada $\alpha \in A$ existe A_α. Entonces,

$$\{A_\alpha : \alpha \in A\} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

es una *familia de conjuntos*.

Que los subíndices sean distintos no implica necesariamente que los conjuntos sean distintos.

1.4.2. Sea U un conjunto dado y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de subconjuntos de U. La *unión de todos los conjuntos* A_α se define como el conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen, por lo menos, a uno de los conjuntos A_α, y se representa con el símbolo $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$; esto es

$$\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha = \{x \in U : \text{existe } \alpha \in A \text{ tal que } x \in A_\alpha\} = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$$

Análogamente, la *intersección de todos los conjuntos* A_α se define como el conjunto de aquellos elementos que pertenecen a cada conjunto A_α, y se representa con el símbolo $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha$; esto es

$$\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha = \{x \in U : \text{para todo } \alpha \in A,\ x \in A_\alpha\} = \bigcap_{\alpha} A_\alpha$$

Las propiedades siguientes se comprueban fácilmente (quedan como ejercicio a cargo del lector):

a) $\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right)' = \bigcap_{\alpha \in A} A'_\alpha$; $\left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha\right)' = \bigcup_{\alpha \in A} A'_\alpha$

b) $\left(\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha\right)\cap\left(\bigcup_{\beta\in B} B_\beta\right) = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in A\times B}\left(A_\alpha\cap B_\beta\right)$

c) $\left(\bigcap_{\alpha\in A} A_\alpha\right)\cup\left(\bigcap_{\beta\in B} B_\beta\right) = \bigcap_{(\alpha,\beta)\in A\times B}\left(A_\alpha\cup B_\beta\right)$

1.5. Conjunto de partes de un conjunto dado.

Definición. Sea A un conjunto cualquiera. Se define el *conjunto de partes de A*, y se denota $P(A)$, como el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.

Observaciones

1. Para cualquier conjunto A, se verifica que $\varnothing\in P(A)$ y $A\in P(A)$

2. $B\subseteq A$ es equivalente a $B\in P(A)$

3. $x\in A$ es equivalente a $\{x\}\in P(A)$

Las propiedades siguientes se comprueban fácilmente (se dejan como ejercicio al lector):

a) $\bigcap_\alpha P(A_\alpha) = P\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)$

b) $\bigcup_\alpha P(A_\alpha) \subseteq P\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)$

1.6. Funciones o aplicaciones.

1.6.1. Una función o aplicación $f: A\to B$ consta de tres partes: un conjunto A llamado el *dominio* de la función f (o conjunto donde la función f está definida), una regla que permite asociar a cada elemento $x \in A$ un único elemento $f(x) \in B$ llamado *valor que la función f asume en* x (o también *imagen de x por f*) y otro conjunto formado por los elementos de B asociados con los elementos de A llamado el *codominio* de la función f (o conjunto donde la función f toma *valores* o el *recorrido* de la función f). Éste puede ser todo el conjunto *B*, pero no es necesario.

Se usa la notación $x \to f(x)$ para indicar que f hace corresponder a x el valor $f(x)$.

No se debe confundir f con $f(x)$: f es una función, en cuanto que $f(x)$ es el valor que una función asume en un punto x de su dominio.

Las funciones en las que el dominio y el codominio son conjuntos de números reales, se pueden representar geométricamente mediante una gráfica en el plano *xy*. Se representa el dominio de la función *f* en el eje *x*, y a partir de cada punto *x* se representa el punto (*x*, *y*) donde $y = f(x)$. La totalidad de puntos (*x*, *y*) se denomina la *gráfica* de la función *f*.

La descripción anterior de función o aplicación que se hizo utilizando palabras como "regla" y "asociar a" puede que no tengan la misma significación para todo el mundo. De manera que se reformula el concepto por un camino diferente.

Definición. Una *función* *f* es un conjunto de pares ordenados (*x*, *y*) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.

Si *f* es una función, el conjunto de todos los elementos *x* que aparecen como primeros elementos de pares (*x*, *y*) de *f* se llama el *dominio* de la función *f* (o conjunto donde la función *f* está definida). El conjunto de los segundos elementos *y* se denomina *codominio* de la función *f* (o conjunto donde la función *f* toma *valores* o *recorrido* de la función *f*).

Ejemplos

1) Sea $f : A \to B$ tal que para algún $a \in B$, $f(x) = a$ para todo $x \in A$. Tal función es llamada la *función constante.*

2) La aplicación $x \to x$ de A sobre sí mismo es llamada la *función idéntica* de A y se indica $id_A : A \to A$ o id_A.

3) Sean A y B dos conjuntos y sea $p_1 : A \times B \to A$ tal que $p_1(x, y) = x$ para todo $(x, y) \in A \times B$. Tal función se denomina *función proyección sobre la primera coordenada*. Análogamente, la función $p_2 : A \times B \to B$ tal que $p_2(x, y) = y$ para todo $(x, y) \in A \times B$, se llama *función proyección sobre la segunda coordenada.*

Teorema 1. Dos funciones f y g son iguales, y se expresa $f = g$, si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) f y g tienen el mismo dominio, y
b) $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de *f*.

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector.

Definición. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones tales que el dominio de g es igual al codominio de *f*. En este caso, podemos definir la *función compuesta* $g \circ f : A \to C$ que consiste en aplicar primero f y después g. Más precisamente, (figura 1)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ para todo } x \in A.$$

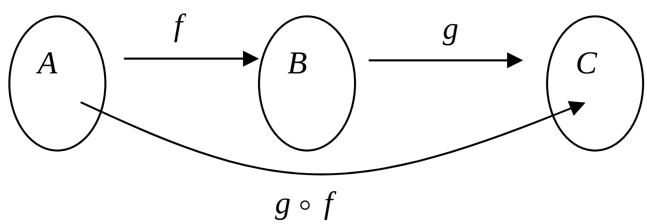


Figura 1

Observación

Nótese que, basta que la imagen $f(A)$ de la función f esté contenida en el dominio de g para que la definición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ tenga sentido y se pueda definir la función compuesta $g \circ f : A \to C$.

Teorema 2. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ funciones. Entonces, se verifica la ley asociativa

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \ : A \to D .$$

Demostración. Para todo $x \in A$, se tiene

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h[g(f(x))] = h[(g \circ f)(x)] =$$
$$= [h \circ (g \circ f)](x) .$$

Definición. La *restricción* de una función $f : A \to B$ a un subconjunto $X \subseteq A$ es una función $f/X : X \to B$, definida por $(f/X)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Si se considera la función inclusión $i : X \to A$, entonces la restricción de la función *f* al subconjunto *X* es la función compuesta $f \circ i$, es decir, $f/X = f \circ i : X \to B$.

Dado $X \subseteq A$, si $g : X \to B$ es la restricción de una función $f : A \to B$ al conjunto *X*, se dice también que *f* es una *extensión* de *g*. Extender una función $g : X \to B$ al conjunto $A \supseteq X$ es, por tanto, obtener una función $f : A \to B$ que coincida con *g* en *X*; esto es, $f/X = g$. Evidentemente hay, en general, diversas extensiones de la misma función *g*.

1.6.2. Funciones biyectivas.

Definición. Una función $f : A \to B$ se llama *inyectiva* (ó *uno a uno*) cuando, dados *x*, *y* cualesquiera en *A*, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. En otras palabras, cuando

$$x \neq y \ \text{ en } \ A \ \text{ implica } \ f(x) \neq f(y) \ \text{ en } \ B .$$

El ejemplo más simple de una función inyectiva es la inclusión $i : A \to B$, definida cuando *A* es un subconjunto de *B*, por la regla $i(x) = x$ para todo $x \in A$.

Definición. Una función $f : A \to B$ se llama *suryectiva* (ó *sobreyectiva* ó *sobre*) cuando, para todo $y \in B$ existe por lo menos un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplos de funciones *suryectivas* son las proyecciones p_1 y p_2.

Definición. Una función $f : A \to B$ se llama *biyectiva* (ó una *biyección* o una *correspondencia biunívoca*) cuando es inyectiva y sobre al mismo tiempo.

La más simple de las biyecciones es la función idéntica.

Ejemplos

1) La aplicación $(x, y) \to (y, x)$ de $A \times B$ en $B \times A$ es biyectiva.

2) Dados arbitrariamente $a, b \in \mathbf{Q}$, con $a \neq 0$, la función $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ definida por $f(x) = ax + b$ es una biyección.

En efecto, si $f(x) = f(y)$, esto es, $ax + b = ay + b$ cualesquiera sean x, y en $\mathbf{Q}$, entonces sumando $(-b)$ a ambos miembros vemos que $a\ x = a\ y$. Multiplicando a ambos miembros por $1/a$, obtenemos $x = y$. De aquí, f es inyectiva. Además, dado $y \in \mathbf{Q}$ cualquiera, el número racional $x = (y - b)/a$ es tal que $ax + b = y$; esto es, $f(x) = y$, de donde, f es suryectiva.

Teorema 3. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones biyectivas. Entonces $g \circ f : A \to C$ es biyectiva.

Demostración. En efecto, supóngase que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, es decir, $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, con lo que $f(x) = f(x')$ puesto que *g* es inyectiva, de donde, $x = x'$ porque f es inyectiva. En consecuencia, $g \circ f$ es también inyectiva.

Sea ahora $z \in C$. Puesto que *g* es sobre, existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$; como f es sobre, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Luego, $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z$, es decir, $g \circ f$ también es sobre.

Definición. Dadas las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to A$, diremos que g es una *inversa a izquierda para f*, cuando $g \circ f = id_A : A \to A$, o sea, cuando $g(f(x)) = x$, para todo $x \in A$; y g es una *inversa a derecha para* f cuando $f \circ g = id_B : B \to B$, o sea, cuando $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Una función $g: B \to A$ se llama *inversa* de la función $f: A \to B$, cuando $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$; esto es, cuando g es inversa a izquierda y a derecha para f.

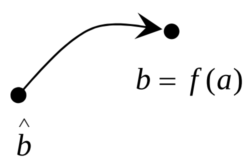
Teorema 4. Una función $f: A \to B$ posee inversa si y sólo si f es biyectiva.

Demostración. Supóngase que f tiene inversa; esto es, supóngase que existe $g: B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$.

Como $g \circ f = id_A$, entonces para cada x', x'' de A, supóngase que $f(x') = f(x'')$, de donde, $g(f(x')) = g(f(x''))$, es decir, $id_A(x') = id_A(x'')$. De aquí, $x' = x''$ y, por lo tanto, f es inyectiva.

Como $f \circ g = id_B$, entonces para cada $y \in B$ poniendo $x = g(y)$, se tiene $f(x) = f(g(y)) = id_B(y) = y$; o sea, $f(x) = y$. Luego, f es sobre.

Recíprocamente, supóngase que f es biyectiva. Entonces, cada $b \in B$ es la imagen de un único elemento de A, por ejemplo $\hat{b}$. Luego, si $f(a) = b$, entonces $a = \hat{b}$; luego, $f(\hat{b}) = b$.



Sea g la aplicación de B en A definida por: $b \to \hat{b}$.

Se tiene

(i) $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = \hat{b} = a$, para todo $a \in A$; luego, $g \circ f = id_A$.

(ii) $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(\hat{b}) = b$, para todo $b \in B$; luego, $f \circ g = id_B$.

En consecuencia, f tiene inversa. Su inversa es la aplicación g. Ésta aplicación es única en esas condiciones.

Observación

Se escribe $g = f^{-1} : B \to A$ para indicar la inversa de la biyección $f : A \to B$.

Teorema 5. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas. Entonces $(g \circ f)^{-1} : C \to A$ existe y es igual a $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$; es decir, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Demostración. Por definición se prueba que

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = id_A \quad \text{y} \quad (g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = id_C .$$

Se usa que $id_B \circ f = f = f \circ id_A$, puesto que para todo $x \in A$ se tiene

$$(id_B \circ f)(x) = id_B\,(f(x)) = f(x)$$

$$(f \circ id_A)(x) = f\,(id_A(x)) = f(x)$$

De estas últimas expresiones, resulta

$$id_B \circ f = f = f \circ id_A$$

Por la ley asociativa de la composición de funciones

$$\begin{aligned}\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = \\ &= f^{-1} \circ \left(\left(g^{-1} \circ g\right) \circ f\right) = \\ &= f^{-1} \circ (id_B \circ f) = f^{-1} \circ f = id_A\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) &= g \circ \left(f \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)\right) = \\ &= g \circ \left(\left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1}\right) = \\ &= g \circ \left(id_B \circ g^{-1}\right) = g \circ g^{-1} = id_C .\end{aligned}$$

Luego, existe $(g \circ f)^{-1} : C \to A$ y $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

Teorema 6. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tales que $g \circ f = id_A$. Entonces, f es inyectiva y g es sobre.

Demostración. Que f es inyectiva está probado en el teorema 4.

Como $g \circ f = id_A$, entonces para cada $x \in A$ poniendo $y = f(x)$, se tiene $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = id_A(x) = x$. Luego, g es sobre.

Teorema 7. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son tales que $f \circ g = id_B$, entonces g es inyectiva y f es sobre.

Demostración. Que f es sobre está probado en el teorema 4.

Como $f \circ g = id_B$, entonces dados y', $y'' \in B$, supongamos que $g(y') = g(y'')$, de donde, $f(g(y')) = f(g(y''))$, es decir, $id_B(y') = id_B(y'')$. De aquí, $y' = y''$ y, por lo tanto, g es inyectiva.

Conclusión

De los teoremas 6 y 7 resulta que si $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son tales que $f \circ g = id_B$ y $g \circ f = id_A$, entonces f y g son biyectivas.

Observaciones

1. Del teorema 4 se deduce que si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces posee inversa; esto es, $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$; es decir, la inversa de f es la aplicación $g = f^{-1} : B \to A$ que es también biyectiva (por la conclusión anterior), de donde, por el teorema 4, la función $g = f^{-1} : B \to A$ posee inversa; esto es, $f \circ g = id_B$ y $g \circ f = id_A$; es decir, la inversa de g es la aplicación $f = g^{-1} : A \to B$, o sea, $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$.

2. Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces $y = f(x)$ es equivalente a $x = f^{-1}(y)$, porque f posee inversa $g = f^{-1} : B \to A$ definida para $y \in B$ por la equivalencia: $g(y) = x$ si sólo si $y = f(x)$.

En efecto, si $y = f(x)$, entonces $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = id_A(x) = x$. Luego $g(y) = x$, o bien, $f^{-1}(y) = x$.

Por otro lado, si $x = f^{-1}(y)$, entonces $x = g(y)$, de donde, $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_B(y) = y$. Luego, $f(x) = y$.

1.6.3. Funciones de conjuntos asociadas.

Definiciones y propiedades

Dadas una función $f : A \to B$ y una parte $X \subseteq A$, se llama *imagen de X por la función f* al conjunto $f(X)$ formado por los valores $f(x)$ que f asume en los puntos $x \in X$. Es decir,

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} = \{y \in B : y = f(x), x \in X\}$$

Por lo tanto,

$$y \in f(X) \text{ si y sólo si existe } x \in X \text{ tal que } y = f(x).$$

Evidentemente, $f(X)$ es un subconjunto de *B*.

Para que $f : A \to B$ sea suryectiva es necesario y suficiente que $f(A) = B$. En general, se tiene que $f(A) \subseteq B$.

El conjunto $f(A)$ es llamado la *imagen de la función f*. A veces también se dice que $f(A)$ es el *conjunto de valores* de f.

Dada una función $f: A \rightarrow B$, se considera un conjunto cualquiera $Y \subseteq B$. La *imagen inversa de Y* por la función f es el conjunto $f^{-1}(Y)$ formado por todos los elementos de A cuyas imágenes por f están en *Y*. Es decir,

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A: \ f(x) \in Y\}.$$

Por lo tanto,

$$x \in f^{-1}(Y) \text{ si y sólo si } f(x) \in Y .$$

Observaciones

1. Nótese que puede ocurrir $f^{-1}(Y) = \varnothing$ para conjuntos $Y \subseteq B$ no vacíos, que serán precisamente aquellos Y para los cuales $Y \cap f(A) = \varnothing$; es decir, cuando Y no tiene puntos en común con la imagen de *f*.

2. Para cada subconjunto *Y* de *B*, la imagen directa de *Y* por f^{-1},

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in A \ : \ x = f^{-1}(y), \quad y \in Y\} \\ &= \{x \in A \ : \ f(x) = y, \quad y \in Y\} \end{aligned}$$

coincide con la imagen inversa de Y por *f*, $f^{-1}(Y) = \{x \in A \ : \ f(x) \in Y\}$ y, por lo tanto, las notaciones son consistentes.

Sea $f: A \rightarrow B$ dada. Entonces, f *induce* una función (también denotada por f) $f: P(A) \rightarrow P(B)$ tal que $X \rightarrow f(X)$ para cada $X \subseteq A$. La aplicación $f: A \rightarrow B$ también induce una aplicación $f^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$ tal que $Y \rightarrow f^{-1}(Y)$ para cada $Y \subseteq B$. Las funciones inducidas f y f^{-1} se llaman *funciones de* *conjunto* porque son aplicaciones de un conjunto de conjuntos en un conjunto de conjuntos.

Se debe observar que la función de conjunto f^{-1} no es, en general, la inversa de la función de conjunto *f*.

Las funciones de conjunto asociadas poseen varias propiedades. En particular, se establece:

Teorema 8. Sea una función $f: A \to B$. Entonces, para subconjuntos cualesquiera X, Y de A,

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

b) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

c) $X \subseteq Y$ implica $f(X) \subseteq f(Y)$

d) $f(\varnothing) = \varnothing$

Demostración

a) Sea $y \in f(X \cup Y)$, entonces existe $x \in X \cup Y$ tal que $f(x) = y$. Si $x \in X$, se tiene $y \in f(X)$. Si fuera $x \in Y$, se tiene $y \in f(Y)$. En cualquier caso, $y \in f(X) \cup f(Y)$. Luego, $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$.

Recíprocamente, sea $z \in f(X) \cup f(Y)$. Entonces, $z \in f(X)$ ó $z \in f(Y)$. En el primer caso, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. En el segundo, existe $y \in Y$ tal que $z = f(y)$. Con cualquier hipótesis, existe $w \in X \cup Y$ tal que $z = f(w)$. Así, $z \in f(X \cup Y)$; esto es $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$.

Estas dos inclusiones muestran que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

b) Sea $y \in f(X \cap Y)$, entonces existe $x \in X \cap Y$ tal que $f(x) = y$. Entonces, $x \in Y$ y, por lo tanto, $y \in f(Y)$. También $x \in X$ y, por lo tanto, $y \in f(X)$.

En consecuencia, $y \in f(X) \cap f(Y)$. Luego, $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

c) Sea $y \in f(X)$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por hipótesis, $x \in Y$ y, por lo tanto, $y \in f(Y)$. Luego, $f(X) \subseteq f(Y)$.

d) Supongamos $f(\emptyset) \neq \emptyset$. Sea $y \in f(\emptyset)$. Entonces, existe $x \in \emptyset$ tal que $f(x) = y$. Absurdo!. Luego, $f(\emptyset) = \emptyset$.

Observación

Nótese que, en general, no vale la igualdad en b). En efecto, sea $f : A \to B$ una función que no es inyectiva. Entonces, existen $x \neq y$ en A con $f(x) = f(y)$. Pongamos $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$. Se tiene, $X \cap Y = \emptyset$. Luego, $f(X \cap Y) = \emptyset$. Sin embargo, $f(X) \cap f(Y) = \{f(x)\}$ que es distinto de vacío. Luego, en este caso, se tiene $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Teorema 9. Si $f : A \to B$ es inyectiva, entonces $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ cualesquiera sean X, Y contenidos en A.

Demostración. En efecto, dado $y \in f(X) \cap f(Y)$, se tiene $y \in f(X)$ e $y \in f(Y)$. Luego, existen $x' \in X$ y $x'' \in Y$ con $y = f(x')$ e $y = f(x'')$. Como f es inyectiva, debe ser $x' = x''$ y por lo tanto, $x' \in X \cap Y$. Se sigue que $y = f(x') \in f(X \cap Y)$, lo que demuestra que $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$. Como $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ es siempre verdadera, se concluye que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Conclusión

Del teorema 9 y de la observación anterior, se deduce que la función $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, cualesquiera sean X, Y contenidos en A.

Las imágenes inversas se “comportan bien” respecto a las operaciones con conjuntos.

Teorema 10. Sea una función $f : A \to B$. Entonces, para subconjuntos cualesquiera Y y Z de B,

a) $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$

b) $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$

c) $f^{-1}(\complement\, Y) = \complement\, f^{-1}(Y)$

d) $Y \subseteq Z$ implica $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)$

e) $f^{-1}(B) = A$

f) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

g) $f^{-1}(Y - Z) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(Z)$

Demostración

a) Sea $x \in f^{-1}(Y \cup Z)$. Entonces $f(x) \in Y \cup Z$ con lo que $f(x) \in Y$ ó $f(x) \in Z$. De aquí, $x \in f^{-1}(Y)$ ó $x \in f^{-1}(Z)$. Por consiguiente, $x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$.

Recíprocamente, sea $x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$. Entonces, $x \in f^{-1}(Y)$ ó $x \in f^{-1}(Z)$, de donde, $f(x) \in Y$ ó $f(x) \in Z$, es decir, $f(x) \in Y \cup Z$. Por lo tanto, $x \in f^{-1}(Y \cup Z)$.

b) Sea $x \in f^{-1}(Y \cap Z)$. Entonces $f(x) \in Y \cap Z$, de donde, $f(x) \in Y$ y $f(x) \in Z$. Luego $x \in f^{-1}(Y)$ y $x \in f^{-1}(Z)$ y, por consiguiente, $x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$.

Recíprocamente, sea $x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$. Entonces, $x \in f^{-1}(Y)$ y $x \in f^{-1}(Z)$, de donde, $f(x) \in Y$ y $f(x) \in Z$, es decir, $f(x) \in Y \cap Z$. Por lo tanto, $x \in f^{-1}(Y \cap Z)$.

c) Supóngase que $x \in f^{-1}(\complement\, Y)$. Entonces, $f(x) \in \complement\, Y$, de donde, $f(x) \notin Y$. Luego $x \notin f^{-1}(Y)$ y, por lo tanto, $x \in \complement\, f^{-1}(Y)$.

Recíprocamente, sea $x \in \complement\, f^{-1}(Y)$. Entonces, $x \notin f^{-1}(Y)$, de donde, $f(x) \notin Y$. Pero entonces, $f(x) \in \complement\, Y$, de donde, $x \in f^{-1}(\complement\, Y)$.

d) Sea $x \in f^{-1}(Y)$. Entonces, $f(x) \in Y$ y como por hipótesis $Y \subseteq Z$, se tiene que $f(x) \in Z$. Por lo tanto, $x \in f^{-1}(Z)$.

e) Sea $B = Y \cup \complement\, Y$. Entonces,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \cup \complement\, Y) \underset{\text{a)}}{=} f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(\complement\, Y) \underset{\text{c)}}{=}$$

$$\underset{\text{c)}}{=} f^{-1}(Y) \cup \complement\, f^{-1}(Y) = A.$$

f) Supongamos $f^{-1}(\varnothing) \neq \varnothing$. Sea $x \in f^{-1}(\varnothing)$. Entonces, $f(x) \in \varnothing$. Absurdo!. Luego, $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

g) Sea $x \in f^{-1}(Y - Z)$. Entonces, $f(x) \in Y - Z$, de donde, $f(x) \in Y$ y $f(x) \notin Z$. De aquí $x \in f^{-1}(Y)$ pero $x \notin f^{-1}(Z)$, de donde, $x \in f^{-1}(Y) - f^{-1}(Z)$.

Recíprocamente, sea $x \in f^{-1}(Y) - f^{-1}(Z)$. Entonces, $x \in f^{-1}(Y)$ y $x \notin f^{-1}(Z)$, de donde, $f(x) \in Y$ y $f(x) \notin Z$, es decir, $f(x) \in Y - Z$. Por lo tanto, $x \in f^{-1}(Y - Z)$.

Otras propiedades que se verifican también para la función de conjunto asociada son las siguientes.

Teorema 11. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Entonces, $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}\left(g^{-1}(Z)\right)$ siendo $Z \subseteq C$ arbitrario.

Demostración. Para $x \in A$ se tiene que $x \in f^{-1}\left(g^{-1}(Z)\right)$ si y sólo si $f(x) \in g^{-1}(Z)$ que es equivalente a $g\left(f(x)\right) \in Z$ lo cual a su vez es equivalente a $(g \circ f)(x) \in Z$ y esto es lo mismo que decir que $x \in (g \circ f)^{-1}(Z)$.

Teorema 12. Sea $f : A \to B$ inyectiva. Entonces, la función inducida $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ también es inyectiva.

Demostración. Si $A = \varnothing$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$, de donde, $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ es inyectiva porque no existen dos elementos diferentes de $\mathcal{P}(A)$ que puedan tener la misma imagen, puesto que $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto unitario.

Si $A \neq \varnothing$, $\mathcal{P}(A)$ tiene al menos dos elementos. Sean $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, pero $X \neq Y$. Entonces, existe $p \in A$ tal que $p \in X$, $p \notin Y$ (o bien $p \notin X$, $p \in Y$), con lo que $f(p) \in f(X)$ y, como f es inyectiva $f(p) \notin f(Y)$ (o $f(p) \notin f(X)$ y $f(p) \in f(Y)$). De donde, $f(X) \neq f(Y)$ y, por lo tanto, la función de conjunto inducida es también inyectiva.

Teorema 13. Sea $f : A \to B$. Entonces,

a) $X \subseteq \left(f^{-1}(f(X))\right)$ para todo $X \subseteq A$

a$_1$) f es inyectiva si y solamente si $\left(f^{-1}(f(X))\right) = X$ para todo $X \subseteq A$

b) $\left(f\left(f^{-1}(Z)\right)\right) \subseteq Z$ para todo $Z \subseteq B$

b$_1$) f es sobre si y solamente si $\left(f\left(f^{-1}(Z)\right)\right) = Z$ para todo $Z \subseteq B$

Demostración

a) Sea $X \subseteq A$ y sea $x \in X$. Entonces, $f(x) \in f(X)$, de donde, $x \in \left(f^{-1}(f(X))\right)$.

a$_1$) Sea $X \subseteq A$. Supongamos que f es inyectiva y sea $x \in \left(f^{-1}(f(X))\right)$. Entonces, $f(x) \in f(X)$.

Luego, $f(x)=f(a)$, donde $a \in X$, y como f es inyectiva $x=a$, de donde, $x \in X$.

Recíprocamente, supongamos que $\left(f^{-1}(f(X))\right)=X$ para todo $X \subseteq A$. Luego, $f^{-1} \circ f = id_A$, de donde, f es inyectiva.

b) Sea $Z \subseteq B$ y sea $y \in \left(f\left(f^{-1}(Z)\right)\right)$. Entonces, existe $x \in f^{-1}(Z)$ tal que $f(x)=y$, de donde, $f(x) \in Z$, con $f(x)=y$; es decir, $y \in Z$.

b$_1$) Sea $Z \subseteq B$. Supongamos que f es sobre y sea $y \in Z$. Entonces, $y=f(x)$, para algún $x \in A$ y, por lo tanto, $x \in f^{-1}(Z)$. De aquí, $f(x) \in \left(f\left(f^{-1}(Z)\right)\right)$; es decir, $y \in \left(f\left(f^{-1}(Z)\right)\right)$.

1.7. Conjuntos numerables.

Definición. Dados dos conjuntos *A* y *B*, diremos que *A* es *equipotente* a *B* (ó que *A* es equivalente a *B*) si existe una biyección $f: A \to B$, y lo notaremos *A* ~ *B*.

Se puede probar que "~" es un relación de equivalencia.

En el caso de conjuntos finitos resulta de la definición que dos conjuntos *A* y *B* son equipotentes si y sólo si *A* tiene el mismo número de elementos que *B*.

Ejemplos

1) Sean $A=[0,1]$ y $B=[2,3]$ subconjuntos de $\mathbf{R}$. Se define la función

$$f: A \to B \quad \text{tal que}$$
$$x \to x+2$$

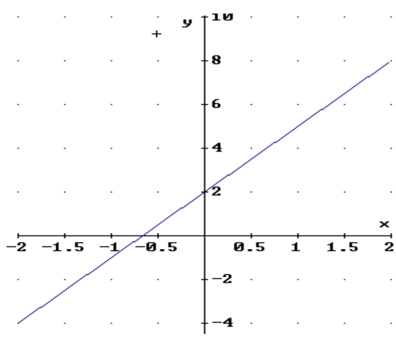


Figura 2

Es claro que esta aplicación es biyectiva y, por lo tanto, $A \sim B$.

2) Sea $P = \{2n : n \in \mathbf{N}\}$, es decir, el conjunto de los naturales pares. Se define la función

$$f : \mathbf{N} \to P \text{ tal que } n \to 2n .$$

Es claro que esta aplicación es biyectiva y, por lo tanto, $\mathbf{N} \sim P$.

Observemos que $P \subset \mathbf{N}$, y sin embargo se pudo establecer una biyección entre P y $\mathbf{N}$. Esto no sería posible si $\mathbf{N}$ fuera finito.

Definición. Se dice que un conjunto A es *infinito* si es equipotente a un subconjunto propio. En caso contrario, se dice que A es *finito*.

De acuerdo a esta definición, $\mathbf{N}$ es infinito.

Definición. Se dice que A es *numerable* si A es equipotente con $\mathbf{N}$. Diremos que A es a lo *sumo numerable* si A es finito o numerable.

Se dice que A es *no numerable o no a lo sumo numerable* si A no es ni finito ni numerable.

Ejemplos

1) El conjunto $P = \{2n : n \in \mathbf{N}\}$ es numerable.

2) $\mathbf{Z}$, el conjunto de los enteros, es numerable, pues la biyección que se establece con $\mathbf{N}$ es la siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

esto es, se define la función $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ tal que

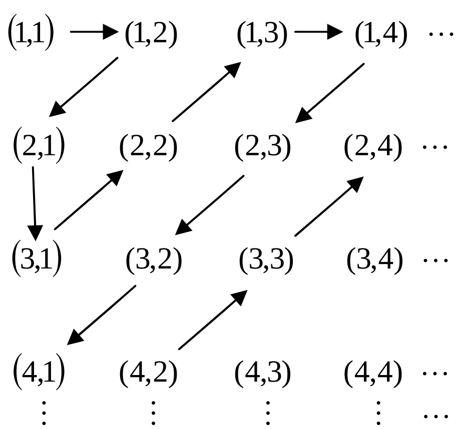
$$f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0\\ 2x+1, & x\geq 0\end{cases},\ \text{que es biyectiva.}$$

3) El conjunto $A=\{2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots\}$ es numerable, pues se considera la función

$$f:\mathbf{N}\to A \text{ tal que } n\to 2^n,\ \text{que es biyectiva.}$$

4) Una sucesión infinita $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ de elementos distintos de un conjunto A es numerable, porque una sucesión es una función $f:\mathbf{N}\to A$ tal que $n\to a_n$, y en este caso se satisface que $a_i\neq a_j$ si $i\neq j$, con lo cual f es evidentemente biyectiva.

5) El conjunto producto $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ es numerable, pues se considera ese conjunto como se muestra a continuación:



El conjunto $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ puede escribirse como una sucesión de elementos distintos como sigue:

$$(1, 1);\ (1, 2);\ (2, 1);\ (3, 1);\ (2, 2);\ (1, 3);\ (1, 4);\cdots$$

Luego, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ es numerable (por el ejemplo 4)).

Para establecer la sucesión, según se observa en el diagrama anterior, basta "seguir las flechas", o sea que se numera a los elementos desplazándose "en diagonales" según las flechas, estableciendo así la biyección entre todos los $\mathbf{N}$ y todos los elementos de la sucesión así formada; esto es, se toma como primero, el elemento $(1,1)$; como segundo, el $(1,2)$; como tercero, el $(2,1)$; como cuarto, el $(3,1)$, y así siguiendo, según las flechas.

Se adopta este criterio porque se necesita que el conjunto de pares (m,n), $m,n \in \mathbf{N}$, sea escrito en forma de sucesión infinita (ver definición de sucesión en capítulo 3), pero de elementos distintos (para poder aplicar el ejemplo 4)).

A continuación probaremos algunas propiedades que involucran a los conjuntos numerables.

Teorema 1. Si A es un conjunto numerable, entonces sus elementos pueden ser ordenados en una sucesión infinita de puntos distintos.

Demostración. Si A es un conjunto numerable, entonces existe una función $f:\mathbf{N}\to A$ biyectiva que a cada $n\in\mathbf{N}$ le asigna $f(n)\in A$. Es decir que A es el conjunto de valores de f biyectiva definida en $\mathbf{N}$ y, por lo tanto, A se puede pensar como el conjunto de valores de una sucesión infinita de puntos distintos.

De aquí, los elementos de A se pueden ordenar en una sucesión infinita de puntos distintos.

Conclusión

De esta propiedad y del ejemplo 4) surge que: Un conjunto A es numerable si y sólo si sus elementos pueden ser ordenados en una sucesión infinita de términos distintos.

Teorema 2. Si A es a lo sumo numerable, entonces sus elementos pueden ser ordenados en una sucesión infinita (en la cual es posible que haya repeticiones).

Demostración. Si A es numerable, por el teorema 1, sus elementos pueden ser ordenados en una sucesión infinita de puntos distintos.

Si A es finito, entonces supongamos que $A=\{a_1, a_2,\cdots, a_n\}$. Se define la función $f:\mathbf{N}\to A$ tal que

$$f(i)=\begin{cases} a_i \quad , & \text{si} \quad i \le n \\ a_{i-n} \, , & \text{si} \;\; i > n \end{cases}$$

Es decir que se define una sucesión infinita en la que hay repeticiones y, por lo tanto, los elementos de *A* pueden ser ordenados en una sucesión infinita (en la que hay repeticiones).

Teorema 3. Una sucesión infinita $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ de elementos de un conjunto *A*, en la que es posible que haya repeticiones, es a lo sumo numerable.

Demostración. Puesto que los elementos distintos del conjunto pueden ser ordenados en una sucesión finita o infinita, de donde, o bien A es finito o bien A es numerable (por el ejemplo 4)); es decir, *A* es a lo sumo numerable.

Conclusión

De los teoremas 2 y 3 surge que: Un conjunto *A* es a lo sumo numerable si y sólo si sus elementos pueden ser ordenados en una sucesión infinita (en la cual es posible que haya repeticiones).

Teorema 4. Todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.

Demostración. Sea A un conjunto numerable. Entonces, $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ (1). Sea $B \subseteq A$. Si $B=\varnothing$, entonces *B* es finito. Supongamos entonces que $B \neq \varnothing$. Sea a_{n_1} el primer elemento de la sucesión (1) que pertenece a *B*. Sea a_{n_2} el elemento que sigue a a_{n_1} y que pertenece a *B*; y así siguiendo, se obtiene $B=\{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots\}$. Si el conjunto de índices $\{n_1, n_2, \cdots\}$ está acotado (o sea, tiene máximo), entonces *B* es finito. Caso contrario, *B* es numerable (por el ejemplo 4)).

Corolario. Todo subconjunto de un conjunto a lo sumo numerable es a lo sumo numerable.

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema 4. En efecto, sea *A* un conjunto a lo sumo numerable. Entonces, *A* es finito o numerable. Si A es finito, entonces todo subconjunto de A es finito y, por lo tanto, a lo sumo numerable. Si A es numerable, entonces por el teorema 4, todo subconjunto de A es a lo sumo numerable.

Teorema 5. Todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.

Demostración. Sea M un conjunto infinito. Sea a_1 un elemento de M. Como M es infinito se puede encontrar un elemento a_2 de M tal que $a_2 \neq a_1$. Análogamente, se obtienen los demás:

$$\begin{array}{lll} a_1 & & \\ a_2 & : & a_2 \neq a_1 \\ a_3 & : & a_3 \neq a_2,\ a_3 \neq a_1 \\ \vdots & & \end{array}$$

Repitiendo este razonamiento, que no concluye pues M es infinito, se tiene $B = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ que es numerable.

Definición. Se dice que una familia $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ es *numerable* (respectivamente, a lo *sumo numerable*), si lo es el conjunto L de índices.

Teorema 6. La unión de una familia numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos es numerable.

Demostración. Puesto que los A_i son numerables, se puede escribir

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \cdots\} \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \cdots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_{n1}, a_{n2}, \cdots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Entonces, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \{a_{ij} : (i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}\}$.

Luego, la función $f : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, definida por $f(a_{ij}) = (i, j)$ es evidentemente biyectiva (pues los A_i son disjuntos dos a dos). Resulta de aquí que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, y como $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ es numerable se deduce que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es también numerable.

Otra demostración. Sean $A_1, A_2, \ldots$ conjuntos numerables disjuntos dos a dos. Entonces, sus elementos pueden ser pensados como sigue:

$$
\begin{array}{lllllll}
A_1: & a_{11} \longrightarrow & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\
A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\
A_n: & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots
\end{array}
$$

El cuadro contiene todos los elementos de la unión, que según esta disposición estaría formada por: $a_{11}; a_{12}, a_{21}; a_{31}, a_{22}, a_{13}; \cdots$, y no hay elementos comunes por ser los A_i disjuntos dos a dos; esto es, se numera todos los elementos desplazándose "en diagonales"; es decir, tomando por primero el elemento a_{11}; por segundo, el elemento a_{12}; por tercero, el elemento a_{21}, etc.; siguiendo el sentido de las flechas como indica el cuadro anterior. Está claro que cada elemento de cada conjunto recibirá entonces un número determinado, es decir que quedará establecida una correspondencia uno a uno y sobre entre todos los elementos de todos los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ y todos los números naturales.

Teorema 7. El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable.

Demostración. Sean A y B conjuntos numerables. Entonces, se puede escribir

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} \text{ y } B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}.$$

Luego,

$$A\times B=\{(a_1,b_1); (a_1,b_2); \cdots ; (a_1,b_n); \cdots ; (a_2,b_1); (a_2,b_2); \cdots ; (a_2,b_n);$$
$$\cdots ;(a_n,b_1); (a_n,b_2); \cdots ; (a_n,b_n); \cdots \}$$

Sean

C_1 el conjunto formado por los pares cuya primera coordenada a_1 es fija,

C_2 el conjunto formado por los pares cuya primera coordenada a_2 es fija,

$\vdots$

C_n el conjunto formado por los pares cuya primera coordenada a_n es fija,

$\vdots$

Entonces, $A\times B=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n$. Se aplica ahora el teorema 6. Cada conjunto C_n, $n\in\mathbf{N}$ es numerable y $C_i \cap C_j = \varnothing$, para todo $i\neq j$. En efecto, se define para $n\in\mathbf{N}$ fijo la función $f: C_n \to B$ tal que $(a_n, b_i)\to b_i$ para todo $i\in\mathbf{N}$; f es biyectiva y como B es numerable, entonces C_n, $n\in\mathbf{N}$ es numerable; esto es, cada uno de los conjuntos C_n, con $n\in\mathbf{N}$ es numerable. Es inmediato, además, de la construcción de los C_n, $n\in\mathbf{N}$, que $C_i \cap C_j = \varnothing$, para todo $i\neq j$. Luego, $A\times B$ es numerable.

Ejemplos

1) $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ es numerable.

2) $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ es numerable.

Teorema 8. El conjunto $[0,1]\subset\mathbf{R}$ no es numerable.

Demostración. Supongamos que $[0,1]$ es numerable. Entonces, los números reales de este intervalo pueden expresarse como una sucesión infinita $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ de términos distintos. Se probará que esto es imposible construyendo, dentro del intervalo, un número real que no sea término de esta sucesión.

Cada elemento de $[0,1]$ puede escribirse en forma de decimal de infinitas cifras como sigue:

$$
\begin{gathered}
x_1 = 0, a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1n} \cdots \\
x_2 = 0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots a_{2n} \cdots \\
\vdots \\
x_n = 0, a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \cdots a_{nn} \cdots \\
\vdots
\end{gathered}
$$

donde $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ y donde cada decimal contiene un número infinito de cifras diferentes de cero; esto es, en los casos en que un número pueda expresarse en forma decimal de dos maneras distintas, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000\cdots = 0{,}4999\cdots$$

se adoptará la forma decimal en la que todas las cifras, excepto un conjunto finito de ellas, son nueves.

Considérese ahora el número real b cuya expresión decimal es

$$b = 0, b_1\ b_2 \cdots b_n \cdots$$

donde

$$
\begin{gathered}
b_1 \text{ se ha elegido de modo que } b_1 \neq a_{11} \text{ y } b_1 \neq 0, \\
b_2 \text{ se ha elegido de modo que } b_2 \neq a_{22} \text{ y } b_2 \neq 0, \\
\vdots \\
b_n \text{ se ha elegido de modo que } b_n \neq a_{nn} \text{ y } b_n \neq 0, \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Luego, existe $b \in [0,1]$ y $b \neq x_i$ para todo $i \in \mathbf{N}$. Este absurdo proviene de suponer que $[0,1]$ es numerable. Luego, el conjunto $[0,1]$ no es numerable.

Otras propiedades importantes sobre conjuntos numerables, y que están dadas como ejercicios, son las siguientes:

a) El conjunto de los números racionales $\mathbf{Q}$ es numerable.
b) El conjunto de los números reales $\mathbf{R}$ no es numerable.
c) La unión a lo sumo numerable de conjuntos a lo sumo numerables es a lo sumo numerable.

1.8. Ejercicios propuestos.

1. Sean A y B subconjuntos de U. Probar que:

   a) $A \cap B = \varnothing$ si y sólo si $A \subseteq B'$ si y sólo si $B \subseteq A'$.

   b) $A \cup B = U$ si y sólo si $B' \subseteq A$ si y sólo si $A' \subseteq B$.

2. Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, mostrar que:
   a) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$ es una representación de A como unión de conjuntos disjuntos.

   b) $A \cup B = A \cup (B - A)$ es una representación de $A \cup B$ como unión de conjuntos disjuntos.

3. Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Probar las siguientes fórmulas:

   a) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C$

   b) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

   c) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

   d) $(A - B) - (A - C) = A \cap (C - B)$

   e) $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$

   f) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

   g) $(A - B) \cup (A \cap C) = A - (B - C)$

4. Sean A, B y X conjuntos arbitrarios. Probar que el siguiente sistema de ecuaciones tiene al menos una solución para X :

$$\begin{cases} A \cup X = A \cup B \\ A \cap X = \varnothing \end{cases}$$

5. Sean A, B, C y D conjuntos arbitrarios. Probar las siguientes fórmulas:

   a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

   c) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

   d) Dar un ejemplo que muestre que

   $$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

   e) $A \times B = \varnothing$ si y sólo si $A = \varnothing$ ó $B = \varnothing$

   f) Si $C \times D \neq \varnothing$, entonces

   $(C \times D \subseteq A \times B$ si y sólo si $C \subseteq A,\ D \subseteq B)$

6. Sean $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar las siguientes fórmulas:

   a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

   b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$

   Probar que, en general, la igualdad no es cierta verificando que:

   $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \cup (A \times D) \cup (B \times C)$

   c) $\complement_{X \times Y} (B \times D) = (\complement_X B \times \complement_Y D) \cup (\complement_X B \times D) \cup (B \times \complement_Y D)$

   d) $\complement_{X \times Y} (B \times D) \neq \complement_X B \times \complement_Y D$

7. Sea Γ un conjunto dado y sean $\{A_\alpha\}$ y $\{B_\beta\}$ familias de subconjuntos de Γ. Probar las siguientes fórmulas:

   a) $\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} B_\beta\right) = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in A \times B} \left(A_\alpha \cap B_\beta\right)$

   b) $\left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcap_{\beta \in B} B_\beta\right) = \bigcap_{(\alpha,\beta) \in A \times B} \left(A_\alpha \cup B_\beta\right)$

   c) Si tomamos complemento con respecto a Γ, entonces

   $$\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right)' = \bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha' \qquad \left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha\right)' = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha'$$

   d) $\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right) \times \left(\bigcup_{\beta \in B} B_\beta\right) = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in A \times B} \left(A_\alpha \times B_\beta\right)$

   e) $\left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha\right) \times \left(\bigcap_{\beta \in B} B_\beta\right) = \bigcap_{(\alpha,\beta) \in A \times B} \left(A_\alpha \times B_\beta\right)$

8. Sean $\{A_\alpha\}$ y $P(A_\alpha)$ una familia de conjuntos y el conjunto de partes de A_α, respectivamente. Probar las siguientes fórmulas:

   a) $\bigcap_{\alpha \in A} P(A_\alpha) = P(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha)$

   b) $\bigcup_{\alpha \in A} P(A_\alpha) \subseteq P\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right)$

   Mostrar con un ejemplo que, en general, no se verifica la igualdad.

9. Si $f : X \to Y$ es una función, entonces probar que la función inducida $f^{-1} : P(Y) \to P(X)$ y la función inducida $f : P(X) \to P(Y)$ verifican:

   a) $f^{-1}(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$

   b) $f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$

   c) $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$

d) $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) \subseteq \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$

Mostrar con un ejemplo que, en general, no se verifica la igualdad.

10. Sea $f : X \to Y$ y sean $A, B \subseteq X$ cualesquiera. Probar que las funciones inducidas verifican:

a) $A \subseteq B$ entonces $f(A) \subseteq f(B)$.

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si y sólo si f es inyectiva.

11. Sea $f : X \to Y$. Probar que:

a) f es inyectiva si y sólo si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y) = \varnothing$ o un solo punto.

b) f es inyectiva si y sólo si para todo $A \subseteq X$, $f(\complement A) \subseteq \complement f(A)$.

c) f es suryectiva si y sólo si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y) \neq \varnothing$.

d) f es suryectiva si y sólo si para todo $A \subseteq X$, $f(\complement A) \supseteq \complement f(A)$.

12. Dar ejemplo de dos subconjuntos A y B de X, $B \subseteq A$ y una aplicación f tal que $f(A - B) \neq f(A) - f(B)$.

13. Dar ejemplos de aplicaciones $f : X \to Y$ y subconjuntos $A \subseteq X$ tales que:

a) $f(X - A) \subseteq Y - f(A)$.

b) $Y - f(A) \subseteq f(X - A)$.

c) Ninguno de los dos conjuntos $f(X - A)$ e $Y - f(A)$ esté contenido en el otro.

14. Sea $f : X \to Y$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:
    a) f es inyectiva.
    b) Para cada conjunto $A \subseteq X,\quad f^{-1}(f(A)) = A$
    c) Para cada par de conjuntos $A, B \subseteq X,$
    $$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
    d) Para cada par de conjuntos $A, B \subseteq X, A \cap B = \varnothing$ entonces $f(A) \cap f(B) = \varnothing$

15. Probar que la relación: "$A \sim B$ si y sólo si existe una función $f : A \to B$ biyectiva" es una relación de equivalencia.

16. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera. Probar que:
    a) Si $A \sim B, C \sim D$ y $A \cap C = \varnothing,\ B \cap D = \varnothing,$ entonces $A \cup C \sim B \cup D$
    b) Si $A \sim B$ y $C \sim D,$ entonces $A \times C \sim B \times D$.
    c) $A \times B \sim B \times A$.
    d) $A \times B \times C \sim A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$.
    e) $A \times \{x\} \sim \{x\} \times A \sim A$.
    f) Dados A, B conjuntos cualesquiera existen conjuntos $C,\ D$ tales que $A \sim C,\ B \sim D$ y $C \cap D = \varnothing$.
    g) Si $A \sim B$ y $C \sim D,$ entonces $A^C \sim B^D$.
    h) Si $B \cap C = \varnothing,$ entonces $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$.
    i) $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.

17. Sea X un conjunto arbitrario y sea $\mathrm{C}(X) = \{ f : X \to \{0,1\}\}$ (función característica de X). Probar que $\mathrm{C}(X) \sim \mathcal{P}(X)$.

18. Probar que:

a) $[0,1] \sim (0,1)$.

b) $[0,1] \sim [0,1)$.

c) $[0,1] \sim (0,1]$.

19. Probar que:

$[a, b] \sim [a,\ b) \sim (a,\ b] \sim (a, b)$, siendo $a < b$.

20. Probar que la unión a lo sumo numerable de conjuntos a lo sumo numerables es a lo sumo numerable.

21. Probar que si $\{A_i\}_{1 \le i \le n}$ es una familia de conjuntos numerables entonces $\prod_{i=1}^{n} A_i$ es numerable.

22. Si A es un conjunto numerable y $f : A \to B$ es una aplicación de A sobre B, entonces probar que B es a lo sumo numerable.

23. Probar que el conjunto de los números racionales $\mathbf{Q}$ es numerable.

24. Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales. Probar que $\mathbf{R} \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Concluir que $\mathbf{R}$ no es numerable.

25. a) Probar que el conjunto de todas las sucesiones finitas cuyos términos sean elementos de un conjunto numerable dado es numerable.
    Deducir que el conjunto de todas las sucesiones finitas de números racionales es numerable.
    b) Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.
    c) Probar que el conjunto de todos lo números algebraicos sobre $\mathbf{Q}$ es numerable. Deducir que existen números trascendentes.

2

Capítulo II

Números reales.

2

2.1. Introducción.

La diferencia principal con la forma más usual de introducir los números reales está en que aquí sus propiedades se deducen de un cierto número de proposiciones tomadas como axiomas (o propiedades básicas), mientras que estas proposiciones podrían efectivamente demostrarse como consecuencias de los axiomas de la teoría de conjuntos (o de los axiomas de los enteros naturales, junto con alguna parte de la teoría de conjuntos, permitiendo formar las construcciones clásicas de las "cortaduras de Dedekind" o las "sucesiones fundamentales de Cantor"). Estas demostraciones tienen un gran interés lógico, e históricamente han contribuido a aclarar el clásico concepto del "continuo". Pero no tienen ninguna relación con los contenidos que abarca la Topología Métrica, y se ha pensado que no era necesario recargar al estudiante con ellas; el lector al que le interesen puede encontrarlas en varios de los textos propuestos como referencia bibliográfica; para una exposición especialmente clara y elegante, ver Landau [15].

2.2. Axiomas de los números reales.

El cuerpo de los números reales es un conjunto $\mathbf{R}$ en el que están definidas:

1. dos aplicaciones $(x,y)\to x+y$, $(x,y)\to x\cdot y$ de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$;
2. una relación $x\le y$, "*x es menor o igual que y*" (escrita también $y\ge x$, "*y es mayor o igual que x*") entre elementos de $\mathbf{R}$ que satisfacen los cuatro grupos de axiomas siguientes:

(I) $\mathbf{R}$ es un *cuerpo*, es decir, para cualesquiera *x*, *y*, *z* en $\mathbf{R}$ se cumplen:

(I.1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*propiedad asociativa)*

(I.2) $x + y = y + x$ (*propiedad conmutativa*)

(I.3) existe un elemento $0 \in \mathbf{R}$ tal que $0 + x = x$, para cada $x \in \mathbf{R}$ (*existencia de elemento neutro*)

(I.4) para cada elemento $x \in \mathbf{R}$ existe un elemento $-x \in \mathbf{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ (*existencia de inverso aditivo u opuesto*)

(I.5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (*propiedad asociativa*)

(I.6) $x \cdot y = y \cdot x$ (*propiedad conmutativa*)

(I.7) existe un elemento $1 \neq 0$ en $\mathbf{R}$ tal que $1 \cdot x = x$, para cada $x \in \mathbf{R}$ (*existencia de elemento neutro*)

(I.8) para cada elemento $x \neq 0$ en $\mathbf{R}$ existe un elemento $x^{-1} \in \mathbf{R}$ (escrito también $1/x$) tal que $x \cdot x^{-1} = 1$ (*existencia de inverso multiplicativo*)

(I.9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (*propiedad distributiva del producto respecto a la suma*)

Observaciones

1. Con los axiomas (I.1) a (I.4), $\mathbf{R}$ es un grupo abeliano o conmutativo con respecto a la suma denotada por "+".

2. De estos nueve axiomas se derivan todas las leyes usuales del Álgebra elemental (ver Apóstol, [1]).

(II) $\mathbf{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado. Esto significa que, para cualesquiera *x*, *y*, *z* en $\mathbf{R}$, se satisfacen los siguientes axiomas:

(II.1) $x \leq x$ (*propiedad reflexiva*)

(II.2) $x \leq y$ y $y \leq z$ implica $x \leq z$ (*propiedad transitiva*)

(II.3) $x \leq y$ y $y \leq x$ es equivalente a $x = y$ (*propiedad antisimétrica*)

(II.4) para cada dos elementos x, y de $\mathbf{R}$, ó $x \leq y$ ó $y \leq x$ (*propiedad de orden total*)

(II.5) $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$

(II.6) $0 \leq x$ y $0 \leq y$ implica $0 \leq x \cdot y$

Observaciones

1. Con los axiomas (II.1) a (II.3), $\mathbf{R}$ es un conjunto ordenado por la relación "$\leq$", y con (II.4) además, $\mathbf{R}$ es un conjunto totalmente ordenado.

2. Los axiomas (II.5) y (II.6) se enuncian diciendo que el orden "$\leq$" en $\mathbf{R}$ es consistente con las operaciones de suma "+" y multiplicación ".".

Nota

La relación "$x \leq y$ y $x \neq y$" se indica por $x < y$ ó $y > x$ y se dice que "*x es menor que y*" ó que "*y es mayor que x*".

La relación $x \leq y$ es equivalente a "$x < y$ ó $x = y$".

Definición. Para cada par de elementos $a, b \in \mathbf{R}$ tales que $a < b$, el conjunto de los números reales *x* tales que $a < x < b$ se llama *intervalo abierto de origen a y extremo b* y se indica por (a, b); el conjunto de los números reales *x* tales que $a \leq x \leq b$ se llama *intervalo cerrado de origen a y extremo b* y se indica por $[a, b]$ (para $a = b$ la notación $[a, a]$ representa el conjunto $\{a\}$ formado por un solo punto); el conjunto de los números reales *x* tales que $a < x \leq b$ ($a \leq x < b$) se denomina *intervalo semiabierto de origen a y extremo b, abierto en a* (respectivamente, en *b*) *cerrado en b* (respectivamente, en *a*) y se indica por $(a, b]$ (respectivamente, $[a, b)$). El origen y extremo de un intervalo se denominan también "*los extremos*" del intervalo.

(III) $\mathbf{R}$ *es un cuerpo arquimedeano*, esto es, $\mathbf{R}$ satisface el axioma de Arquímedes (o propiedad arquimedeana):

Para cada par x, y de números reales tales que $0 < x$ existe un entero $n > 0$ tal que $y < n \cdot x$.

Geométricamente significa que cada segmento, tan largo como se quiera, puede ser recubierto por un número finito de segmentos de longitud positiva dada tan pequeña como se quiera. En otras palabras, una regla corta puede medir distancias tan largas como se quiera colocándola consecutivamente.

Observaciones

1. Este axioma es equivalente a la siguiente propiedad: Para cada $x \in \mathbf{R}$ existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > x$. (La demostración se deja a cargo del lector).

2. Si $x > 0$ entonces existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.

Demostración. Tómese en la propiedad arquimedeana en lugar de y el número real 1. Entonces, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n \cdot x > 1$, de donde, $x > 1/n$.

Otra forma de demostrar este resultado. Tómese en la observación anterior en lugar de x, $1/x$. Entonces, $1/x$ es un real y, por lo tanto, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > 1/x$, de donde $x > 1/n$.

(IV) $\mathbf{R}$ satisface el *principio de encaje*:

Dada una sucesión $\left([a_n, b_n]\right)_{n \in N}$ de intervalos cerrados tales que $a_n \leq a_{n+1}$ y $b_{n+1} \leq b_n$ para cada n, la intersección de esta sucesión no es vacía.

2.3. Propiedades que involucran el orden de los números reales.

Teorema 1. Para cada par de números reales x, y se verifica una y sólo una de las tres relaciones: $x < y$, $x = y$, $x > y$ (*propiedad de tricotomía*)

Demostración. Esto es consecuencia de (II.4) y (II.3), pues si $x \neq y$ es imposible en virtud de (II.3) que $x < y$ e $y < x$ se verifiquen simultáneamente.

Teorema 2. Cada una de las relaciones "$x \leq y$ y $y < z$" y "$x < y$ y $y \leq z$" implican $x < z$.

Demostración. Pues en virtud de la definición de "$<$" y de (II.2), ambas relaciones implican $x \leq z$, y si fuera $x = z$ tendría que ser a la vez $x \leq y$ e $y < x$ (ó a la vez $x < y$ e $y \leq x$) lo que es absurdo.

Teorema 3. Cada conjunto finito *A* de $\mathbf{R}$ tiene un elemento máximo *b* y un elemento mínimo *a* (es decir, $a \leq x \leq b$ para cada $x \in A$).

Demostración. Se demuestra por inducción respecto al número *n* de elementos de *A*, siendo la propiedad evidente para $n = 1$. Sea c un elemento de *A*, $B = A - \{c\}$; B tiene $n - 1$ elementos, por lo tanto, posee un elemento mínimo a' y un elemento máximo b'. Si $a' \leq c \leq b'$, a' es el elemento mínimo y b' es el elemento máximo de *A*; si $b' \leq c$, c es el elemento máximo y a' es el elemento mínimo de *A*; si $c \leq a'$, c es el elemento mínimo y b' el elemento máximo de *A*.

Teorema 4. Si *A* es un subconjunto finito de $\mathbf{R}$ que tiene *n* elementos, existe una biyección única f del conjunto I_n de enteros *i* tales que $1 \leq i \leq n$ sobre A tal que $f(i) < f(j)$, para $i < j$ (se denomina la *ordenación natural*).

Demostración. Se demuestra por inducción sobre n, siendo el resultado evidente para $n = 1$. Sea *b* el elemento máximo de *A*

(Teorema 3) y $B = A - \{b\}$; sea g la ordenación natural de B. Toda aplicación f de I_n sobre A que tenga las propiedades antes expuestas ha de ser tal que $f(n) = b$ y, por lo tanto, $f(I_{n-1}) = B$; en consecuencia, f ha de coincidir en I_{n-1} con la ordenación natural g de B, lo que prueba que f es única; recíprocamente, definiendo f de manera que sea igual a g en I_{n-1} y tal que $f(n) = b$, se ve inmediatamente que f tiene las propiedades requeridas.

Teorema 5. Si (x_i) e (y_i) son dos sucesiones finitas de n números reales ($1 \le i \le n$) tales que $x_i \le y_i$ para cada i, entonces

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le y_1 + y_2 + \cdots + y_n .$$

Si además $x_i < y_i$ por lo menos para un índice i, entonces

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < y_1 + y_2 + \cdots + y_n .$$

Demostración. Para $n = 2$, las hipótesis implican sucesivamente según (II.5)

$$x_1 + x_2 \le y_1 + x_2 \le y_1 + y_2$$

resulta pues la primera conclusión en este caso, es decir, $x_1 + x_2 \le y_1 + y_2$; además, la relación $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ implica $x_1 + x_2 = x_1 + y_2 = y_1 + y_2$; por lo tanto, $x_2 = y_2$ y $x_1 = y_1$, de donde resulta la segunda proposición expuesta, esto es $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$. La demostración se termina por inducción respecto a n aplicando el resultado que se acaba de obtener para $n = 2$.

Teorema 6. La relación $x \le y$ es equivalente a $x + z \le y + z$; el mismo resultado es válido sustituyendo $\le$ por $<$.

Demostración. Se sabe ya en virtud de (II.5) que $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$.

Recíprocamente, $x + z \leq y + z$ implica $x + z + (-z) \leq y + z + (-z)$, es decir, $x \leq y$.

Luego, $x \leq y$ es equivalente a $x + z \leq y + z$.

Por otra parte, $x + z = y + z$ es equivalente a $x = y$.

De estos resultados surge que $x < y$ es equivalente a $x + z < y + z$.

Teorema 7. Las relaciones $x \leq y$, $0 \leq y - x$, $x - y \leq 0$, $-y \leq -x$ son equivalentes; el mismo resultado es válido sustituyendo $\leq$ por $<$.

Demostración. Esto es consecuencia inmediata del teorema 6 tomando sucesivamente $z = -x$, $z = -y$ y $z = -x - y$.

Definición. Los números reales tales que $x \geq 0$ ($x > 0$) se llaman *positivos* (respectivamente, *positivos en sentido estricto*); aquellos que son tales que $x \leq 0$ ($x < 0$) se llaman *negativos* (respectivamente, *negativos en sentido estricto*). El conjunto de los números positivos (positivos en sentido estricto) se indica por $\mathbf{R}_+$ (respectivamente, $\mathbf{R}_+^*$). Análogamente, el conjunto de los números negativos (negativos en sentido estricto) se indica por $\mathbf{R}_-$ (respectivamente, $\mathbf{R}_-^*$).

Teorema 8. Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son positivos, también lo es $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; además $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0$ salvo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Demostración. Este es un caso particular del teorema 5.

En particular, $x \geq 0$ ($x > 0$) es equivalente a $n \cdot x \geq 0$ (respectivamente $n \cdot x > 0$), para cada entero $n > 0$.

Definición. En un intervalo de origen *a* y extremo *b*, el número positivo *b* - *a* se denomina *longitud del intervalo*.

Teorema 9. Sean $J_1, J_2, \cdots, J_n$ n intervalos abiertos tales que cada dos de ellos no tienen ningún punto común y sea I un intervalo que contiene $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$; entonces, si l_k es la longitud de J_k $(1 \le k \le n)$ y l la longitud de *I*, es $l_1 + l_2 + \cdots + l_n \le l$.

Demostración. Sea $I = (a, b)$, $J_k = (c_k, d_k)$. Para cada $k \ne 1$, o es $c_k \le d_k \le c_1$ o es $d_1 \le c_k \le d_k$, pues si no $J_1 \cap J_k$ no sería vacío. Para $n = 1$ la propiedad es inmediata, pues $a \le c_1 < d_1 \le b$, por lo tanto, $-c_1 \le -a$ y $d_1 - c_1 \le b - a$.

Procédase por inducción respecto a *n*; sean $J_{i1}, J_{i2}, \cdots, J_{ip}$ los intervalos contenidos en (a, c_1); entonces, por inducción es

$$\sum_{h=1}^{p} l_{i_h} \le c_1 - a, \qquad \sum_{k=1}^{n-1-p} l_{j_k} \le b - d_1$$

y

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = l_1 + \sum_h l_{i_h} + \sum_k l_{j_k} \le$$

$$\le d_1 - c_1 + c_1 - a + b - d_1 = b - a .$$

Definición. Para cada número real *x*, se define $|x|$ como igual a x si $x \ge 0$, y a $-x$ si $x \le 0$; por lo tanto, $|-x| = |x|$; $|x|$ se llama *valor absoluto de x*; $|x| = 0$ es equivalente a $x = 0$. Se escribe $x^+ = (x + |x|)/2$ (*parte positiva de x*), $x^- = (|x| - x)/2$ (*parte negativa de x*) de manera que $x^+ = x$ si $x \ge 0$, $x^+ = 0$ si $x \le 0$; $x^- = 0$ si $x \ge 0$, $x^- = -x$ si $x \le 0$ y $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.

Teorema 10. Si $a > 0$, la relación $|x| \le a$ es equivalente a $-a \le x \le a$; la relación $|x| < a$ a $-a < x < a$.

Demostración. Por hipótesis, $a > 0$. Entonces, si $x \geq 0$, la relación $x > -a$ se satisface siempre y resulta que $|x| \leq a$ ($|x| < a$) es equivalente a $x \leq a$ (respectivamente, $x < a$); y si $x \leq 0$, la relación $x < a$ se satisface siempre y resulta que $|x| \leq a$ ($|x| < a$) es equivalente a $-x \leq a$ (respectivamente, $-x < a$). Por lo tanto, $|x| \leq a$ (respectivamente, $|x| < a$) es equivalente a $-a \leq x \leq a$ (respectivamente, $-a < x < a$), siempre que $a > 0$.

Teorema 11. Para cada par de números reales x e y, $|x+y| \leq |x|+|y|$, $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$.

Demostración. La primera relación es evidente por definición y como consecuencia del teorema 8 cuando x e y son ambos positivos o ambos negativos. Si, por ejemplo, $x \leq 0 \leq y$, entonces $x + y \leq y \leq y + |x| = |y| + |x|$ y $x + y \geq x \geq x - |y| = -|x| - |y|$. Luego, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

La segunda relación surge de la primera desigualdad, puesto que $|x| = |y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|$ y $|y| = |x + (y-x)| \leq |x| + |y-x|$. Por consiguiente, $-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$. Luego, $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Por inducción, resulta del teorema 11 que

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Teorema 12. Si $z \geq 0$, la relación $x \leq y$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Demostración. Pues en virtud del teorema 7, $x \leq y$ implica $0 \leq y - x$. Por lo tanto, $0 \leq z \cdot (y - x) = z \cdot y - z \cdot x$ según (II.6), de donde, $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Teorema 13. Las relaciones $x \leq 0$ e $y \geq 0$ implican $x \cdot y \leq 0$; las relaciones $x \leq 0$ e $y \leq 0$ implican $x \cdot y \geq 0$. Se obtienen los mismos resultados si se sustituye $\leq$ por $<$. En particular, $x^2 \geq 0$ para todo número real y $x^2 > 0$ salvo para $x = 0$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de (II.6) y de $(-x)\cdot y = -(x \cdot y)$.

La segunda afirmación es consecuencia también de (II.6) y de $(-x)\cdot(-y) = x \cdot y$.

Por otra parte, como $x \cdot y = 0$ implica $x = 0$ ó $y = 0$, se obtienen, entonces, los mismos resultados si se sustituye $\leq$ por $<$.

La última afirmación particular surge como consecuencia inmediata de los resultados anteriores.

Observaciones

1. El teorema 13 implica que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para cada par de números reales x, y.

2. Del teorema 13 y de (I.7) se sigue que $1 = 1^2 > 0$, por lo tanto, en virtud del teorema 8, el número real $n \cdot 1$ (*n* veces 1 como sumando) es > 0 para $n > 0$; esto demuestra que la aplicación $n \to n \cdot 1$ de los enteros naturales en $\mathbf{R}$ es inyectiva y conserva las relaciones de orden, la adición y la multiplicación; por lo tanto, los enteros naturales se han *identificado* con un subconjunto de números reales por medio de esta aplicación.

Teorema 14. Si $x > 0$ entonces $x^{-1} > 0$. Para $z > 0$, la relación $x \leq y$ es equivalente a $x \cdot z \leq y \cdot z$. La relación $0 < x < y$ es equivalente a $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia del hecho que $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$; por lo tanto, $x^{-1} > 0$ en virtud del teorema 13.

La segunda es consecuencia de la primera y del teorema 12, puesto que $x = (x \cdot z) \cdot z^{-1}$, de donde, $x \leq y$ es equivalente a $(x \cdot z) \cdot z^{-1} \cdot z \leq y \cdot z$ que es equivalente a $x \cdot z \leq y \cdot z$.

La tercera es una consecuencia obvia de la segunda.

Definición. Los números reales de la forma $\pm r/s$, donde r y s son enteros naturales, $s \neq 0$, se denominan *números racionales*. Aquellos para los que $s = 1$, se denominan *enteros* (*positivos o negativos*) y el conjunto de todos los enteros se designa por $\mathbf{Z}$.

Teorema 15. Probar que entre dos números reales distintos cualesquiera *a* y *b* existe un número racional q.

Demostración. Sea $x = b - a > 0$; en virtud de (III) existe un entero $n > 0$ tal que $n > \frac{1}{x}$; por lo tanto, $\frac{1}{n} < x$ en virtud del teorema 14. Se puede suponer $b > 0$ (pues si no lo fuera, se consideraría el intervalo $(-b, -a)$ con $-a > 0$). En virtud de (III), existe un entero $k > 0$ tal que $b \leq \frac{k}{n}$; sea *h* el menor entero tal que $b \leq \frac{h}{n}$. Entonces, $\frac{h-1}{n} < b$; $\frac{(h-1)}{n}$ es mayor que *a*, pues si no lo fuera se tendría $\frac{h-1}{n} \leq a < b \leq \frac{h}{n}$, de donde, (por los teoremas 6 y 7) $b - a \leq \frac{h}{n} - \frac{h-1}{n} = \frac{1}{n}$; esto es, $b - a = x \leq \frac{1}{n}$, lo que contradice que $n > \frac{1}{x}$. Luego, existe un número racional $q = \frac{h-1}{n}$ tal que $a < q < b$.

2.4. Extremo superior y extremo inferior.

Definición. Un número *b* se dice que es una *cota superior* (*cota inferior*) de un subconjunto no vacío *X* de números reales si $x \leq b$ (respectivamente $x \geq b$) para cada $x \in X$. Decimos una cota superior debido a que todo número mayor que *b* (respectivamente, menor que *b*) también es una cota superior (respectivamente, una cota inferior).

Definición. Un subconjunto no vacío *X* de $\mathbf{R}$ se dice que está *acotado superiormente* (respectivamente, *acotado* *inferiormente*) si el conjunto de cotas superiores (respectivamente, cotas inferiores) de X es no vacío.

Observación

Si X está acotado superiormente, entonces $-X$ (conjunto de $-x$, donde $x \in X$) está acotado inferiormente, y para cada cota superior b de X, $-b$ es cota inferior de $-X$, y viceversa, pues si b es cota superior de X, entonces $x \leq b$ para cada $x \in X$, de donde, $-x \geq -b$ para cada $-x \in -X$, con $x \in X$, es decir, $-b$ es cota inferior de $-X$. (La recíproca es similar).

Definición. Un conjunto que está a la vez acotado superiormente y acotado inferiormente, se dice que está *acotado*. Un conjunto sin cota se dice que *no es acotado*.

Pasaremos ahora a demostrar algunas propiedades que involucran los conceptos de extremo superior y extremo inferior.

Teorema 1. La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío X de $\mathbf{R}$ esté acotado es que exista un entero n tal que $|x| \leq n$ para cada $x \in X$.

Demostración. Por hipótesis, X está acotado. Sea, entonces, a una cota inferior de $X \subset \mathbf{R}$ y b una cota superior de $X \subset \mathbf{R}$. Luego, por (III), existen $p,\ q \in \mathbf{N}$ tales que $-p < a$ y $b < q$. Así, como $x \leq b$ y $a \leq x$ para cada $x \in X$, se tiene que $-q - p < -p < a \leq x \leq b < q < q + p$, de donde, $-(p+q) < x < p + q$.

Tómese $n = p + q$. Entonces, $|x| \leq n$ para cada $x \in X$.

El recíproco es evidente. En efecto, si $|x| \leq n$ para cada $x \in X$, entonces $-n \leq x \leq n$ para cada $x \in X$; esto es, X está acotado superiormente por n e inferiormente por $-n$ y, por lo tanto, X está acotado.

Definición. Si una cota superior b de X es, además, un elemento de X, entonces b se llama *elemento máximo de X*. Si existe tal elemento, se escribe

$$b = \text{máx } X$$

La definición del término *elemento mínimo de X* puede formularse de manera parecida (el lector debería hacerlo como ejercicio). Si X tiene un elemento mínimo, se lo designa por mín X.

Observación

Nótese que un conjunto tiene, a lo sumo, un elemento máximo y un elemento mínimo (la demostración se deja a cargo del lector).

Los ejemplos que siguen ilustran el significado de las denominaciones anteriores.

Ejemplos

1) Sea X el conjunto de todos los números reales positivos en sentido estricto. Es un conjunto no acotado superiormente: no tiene cotas superiores ni elemento máximo. Está acotado inferiormente por 0, pero no posee elemento mínimo.

2) Sea X el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$. Este conjunto está acotado superiormente por 1 e inferiormente por 0. De hecho, máx $X = 1$ y mín $X = 0$.

3) Sea Y el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x < 1$. Es parecido al ejemplo 2 salvo que el punto 1 no está incluido. Este conjunto está acotado superiormente por 1, pero no tiene elemento máximo. Su elemento mínimo es 0.

Algunos conjuntos parecidos al del ejemplo 3, están acotados superiormente pero no tienen elemento máximo. Para ellos existe un concepto que sustituye al de elemento máximo. Este se llama *extremo superior* (*supremo*) del conjunto y se define como sigue.

Definición. Se llama *supremo o extremo superior* (*ínfimo o extremo inferior*) *de* $X \subset \mathbf{R}$, X no vacío, a la menor de las cotas superiores (respectivamente, la mayor de las cotas inferiores). Esto es, $s = \sup X$ si verifica las siguientes condiciones:

s_1) $x \leq s$ para todo $x \in X$

s_2) Si $x \leq b$ para todo $x \in X$ entonces $s \leq b$.

(Respectivamente, $i = \inf X$ si verifica las siguientes condiciones:

i_1) $i \leq x$ para todo $x \in X$

i_2) Si $b \leq x$ para todo $x \in X$ entonces $b \leq i$)

Si X tiene elemento máximo, éste es también supremo de X. Pero si X no posee elemento máximo, puede tener supremo. En el ejemplo 3 precedente, el número 1 es supremo para Y si bien este conjunto no tiene elemento máximo (ver la figura 1 en la que se han representado las cotas superiores, elemento máximo y supremo de los conjuntos dados en los ejemplos 2 y 3)

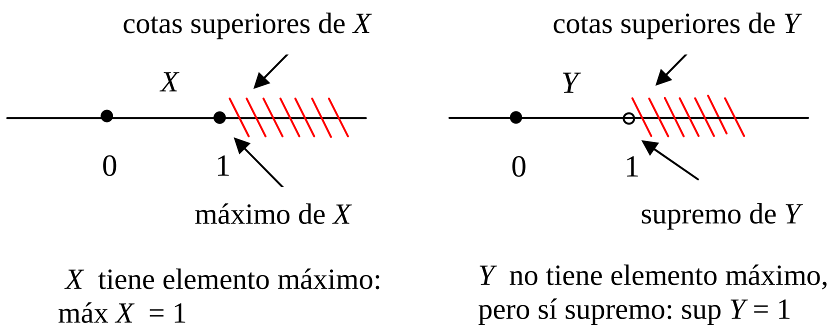


Figura 1. Cotas superiores, elemento máximo y supremo.

Teorema 2. Dos números distintos no pueden ser supremos para el mismo conjunto.

Demostración. Sean b y c dos supremos para un conjunto X. La propiedad s_2) implica que $c \geq b$ puesto que b es supremo; análogamente, $b \geq c$ ya que c es supremo. Luego, se tiene $b = c$.

Este teorema expresa que si existe supremo para un conjunto X, hay solamente uno y puede decirse el supremo.

En forma análoga se formula un teorema para ínfimo de un conjunto. El lector debería hacerlo como ejercicio.

Teorema 3. $\mathbf{R}$ posee la propiedad del supremo; esto es, todo subconjunto no vacío X de $\mathbf{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Esta importante propiedad de los números reales puede demostrarse a partir de los axiomas (I) a (IV) (ver Dieudonné [5]).

Teorema 4. $\mathbf{R}$ posee la propiedad del ínfimo; esto es, todo subconjunto no vacío X de $\mathbf{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo.

Demostración. Aplíquese el teorema 3 al conjunto - X. Los detalles se dejan como ejercicio.

Se insiste una vez más que el supremo (ínfimo) de X no pertenece necesariamente a X. En realidad $\sup X$ $(\inf X)$ pertenece a X si y sólo si posee elemento máximo (mínimo), en cuyo caso $\text{máx}\, X = \sup X$ $(\text{mín}\, X = \inf X)$.

Considérense una vez más los ejemplos dados anteriormente. En el ejemplo 1, el conjunto de todos los números reales positivos en sentido estricto tiene el 0 como ínfimo. Ese conjunto no tiene elemento mínimo. En los ejemplos 2 y 3, el 0 es elemento mínimo (que coincide con el ínfimo).

Observación

Una propiedad importante del sistema de números reales que es consecuencia de la propiedad del supremo (teorema 3) y de la propiedad arquimedeana (III), es la siguiente:

El conjunto $\mathbf{N}$ de los enteros positivos $1, 2, 3, \cdots$ no está acotado superiormente en $\mathbf{R}$.

Demostración. Supóngase $\mathbf{N}$ acotado superiormente. Se demuestra que esto conduce a una contradicción. Puesto que $\mathbf{N}$ es no vacío, por la propiedad del supremo, $\mathbf{N}$ tiene supremo; sea éste x, es decir, $x = \sup \mathbf{N}$. Como el número $x - 1 < x$, entonces $x - 1$ no puede ser cota superior de $\mathbf{N}$ (pues x es la menor de todas las cotas superiores). Luego, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $x-1<n$, de donde, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $x<n+1$. Puesto que $n+1 \in \mathbf{N}$, esto contradice el hecho que x sea una cota superior para $\mathbf{N}$. Luego, $\mathbf{N}$ no es un conjunto acotado superiormente en $\mathbf{R}$.

Teorema 5. El supremo de un conjunto no vacío $X \subset \mathbf{R}$ acotado superiormente es el número real γ caracterizado por las siguientes propiedades:

$s_1')$ $x \leq \gamma$ para todo $x \in X$

$s_2')$ para todo $n \in \mathbf{N}$ existe $x \in X$ tal que $\gamma - \dfrac{1}{n} < x \leq \gamma$.

(s_2') suele enunciarse en forma más general como sigue:

para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\gamma - \varepsilon < x \leq \gamma$)

Demostración. Sea $\gamma = \sup X$. Probemos s_1') y s_2').

Por $s_1)$ $x \leq \gamma$ para todo $x \in X$, de donde, se verifica s_1').

Supóngase que existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para cada $x \in X$, $x \leq \gamma - \dfrac{1}{n_0}$. Entonces, $\gamma - \dfrac{1}{n_0}$ es una cota superior de X y $\gamma - \dfrac{1}{n_0} < \gamma$. Absurdo!, pues γ es el supremo de X y se estaría contradiciendo $s_2)$. Por lo tanto, también se verifica s_2').

Recíprocamente, supóngase ahora que s_1') y s_2') son ciertas y pruébese que $\gamma = \sup X$. Evidentemente, s_1') implica $s_1)$. Sólo resta probar que γ es la menor de las cotas superiores; es decir que se verifica $s_2)$.

Sea μ una cota superior de X y supóngase que $\mu < \gamma$. Entonces, $\gamma - \mu > 0$, de donde, por la propiedad arquimedeana, existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $1 < n_0 (\gamma - \mu)$, esto es, $\dfrac{1}{n_0} < \gamma - \mu$, de donde, $\mu < \gamma - \dfrac{1}{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbf{N}$. Como μ es cota superior de *X*, entonces $x \leq \mu < \gamma - \dfrac{1}{n_0}$ para todo $x \in X$ y algún $n_0 \in \mathbf{N}$ en contradicción con $s_2^{'}$). Luego, γ es la menor de las cotas superiores; esto es, se verifica $s_2)$.

Teorema 6. El ínfimo de un conjunto no vacío $X \subset \mathbf{R}$ acotado inferiormente es el número real γ caracterizado por las siguientes propiedades:

$i_1^{'}$) $\gamma \leq x$ para todo $x \in X$

$i_2^{'}$) para todo $n \in \mathbf{N}$ existe $x \in X$ tal que $\gamma < x \leq \gamma + \dfrac{1}{n}$.

($i_2^{'}$) suele enunciarse en forma más general como sigue:

para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\gamma < x \leq \gamma + \varepsilon$)

Demostración. Sea $\gamma = \inf X$. Probemos $i_1^{'}$) e $i_2^{'}$). Evidentemente, i_1) implica $i_1^{'}$).

Supóngase que existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para cada $x \in X$, $x \geq \gamma + \dfrac{1}{n_0}$. Entonces, $\gamma + \dfrac{1}{n_0}$ es una cota inferior de X y $\gamma < \gamma + \dfrac{1}{n_0}$. Absurdo!, pues γ es el ínfimo de X y se estaría contradiciendo a i_2). Por lo tanto, también se verifica $i_2^{'}$).

Recíprocamente, supóngase ahora que $i_1^{'}$) e $i_2^{'}$) son ciertas y pruébese que $\gamma = \inf X$. Evidentemente, $i_1^{'}$) implica i_1). Sólo resta probar que γ es la mayor de las cotas inferiores; es decir que verifica i_2).

Sea μ una cota inferior de X y supóngase que $\gamma < \mu$. Entonces $\mu - \gamma > 0$, de donde, por la propiedad arquimedeana existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $1 < n_0(\mu - \gamma)$; esto es, $\frac{1}{n_0} < \mu - \gamma$, de donde, $\frac{1}{n_0} + \gamma < \mu$ para algún $n_0 \in \mathbf{N}$. Como μ es cota inferior de *X*, entonces $\frac{1}{n_0} + \gamma < \mu \leq x$ para todo $x \in X$ y algún $n_0 \in \mathbf{N}$ en contradicción con $i_2^{'})$. Luego, γ es la mayor de las cotas inferiores; esto es, se verifica $i_2)$.

Teorema 7. Si $A \subset \mathbf{R}$ está acotado superiormente y $B \subseteq A$, *B* está acotado superiormente, y

$$\sup B \leq \sup A .$$

Demostración. Esto es consecuencia de las definiciones. Los detalles se dejan como ejercicio.

Teorema 8. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos de $\mathbf{R}$, no vacíos y acotados superiormente. Sea $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ y sea *B* el conjunto de elementos $\sup A_\lambda$. La condición necesaria y suficiente para que *A* esté acotado superiormente es que lo esté *B*, y entonces

$$\sup A = \sup B .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición es que toda cota superior de *A* es una cota superior de *B*, y recíprocamente, de donde, resulta la propiedad enunciada. Los detalles se dejan como ejercicio.

Definición. Sea *f* una aplicación de un conjunto *A* en el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales. Se dice que *f* está *acotada superiormente* (*acotada inferiormente*) en *A* si el subconjunto $f(A)$ de $\mathbf{R}$ está acotado superiormente (acotado inferiormente); se escribe $\sup f(A) = \sup_{x \in A} \{f(x)\}$, $\inf f(A) = \inf_{x \in A} \{f(x)\}$ cuando estos números (supremo e ínfimo de f en *A*) están definidos.

Teorema 9. Si f está acotada superiormente, entonces $-f$ (es decir, la aplicación $x \to -f(x)$), está acotada inferiormente, e

$$\inf_{x\in A} \{(-f(x))\} = -\sup_{x\in A} \{f(x)\}.$$

Demostración. Se deja como ejercicio.

Teorema 10. Sea f una aplicación de $A_1 \times A_2$ en $\mathbf{R}$; si f está acotada superiormente

$$\sup_{(x_1,x_2)\in A_1\times A_2} \{ f(x_1, x_2)\} = \sup_{x_1\in A_1} \left\{ \sup_{x_2\in A_2} \{f(x_1, x_2)\}\right\}$$

Demostración. Puesto que se puede expresar $f(A_1 \times A_2)$ como reunión de los conjuntos $f(\{x_1\} \times A_2)$, donde x_1 recorre el conjunto A_1, y se aplica el teorema 6. Los detalles se dejan como ejercicio.

Teorema 11. Sean *f*, *g* dos aplicaciones de *A* en $\mathbf{R}$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in A$; entonces si g está acotada superiormente también lo está *f*, y

$$\sup_{x\in A} \{f(x)\} \leq \sup_{x\in A} \{g(x)\}.$$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de las definiciones. Los detalles se dejan como ejercicio.

Teorema 12. Sean *f*, *g* dos aplicaciones de *A* en $\mathbf{R}$; si *f* y *g* están ambas acotadas superiormente, también lo está $f+g$ (es decir, la aplicación $x \to f(x) + g(x)$), y

$$\sup_{x\in A} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x\in A} \{f(x)\} + \sup_{x\in A} \{g(x)\}.$$

Si además *g* está acotada inferiormente, entonces

$$\sup_{x\in A} \{f(x)\} + \inf_{x\in A} \{g(x)\} \leq \sup_{x\in A} \{f(x) + g(x)\}.$$

Demostración. En efecto, sea $a = \sup\limits_{x\in A}\{f(x)\}$, $b = \sup\limits_{x\in A}\{g(x)\}$; entonces, $f(x) \le a$ y $g(x) \le b$ para cada $x \in A$; por lo tanto, $f(x) + g(x) \le a + b$ para cada $x \in A$, y se sigue la primera desigualdad.

Sea $c = \inf\limits_{x\in A}\{g(x)\}$; entonces para cada $x \in A$, $f(x) + c \le f(x) + g(x) \le d = \sup\limits_{x\in A}\{f(x) + g(x)\}$. Pero de aquí resulta $f(x) \le d - c$ para cada $x \in A$; por lo tanto, $a \le d - c$, esto es, $a + c \le d$, que es la segunda desigualdad.

Teorema 13. Sea f una aplicación acotada superiormente de A en $\mathbf{R}$; entonces para cada número real c

$$\sup_{x\in A}\{f(x) + c\} = c + \sup_{x\in A}\{f(x)\}.$$

Demostración. Tómese para g la función constante igual a c en el teorema 12. Los detalles se dejan como ejercicio.

Teorema 14. Sean f_1 y f_2 dos aplicaciones acotadas superiormente de A_1 y A_2 en $\mathbf{R}$, respectivamente. Entonces, $(x_1, x_2) \to f_1(x_1) + f_2(x_2)$ está acotada superiormente, y

$$\sup_{(x_1,x_2)\in A_1\times A_2}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\} = \sup_{x_1\in A_1}\{f_1(x_1)\} + \sup_{x_2\in A_2}\{f_2(x_2)\}.$$

Demostración. Aplíquense los teoremas 10 y 13. Los detalles se dejan como ejercicio.

Se pueden formular las propiedades análogas para ínfimo. El lector debería hacerlo como ejercicio.

2.5. Ejercicios propuestos.

1. Probar que el axioma de Arquímedes (o propiedad arquimedeana) es equivalente a la siguiente propiedad:

   Para cada $x \in \mathbf{R}$ existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > x$.

2. Si tres números reales a, x e y satisfacen las desigualdades:

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$, probar que $x = a$.

3. Si $|a| \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, probar que $a = 0$.

4. Sean a y b números reales tales que satisfacen la desigualdad

$$a \leq b + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Probar que $a \leq b$.

Deducir que si $a + b \leq c + 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a + b \leq c$.

5. Probar que cada intervalo abierto en $\mathbf{R}$ contiene un conjunto infinito de números racionales.

6. Probar que todo conjunto no vacío $X \subset \mathbf{R}$ acotado tiene un supremo y un ínfimo, y que se verifica que

$$\text{ínf } X \leq \sup X$$

7. Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbf{R}$, sea C el conjunto

$$C = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si A y B tienen supremo, entonces C tiene supremo, y

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

b) Si A y B tienen ínfimo, entonces C tiene ínfimo, e

$$\text{ínf } C = \text{ínf } A + \text{ínf } B$$

8. Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de $\mathbf{R}$ tales que $s \leq t$ para todo s de S y todo $t \in T$, probar que S tiene supremo y T ínfimo, y que se verifica que

$$\sup S \leq \text{ínf } T$$

9. Si $A \subset \mathbf{R}$ está acotado superiormente y $B \subseteq A$, probar que B está acotado superiormente, y que

$$\sup B \leq \sup A$$

10. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos de $\mathbf{R}$, no vacíos y acotados superiormente. Sea $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ y sea B el conjunto de elementos $\sup A_\lambda$. Probar que la condición necesaria y suficiente para que A esté acotado superiormente es que lo esté B, y entonces $\sup A = \sup B$.

11. Sea f una aplicación de un conjunto A en el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales. Si f está acotada superiormente, probar que $-f$ (es decir, la aplicación $x \to -f(x)$) está acotada inferiormente, y que

$$\inf_{x \in A} \{(-f(x))\} = -\sup_{x \in A} \{f(x)\}$$

12. Sea f una aplicación de $A_1 \times A_2$ en $\mathbf{R}$. Si f está acotada superiormente, probar que

$$\sup_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2} \{f(x_1, x_2)\} = \sup_{x_1 \in A_1} \left\{ \sup_{x_2 \in A_2} \{f(x_1, x_2)\} \right\}$$

13. Sean f, g dos aplicaciones de A en $\mathbf{R}$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in A$. Si g está acotada superiormente, probar que también lo está f, y que

$$\sup_{x \in A} \{f(x)\} \leq \sup_{x \in A} \{g(x)\}$$

14. Sea f una aplicación de A en $\mathbf{R}$ acotada superiormente. Probar que para cada número real c

$$\sup_{x\in A}\{f(x)+c\}=c+\sup_{x\in A}\{f(x)\}$$

15. Sean f_1 y f_2 dos aplicaciones acotadas superiormente de A_1 y A_2 en $\mathbf{R}$, respectivamente. Probar que la aplicación $(x_1,x_2)\longrightarrow f_1(x_1)+f_2(x_2)$ está acotada superiormente, y que

$$\sup_{(x_1,x_2)\in A_1\times A_2}\{f_1(x_1)+f_2(x_2)\}=\sup_{x_1\in A_1}\{f_1(x_1)\}+\sup_{x_2\in A_2}\{f_2(x_2)\}$$

3

Capítulo III

Sucesiones de números reales.

3.1. Sucesiones de números reales.

Definición. Una *sucesión de números reales* (o *de puntos de* $\mathbf{R}$) es una función x que a cada número natural $n \in \mathbf{N}$ asigna un número real (o un punto de $\mathbf{R}$) $x(n)$. La sucesión se denota por $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_n)$.

La imagen x_n ó $x(n)$ de $n \in \mathbf{N}$ se llama *n-ésimo término de la sucesión*. Una función de este tipo, es decir, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $1, 2, 3, \cdots$ se llama *sucesión infinita*, y si el rango es el conjunto de los números reales se le agrega a la denominación anterior *de números reales*.

Un ejemplo de una sucesión (x_n) de números reales viene dado por la regla de correspondencia $x_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Esta sucesión también puede describirse escribiendo cierto número de sus primeros términos en orden: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots$.

Se ha visto que cada término de la sucesión tiene asignado un número natural de manera que se puede hablar del primer término x_1, del segundo término x_2 y, en general, del término n-ésimo x_n. Cada término x_n tiene asignado un siguiente x_{n+1} y, por lo tanto, no hay un "último" término.

Según la definición, una sucesión de números reales es una función $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ tal que $n \to x_n$. Esta función puede no ser inyectiva, es decir, puede haber $n_1 \neq n_2$ con $x_{n_1} = x_{n_2}$; más aún, la sucesión puede ser constante: $x_n = a$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por ello, hay que distinguir entre la sucesión (x_n) y el *conjunto de términos de la sucesión* (ó *dominio de valores de la sucesión* ó *conjunto de puntos imágenes de la sucesión*) que se denota $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Si bien siempre la sucesión (x_n) tiene una infinidad de términos, el conjunto de términos de la sucesión, $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, puede ser finito.

Ejemplo

El dominio de valores o conjunto de términos de las sucesiones:

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \cdots\right);$$

$$(1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, \cdots); \ \ (2, 4, 6, 8, 10, \cdots)$$

es, respectivamente

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \cdots\right\}; \quad \{-1, 0, 1\};$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$$

3.2. Sucesión acotada.

Definición. Se dice que una sucesión (x_n) es *acotada* si su dominio de valores $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ es un conjunto acotado (es decir, si tiene cota superior e inferior).

De las tres sucesiones dadas en el ejemplo anterior, solamente la tercera no es acotada.

3.3. Sucesión creciente y decreciente.

Definición. Se dice que una sucesión (x_n) es *creciente* si $x_n \leq x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Si $x_n < x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbf{N}$, se dice entonces, que la sucesión (x_n) es *estrictamente creciente*. Del mismo modo, se dice que (x_n) es de*creciente* si $x_n \geq x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbf{N}$ y *estrictamente decreciente* si $x_n > x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbf{N}$.

Una sucesión se llama *monótona* cuando es creciente o decreciente.

3.4. Subsucesión.

Definición. La sucesión $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ se llama *subsucesión* de la sucesión (x_n) si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbf{N}$. En tal caso, la sucesión (y_k) se suele escribir $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ o simplemente (x_{n_k}). Esto es, se considera la siguiente composición de funciones:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{N} & \xrightarrow{n} & \mathbf{N} & \xrightarrow{x} & \mathbf{R} \\ k & \rightarrow & n_k & \rightarrow & x_{n_k} \end{array}$$

$$x \circ n = (x_{n_k}) \underset{notación}{=} (y_k)$$

Ejemplo

Sean $x_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbf{N}$, $n_k = 2k$ para todo $k \in \mathbf{N}$. Entonces, $x_{n_k} = x(n_k) = x(2k) = \dfrac{1}{2k}$ para todo $k \in \mathbf{N}$. Luego, $(x_{n_k}) = \left(\dfrac{1}{2k}\right)$, es decir que es la subsucesión que consiste en todos los términos pares de la sucesión $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3.5. Convergencia de sucesiones.

La cuestión que se quiere considerar ahora es decidir si los términos x_n tienden o no a un límite finito cuando n crece indefinidamente. Para ello se precisa extender el concepto de límite a las sucesiones, lo que se logra con la definición siguiente.

Definición. Sea (x_n) una sucesión de números reales. Se dice que (x_n) *converge o tiende hacia el número* $x \in \mathbf{R}$, o sea, x es el límite de (x_n), si para cada número real estrictamente positivo ε se puede elegir un número natural n_0 (que, en general, depende de ε) tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo entero positivo n que satisfaga la condición $n > n_0$.

Se expresa que x es el límite de la sucesión (x_n) por: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ó $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$.

Se dice que una sucesión (x_n) es *convergente* o que *converge* si existe un punto $x \in \mathbf{R}$ hacia el cual converge. Una sucesión que no converge se dice que *diverge*.

Obsérvese que $|x_n - x| < \varepsilon$ significa que $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ o, equivalentemente, que x_n pertenece al intervalo abierto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ que contiene a x. Además, puesto que todos los términos que siguen al n_0-ésimo pertenecen al intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, solamente los que anteceden a x_{n_0} (incluido éste), y sólo hay un número finito de ellos, se encuentran fuera del intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Entonces, se puede reformular la definición anterior como sigue.

Definición. La sucesión (x_n) *converge* a x si todo conjunto abierto que contiene a x contiene casi todos (esto es, todos excepto un número finito) los términos de la sucesión.

Ejemplos

1) Una sucesión constante $(x_0, x_0, x_0, \cdots)$, como $(1, 1, 1, \cdots)$ o $(-3, -3, -3, \cdots)$, converge a x_0, porque todo abierto que contiene a x_0 contiene, además, a todos los términos de la sucesión.

2) La sucesión $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)$ converge a 0, porque todo abierto que contiene a 0 contiene casi todos los términos de la sucesión. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Se debe probar que existe un número $n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ siempre que $n > n_0$. Si se toma $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $n_0 > 1/\varepsilon$, entonces $n > n_0$ implica $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Así, pues, se ha probado que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3.6. Sucesión de Cauchy.

Definición. Se dice que una sucesión (x_n) es de *Cauchy* si para cada número real estrictamente positivo ε se puede elegir un número natural n_0 (que, en general, depende de ε) tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y todo $m \in \mathbf{N}$ que satisfagan la condición $n > n_0$ y $m > n_0$.

Ejemplo

La sucesión $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ es de Cauchy. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera y supongamos que $m > n$. Entonces,

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| < \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{2}{n}.$$

De aquí se tiene que cualesquiera sean m y n con $m > n$, $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{2}{n}$.

Pero para $\varepsilon > 0$ dado (por propiedad arquimedeana), se puede elegir un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Luego, si $n > n_0$ y $m > n_0$ se tiene $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$.

3.7. Propiedades fundamentales.

A continuación se enuncian ciertos teoremas sobre sucesiones de números reales (cuyas demostraciones han sido analizadas en el curso de Análisis I), algunos de los cuales son generalizados en el curso relativo a la Topología Métrica.

Teoremas

1. Si la sucesión (x_n) converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ es único.
2. Una sucesión (x_n) monótona converge si y sólo si es acotada.

   Si (x_n) es creciente (decreciente), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\}$ $(\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\})$.
3. Si (x_n) es una sucesión de números reales convergente, entonces cualquier subsucesión de la sucesión (x_n) converge al mismo punto.
4. Si las sucesiones (x_n), (y_n) convergen y $x_n \le y_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
5. Si para todo $n \in \mathbf{N}$, $x_n \le y_n \le z_n$ y si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, entonces (y_n) converge y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
6. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
7. Si (x_n) es una sucesión convergente tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ $x_n \le b$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le b$.
8. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, entonces

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = x - y$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{x}{y}$, si $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$ e $y \neq 0$

9. Si el dominio de valores de una sucesión (x_n) es un conjunto finito, entonces la sucesión contiene una subsucesión convergente.

10. Sea A un conjunto infinito y acotado de números reales. Entonces, A tiene al menos un punto de acumulación.

    Nota

    Sea A un subconjunto de $\mathbf{R}$, es decir, un conjunto de números reales. Un punto $p \in \mathbf{R}$ es un punto de acumulación de A, si todo intervalo abierto que contenga a p contiene infinitos puntos del conjunto A o, equivalentemente, si todo intervalo abierto que contenga a p contiene un punto de A diferente de p.

11. Toda sucesión acotada (x_n) contiene una subsucesión convergente.

12. Toda sucesión de Cauchy (x_n) es acotada.

13. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Si una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) converge a un punto x, entonces la sucesión de Cauchy original converge también a x.

14. Una sucesión (x_n) converge a un número real si y sólo si es de Cauchy.

3.8. Ejercicios propuestos.

1. Escribir los seis primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones de números reales:

a) $x_n = x(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n^2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

b) $y_n = y(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ y(n-1) + y(n-2) & \text{si } n > 2 \end{cases}$

2. Sea la sucesión de números reales $a_n = \left((-1)^{n-1}(2n-1)\right)$:

$$(1, -3, 5, -7, 9, -11, -15, \cdots)$$

Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es o no una subsucesión de (a_n):

a) $(b_n) = (1, 5, -3, -7, 9, 13, -11, -15, \cdots)$

b) $(c_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots)$

c) $(d_n) = (-3, -7, -11, -15, -19, -21, \cdots)$

3. Determinar el dominio de valores de las siguientes sucesiones:

a) $\left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \cdots\right)$

b) $(2, 1, 0, 2, 1, 0, \cdots)$

c) $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots)$

4. Si la sucesión (x_n) de números reales converge, probar que entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ es único.

5. Si (x_n) es una sucesión de números reales convergente, probar que cualquier subsucesión de la sucesión (x_n) converge al mismo punto.

6. Probar que $\left(\dfrac{1}{n+p}\right)$, donde p es algún entero positivo, puede considerarse como una subsucesión de $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Usando el ejercicio 5, deducir que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+p} = 0$.

7. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ si $0 < |r| < 1$.

8. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen\ n}{n} = 0$.

9. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

10. Si el dominio de valores de una sucesión (x_n) de números reales es un conjunto finito, probar que la sucesión contiene una subsucesión convergente.

11. Sea A un conjunto infinito y acotado de números reales. Probar que A tiene al menos un punto de acumulación.

12. Probar que toda sucesión acotada (x_n) de números reales contiene una subsucesión convergente.

13. Probar que toda sucesión de Cauchy (x_n) de números reales es acotada.

14. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy de números reales. Si una subsucesión (x_{nk}) de (x_n) converge a un punto de *x*,

probar que la sucesión de Cauchy original converge también a x.

15. Probar que una sucesión (x_n) de números reales converge a un número real si y sólo si (x_n) es una sucesión de Cauchy.

16. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy de números enteros, es decir, cada término de la sucesión pertenece al conjunto $\mathbf{Z} = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$. Probar que la sucesión ha de ser de la forma $(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, x, x, x, \cdots)$, es decir, la sucesión es constante a partir de algún n_0-ésimo término.

4

Capítulo IV

Funciones continuas.

4.1. Continuidad.

Para una función definida sobre un intervalo, la idea intuitiva de continuidad es que la curva que representa la gráfica de la función debe constituir un trazo ininterrumpido. Si la gráfica de una función tiene interrupciones o saltos, entonces la función no es continua en los puntos en donde las rupturas aparecen. Ahora bien, si la gráfica de una función no tiene interrupción alguna en el punto $(x_0\ ,\ f(x_0))$ (ver figura 1), entonces cuando *x* tiende a aproximarse a x_0, $f(x)$ debe aproximarse a $f(x_0)$.

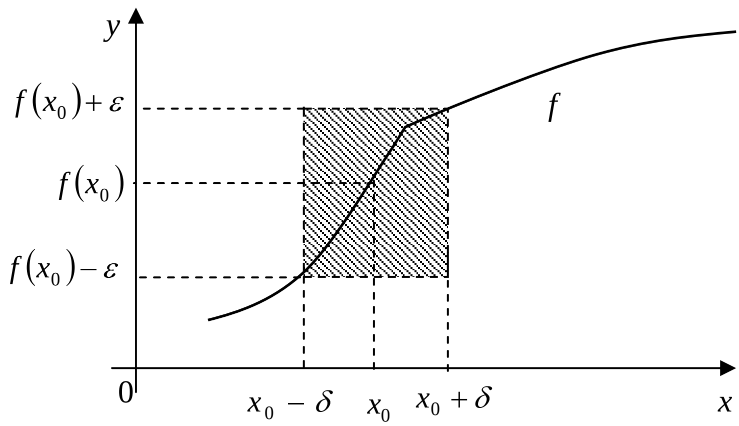


Figura 1

Esto conduce a la siguiente definición de continuidad.

Definición. Una función $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ es continua en el punto $x_0 \in \mathbf{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que para todo $x \in \mathbf{R}$

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La función f es continua en $\mathbf{R}$ si es continua en todos los puntos de $\mathbf{R}$.

Una función $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ es continua en un subconjunto *D* de $\mathbf{R}$ si es continua en todos los puntos de *D*.

Observación

Nótese que $|x-x_0|<\delta$ significa que $x_0-\delta< x< x_0+\delta$ o, equivalentemente, que x pertenece al intervalo abierto $(x_0-\delta\,,\,x_0+\delta)$. Análogamente, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ significa que $f(x)$ pertenece al intervalo abierto $(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$. Por consiguiente, la proposición

$$|x-x_0|<\delta \quad \text{implica} \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

es equivalente a la proposición

$$x\in(x_0-\delta\,,\,x_0+\delta) \quad \text{implica} \quad f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$$

que, a su vez, es equivalente a la proposición

$$f(x_0-\delta\,,\,x_0+\delta) \quad \text{está contenido en} \quad (f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon).$$

Así, pues, se puede reformular la definición anterior como sigue.

Definición. Una función $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ es continua en el punto $x_0\in\mathbf{R}$ si para todo conjunto abierto $V_{f(x_0)}$ que contiene a $f(x_0)$ existe un conjunto abierto U_{x_0} que contiene a x_0 tal que $f(U_{x_0})\subseteq V_{f(x_0)}$.

El siguiente diagrama de Venn puede ayudar a clarificar esta definición (figura 2).

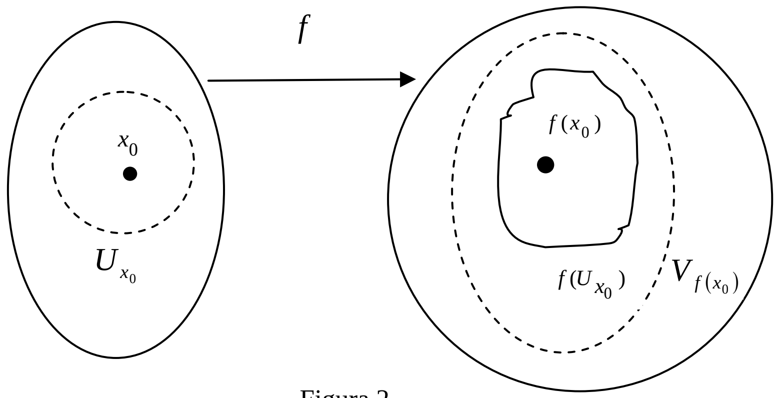


Figura 2

Teorema. Una función $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ es continua en el punto $x_0\in\mathbf{R}$ si y sólo si para toda sucesión (x_n) de puntos de $\mathbf{R}$ que converge a x_0, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

Demostración. Supóngase que $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ es continua en $x_0\in\mathbf{R}$ y sea (x_n) una sucesión de puntos de $\mathbf{R}$ que converge a x_0. Sea $\varepsilon>0$. Por hipótesis, existe un $\delta(\varepsilon,x_0)>0$ tal que para todo $x\in\mathbf{R}$ $|x-x_0|<\delta$ implica $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (I).

Desígnese con $\varepsilon'=\delta(\varepsilon,x_0)>0$. Como $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ existe $n_0(\varepsilon')\in\mathbf{N}$ tal que para todo $n>n_0$ $|x_n-x_0|<\delta$. Pero entonces, por (I), $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$ para todo $n>n_0$. Por lo tanto, $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x_0)$.

Recíprocamente, supóngase que para toda sucesión (x_n) de puntos de $\mathbf{R}$ que converge a x_0, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$. Supóngase, además, que f no es continua en $x_0\in\mathbf{R}$. Entonces, existirá un $\varepsilon>0$ tal que para todo $\delta(\varepsilon,x_0)>0$ existe un $x_\delta\in\mathbf{R}$ tal que $|x_\delta-x_0|<\delta$ pero $|f(x_\delta)-f(x_0)|\geq\varepsilon>0$.

Tómese $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ (1) pero $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ (2).

Dicho de otro modo, existe una sucesión (x_n) de puntos de $\mathbf{R}$ tal que, por (1), $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, de donde, por hipótesis, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ que está en contradicción con (2).

Por lo tanto, la hipótesis que f no es continua en $x_0 \in \mathbf{R}$ lleva a una contradicción, de donde, f es continua en $x_0 \in \mathbf{R}$.

Ejemplos

1) Si la función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ es constante, esto es, si para algún $a \in \mathbf{R}$, $f(x) = a$ para todo $x \in \mathbf{R}$, entonces f es continua.

Se probará que f es continua en cualquier punto x_0 de $\mathbf{R}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in \mathbf{R}$. Entonces, para cualquier $\delta > 0$, digamos $\delta = 1$

$|x - x_0| < 1$ implica $|f(x) - f(x_0)| = |a - a| = 0 < \varepsilon$.

Por lo tanto, f es continua.

2) La función idéntica $f = id_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, esto es, la función definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{R}$, es continua.

Se probará que f es continua en cualquier punto x_0 de $\mathbf{R}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in \mathbf{R}$. Entonces, si se elige $\delta = \varepsilon$

$|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$

En consecuencia, f es continua.

4.2. Continuidad uniforme.

La continuidad uniforme es una condición más fuerte que la continuidad en cuanto que el δ depende únicamente del ε y no de ningún punto en particular.

Definición. Se dice que una función f es uniformemente continua sobre un conjunto E de $\mathbf{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $x, y \in E$

$$|x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon .$$

Observación

La continuidad uniforme es una propiedad de una función en un conjunto, mientras que la continuidad se puede definir en un solo punto y no tiene sentido la pregunta de si una función es uniformemente continua en un cierto punto.

Además, si f es continua en un conjunto D de $\mathbf{R}$, es posible hallar para cada $\varepsilon > 0$ y cada punto x_0 de D un número $\delta > 0$ que posee la propiedad enunciada en la definición de continuidad en un punto. Pero si f es uniformemente continua en D, es posible hallar para cada $\varepsilon > 0$ <u>un</u> número $\delta > 0$ que la cumpla para todos los puntos x_0 de D.

Evidentemente, toda función uniformemente continua es continua. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general. Se ilustra esto con algunos ejemplos dados luego del siguiente teorema. Ahora bien, si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces se puede probar que la función es uniformemente continua en $[a, b]$.

Teorema. Toda función uniformemente continua en un conjunto D de $\mathbf{R}$ es continua en todos los puntos de D.

Demostración. Esta afirmación es trivial a partir de ambas definiciones, ya que según la definición de continuidad uniforme, para todo $\varepsilon > 0$ es posible hallar un valor de $\delta > 0$ cumpliendo las condiciones en ella citadas para todos los puntos de D; y si existe dicho valor δ para todos los puntos, es evidente que existirá para cada punto en particular, con lo cual:

Para todo x de D, la condición $|x - x_0| < \delta$ implica $\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$ para todo x_0 de D y, por lo tanto, f es continua.

Ejemplos

1) Sea $f(x) = x^2$. Se probará que *f* es continua en $\mathbf{R}$ pero no es uniformemente continua en $\mathbf{R}$ (ver figura 3).

Primero se probará que *f* es continua en cualquier punto x_0 de $\mathbf{R}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in \mathbf{R}$. Se desea determinar un número $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica $\left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$.

Como $\left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0| \; |x + x_0|$, entonces primero se acotará $|x + x_0|$. Se exige en principio que $|x - x_0| < 1$ (podría tomarse otro número positivo distinto de 1). Entonces, como

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1$$

se tiene que

$$|x| < 1 + |x_0|.$$

En consecuencia,

$$|x + x_0| \leq |x| + |x_0| < 2\,|x_0| + 1.$$

Sólo falta ahora hacer la condición adicional

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1}$$

para que

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0| \; |x + x_0| < \varepsilon$$

pues

$$|x - x_0| \; |x + x_0| < \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1} \left(2\,|x_0| + 1\right).$$

Luego, tomando $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right\}$ se tiene que la condición $|x - x_0| < \delta$ implica $\left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$.

Seguidamente se probará que f no es uniformemente continua en $\mathbf{R}$.

Supóngase que para un $\varepsilon > 0$ dado existiera un $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbf{R}$ $|x-y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| = |x-y|\ |x+y| < \varepsilon$.

Tómese ahora $x = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$, $y = x + \dfrac{\delta}{2}$. Entonces, $y - x = \dfrac{\delta}{2} > 0$, de donde, $y - x = \dfrac{\delta}{2} < \delta$ y $x + y = x + x + \dfrac{\delta}{2} = 2\,x + \dfrac{\delta}{2}$.

Luego,

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|\ |x+y| = \left|2\,x + \frac{\delta}{2}\right| \frac{\delta}{2} > 2\,x\,\frac{\delta}{2} = 2\,\frac{\varepsilon}{\delta}\,\frac{\delta}{2} = \varepsilon\,.$$

Esta contradicción muestra que nuestra hipótesis no puede verificarse y que, por lo tanto, f no es uniformemente continua en $\mathbf{R}$.

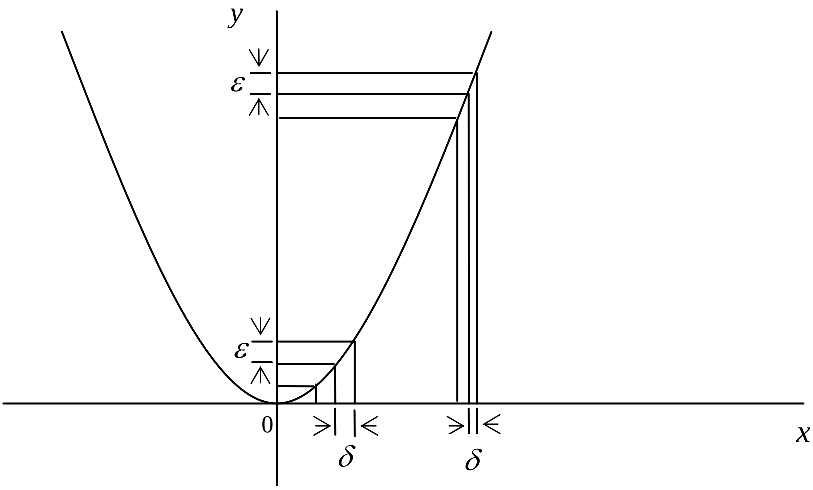


Figura 3. A medida que *x* se hace mayor en valor absoluto, δ debe elegirse más pequeño.

2) Sea $f(x) = x^2$. Se probará que f es uniformemente continua en $(0,1]$.

En efecto, se observa que $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y|\ |x+y| < 2\,|x-y|$ para todo $x, y \in (0,1]$ (es decir que en este caso como $x, y \in (0,1]$, entonces $|x+y|$ no puede crecer arbitrariamente).

Si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < 2\,\delta$. Luego, si $\varepsilon > 0$ está dado, basta tomar $\delta = \varepsilon/2$ para cada par *x, y* con $|x-y| < \delta$. Esto prueba que *f* es uniformemente continua en $(0,1]$.

4.3. Ejercicios propuestos.

1. Si las funciones f y g son continuas en x_0, probar que $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ son continuas en x_0, y que $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0 siempre que $g(x_0) \neq 0$.

2. Sean las funciones g continua en un conjunto D y f continua en un conjunto *S*. Supóngase que $p_0 \in D$ y $g(p_0) = q_0 \in S$. Probar que la función compuesta *F* dada por $F(p) = f(g(p))$, $p \in D$, es continua en p_0.

3. Sea $f(x) = 1/x$. Probar que f es continua en el intervalo abierto $(0, +\infty)$ pero que f no es uniformemente continua en dicho intervalo.

4. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Probar que *f* es uniformemente continua en el intervalo abierto $(0,1)$.

5

Capítulo V

Series infinitas.

5

5.1. Series infinitas.

La suma se define inicialmente para dos sumandos y después para una cantidad finita de sumandos. La noción de serie surge cuando se trata de extender esta idea a una cantidad infinita numerable de sumandos. Desde luego, ni se suma ni se puede sumar realmente infinitos números. Para llevar esto a cabo, se tratará con un proceso de límite al considerar diversas sucesiones.

Concretamente, partiendo de una sucesión de números reales se puede formar una nueva sucesión sumando los términos sucesivos. Así, si la sucesión dada tiene los términos

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

se forma la sucesión de las “sumas parciales”:

$$s_1 = x_1, \;\; s_2 = x_1 + x_2, \;\; s_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

y así sucesivamente, estando definida la *suma parcial de los n primeros términos* por

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (1)$$

La sucesión (s_n) de las sumas parciales se llama *serie infinita* o simplemente *serie*, y se indica también por los símbolos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots, \quad x_1 + x_2 + \cdots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad (2)$$

Los números $x_1, x_2, x_3, \cdots$ se llaman *términos* de la serie.

Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ representa la sucesión (s_n) para la cual

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

En los símbolos (2) se quiere recordar que la sucesión de sumas parciales (s_n) se obtiene de la sucesión (x_n) por adición de términos sucesivos.

5.2. Convergencia de series.

Definición. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie infinita dada y sea (s_n) la sucesión de sumas parciales que definen esta serie infinita. Entonces, si $\underset{n\to\infty}{lím}\, s_n$ existe y es igual al número real *S*, se dice que la serie dada es *convergente* y que *S* es la *suma* de la serie infinita dada, en cuyo caso se escribe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S .$$

Si $\underset{n\to\infty}{lím}\, s_n$ no existe se dice que la serie es *divergente* y la serie no tiene suma.

Observaciones

1. Esencialmente, la definición anterior expresa que una serie infinita es convergente si y sólo si la sucesión correspondiente de sumas parciales es convergente.

2. Nótese que la suma de una serie convergente es el límite de una sucesión de sumas parciales, y no se obtiene mediante suma ordinaria; es por ello que hay que tener en cuenta que aquí la palabra “suma” se usa en un sentido muy especial. Se debe también notar que para una serie convergente se usa el simbolismo $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ para representar la serie y la suma de la serie a pesar de ser cosas conceptualmente distintas. La suma representa un número y por lo tanto, no puede ser ni convergente ni divergente. Una vez hecha la distinción entre una serie y su suma, el uso de un sólo símbolo para representar ambas cosas no da lugar a confusión. La interpretación correcta de este símbolo es evidente del contexto donde se utiliza.

3. Como en el caso de la notación sumación finita, la letra *k* usada en el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es un "índice ficticio" que se puede sustituir por otro símbolo conveniente y se usan comúnmente las letras *m*, *n* y *r*. Muchas veces se empieza la suma en $k = 0$ ó $k = 2$ ó en cualquier otro valor de *k*, y es posible probar que se pueden suprimir o agregar unos cuántos términos al principio de una serie sin que se altere su convergencia o divergencia.

4. Aunque resulte reiterativo, se quiere recordar que como una sucesión puede ser convergente o no, una serie puede tener una suma o puede que no la tenga. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ tiene la suma *S*, entonces $S = \underset{n\to\infty}{lím}\, s_n$, donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. De donde, $S = \underset{n\to\infty}{lím} \sum_{k=1}^{n} x_k$. Es práctica constante escribir $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S$. Así pues, la notación $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, como ya se dijo antes, se usa tanto para representar una serie como para representar su suma. Sin embargo, este uso dual del símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ no debe causar ninguna confusión si se tiene en cuenta el contexto donde se utiliza.

Ejemplos

1) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ es divergente, porque la sucesión de sumas parciales es

$$-1,\ 0,\ -1,\ 0, -1,\ 0,\ \cdots$$

y esta sucesión no es convergente.

2) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ es convergente y su suma es 2, porque la sucesión de sumas parciales es

$$1, 1+\frac{1}{2}, \cdots, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$$

y esta sucesión converge a 2. Esto surge a partir de la siguiente fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

la cual se demuestra por inducción. Cuando $n \to \infty$ estas sumas parciales tienden al límite 2; por lo tanto, la serie converge y tiene de suma 2. Se puede indicar esto escribiendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots = 2 \ .$$

5.3. Propiedad de linealidad de las series convergentes.

Las sumas finitas ordinarias tienen las siguientes propiedades importantes:

a) $\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$ (*propiedad aditiva*)

b) $\sum_{k=1}^{n}(c \cdot x_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$ (*propiedad homogénea*)

El teorema que sigue da una extensión natural de esta propiedad a las series infinitas convergentes, y con ello se justifican muchas operaciones algebraicas efectuadas con las series convergentes tratándolas como si fueran sumas ordinarias. Aditividad y homogeneidad se pueden combinar en una sola propiedad llamada *linealidad* y que se expresa como sigue.

Teorema 1. Sean $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ series infinitas convergentes y sean α y β números reales. Entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k\right)$ también converge, y su suma viene dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k\right) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

Demostración. Teniendo en cuenta las propiedades a) y b) se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k\right) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Como por hipótesis, las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ son convergentes, entonces $\underset{n\to\infty}{lím} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ y $\underset{n\to\infty}{lím} \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$. Luego, de esto y por el teorema 8 de la sección 3.7, resulta

$$\begin{aligned}
\underset{n\to\infty}{lím} \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k\right) &= \underset{n\to\infty}{lím} \left(\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \\
&= \underset{n\to\infty}{lím}\ \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k + \underset{n\to\infty}{lím}\ \beta \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k = \\
&= \alpha \cdot \underset{n\to\infty}{lím} \sum_{k=1}^{n} x_k + \beta \cdot \underset{n\to\infty}{lím} \sum_{k=1}^{n} y_k = \\
&= \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} y_k
\end{aligned}$$

y esto prueba que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k\right)$ converge, y su suma viene dada por $\alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} y_k$.

Este teorema tiene un corolario interesante que se usa con frecuencia para establecer la divergencia de una serie.

Corolario. Si $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge y si $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ diverge.

Demostración. Puesto que $y_k = (x_k + y_k) - x_k$ y como $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge, el teorema anterior dice que la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ implica la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$. Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ no puede converger si $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ diverge.

Observación

Si $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ son ambas divergentes, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ puede converger o no. Por ejemplo, cuando $x_k = y_k = 1$ para todo *k*, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ diverge, pero cuando $x_k = 1$, $y_k = -1$ para todo *k*, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ converge.

Ejemplos. Usando el teorema 1 y su corolario.

1) Se probará que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k} = 3$. En efecto, como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2} \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$ y

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ tiene la suma 2 (ejemplo 2 de la sección 5.2), entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$; es decir, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k} = 3$.

2) Se quiere determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k + \frac{1}{2^{k-1}} \right) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{2^{k-1}} + \frac{1}{k} \right)$$

En el caso de la primera serie, como $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ es divergente y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ es convergente (ejemplos 1 y 2 de la sección 5.2), entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k + \frac{1}{2^{k-1}} \right)$$

es divergente.

Se considera ahora la segunda serie. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2^{k-1}} = 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ tiene suma 2, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2^{k-1}}$ es convergente y tiene suma $4 \cdot 2 = 8$. Por otro lado, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, llamada *serie armónica*, es divergente (ver sección 5.4). Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{2^{k-1}} + \frac{1}{k} \right)$ es divergente.

5.4. Criterios de convergencia.

En teoría, la convergencia o divergencia de una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ se decide considerando las sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ y viendo si tienden o no a un límite finito cuando $n \to \infty$. En algunos casos particulares, las sumas parciales s_n se pueden simplificar hasta el punto de poder determinar su comportamiento cuando $n \to \infty$. Sin embargo, en la mayoría de los casos, esta forma simplificada para s_n no existe y difícilmente se puede establecer la convergencia o divergencia por el método indicado. Es por ello que se darán a continuación algunos "criterios de convergencia", con los que se elude la necesidad de un conocimiento explícito de las sumas parciales.

El criterio de convergencia más sencillo es una condición necesaria para la convergencia y se expresa como sigue.

Teorema 2. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge, entonces el término *k*-ésimo tiende a cero, esto es, $\lim_{k \to \infty} x_k = 0$.

Demostración. Sea $s_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k$. Entonces, $x_k = s_k - s_{k-1}$. Cuando $k \to \infty$, s_k y s_{k-1} tienden ambos al mismo límite y, por lo tanto, $x_k \to 0$, lo que demuestra el teorema.

Observaciones

1. La verdadera utilidad de este criterio es que da una condición suficiente para la divergencia. Es decir, si el término x_k de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ no tiende a cero, entonces la serie ha de ser divergente. Esta proposición es lógicamente equivalente al teorema anterior y recibe el nombre de *criterio del término k-ésimo para la divergencia*.

Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3k}{2k^2+5}$ diverge porque $\lim_{k \to \infty} \frac{k^2+3k}{2k^2+5} = \frac{1}{2}$.

2. Debe tenerse cuidado en no creer que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge si $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, porque esto no es necesariamente cierto, es decir, la condición $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ no es suficiente para la convergencia de una serie.

Un ejemplo de tal serie es la que se conoce como *serie armónica*, la cual es $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$. Sin duda, $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, pero como se demostrará a continuación, esta serie diverge. Para ello se utiliza el siguiente resultado:

Que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sea convergente significa que la sucesión (s_n) de sumas parciales es convergente y, como ya ha sido analizado (teorema 14 de la sección 3.7), esto equivale a que (s_n) tiene la propiedad de Cauchy.

Se probará, entonces, que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ no tiene la propiedad de Cauchy.

Recuérdese que una sucesión (s_n) es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|s_n - s_m| < \varepsilon$ siempre que $n > N$ y $m > N$.

Tómese $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ y

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Así, pues

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Si $n > 1$

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ términos}} > \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ términos}} = n\,\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $s_{2n}-s_n>\frac{1}{2}$ siempre que $n>1$.

De esta forma, si es $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ es imposible encontrar un N que tenga la propiedad requerida y, por lo tanto, la serie armónica no tiene la propiedad de Cauchy, lo que implica que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge.

Se definirá ahora un tipo especial de serie que es usada en el criterio de comparación que se analizará en la sección 5.4.1.

Definición. Una *serie geométrica* es una serie de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\cdot x^k = a + a\,x + a\,x^2+\cdots \qquad \left(\text{o también, } \sum_{k=1}^{\infty} a\cdot x^{k-1}\right)\ a\neq 0$$

La n-ésima suma parcial de esta serie está dada por:

$$s_n = a\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right) \tag{3}$$

De la identidad

$$\left(1-x^n\right)=\left(1-x\right)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right)$$

se puede escribir (3) como

$$s_n=\frac{a\left(1-x^n\right)}{\left(1-x\right)},\ \text{ si } x\neq 1. \tag{4}$$

Teorema 3. La serie geométrica converge a la suma $a/(1-x)$ si $0<|x|<1$, y la serie geométrica diverge si $|x|\geq 1$.

Demostración. Si $x = 1$, cada término del segundo factor de (3) es igual a 1 y $s_n = n\,a$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ si $a > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$ si $a < 0$.

Si $x = -1$, la serie geométrica se convierte en $a - a + a - \cdots + (-1)^{n-1}\,a + \cdots$. Así, $s_n = 0$ si n es par y $s_n = a$ si n es impar. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ no existe.

Si $|x| > 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} a\,x^{k-1} = a \lim\limits_{k\to\infty} x^{k-1}$. Claramente, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{k-1} \neq 0$ ya que se puede hacer que $\left|x^{k-1}\right|$ sea tan grande como se quiera tomando *k* lo suficientemente grande. Por lo tanto, por el teorema 2, la serie es divergente.

Si $0 < |x| < 1$ es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Por lo tanto, de (4) se puede concluir que si $0 < |x| < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a\left(1-x^n\right)}{(1-x)}\right] = \frac{a}{(1-x)}\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-x^n\right)\right] = \frac{a}{(1-x)}$$

lo que significa que la serie geométrica (también llamada *serie geométrica de razón x*) converge a: $\dfrac{a}{(1-x)}$.

Ejemplo

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ es una serie geométrica con $a = 1$ y razón $x = \dfrac{1}{2}$.

Como $|x| < 1$ la serie converge. Pero como $\dfrac{a}{(1-x)} = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)} = 2$, la suma de la serie es 2.

(Obsérvese que a este mismo resultado se había arribado en el ejemplo 2 de la sección 5.2).

5.4.1. Criterios de comparación para series de términos positivos.

Las series de términos positivos son series de la forma: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, donde cada $x_k \geq 0$ para $k = 1, 2, \ldots$. Puesto que la sucesión de sumas parciales de tales series es creciente, se aplicará el teorema 2 de la sección 3.7 para obtener la siguiente condición necesaria y suficiente de convergencia.

Teorema 4. Si $x_k \geq 0$ para cada $k \geq 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada superiormente.

Demostración. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ de términos positivos converge, entonces la sucesión de sumas parciales también converge. Del teorema 2 de la sección 3.7 concluimos que la sucesión de sumas parciales es acotada y, por lo tanto, tiene una cota superior.

Por otro lado, para una serie de términos positivos, la sucesión de sumas parciales tiene cota inferior de 0. Si la sucesión de sumas parciales también tiene una cota superior, es acotada. Se concluye entonces, del teorema 2 de la sección 3.7, que la sucesión de sumas parciales es convergente y, por lo tanto, la serie es convergente.

Observación

Es fácil determinar que el supremo de una sucesión creciente es también el límite de ésta, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\}, \qquad \text{si } x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$$

y análogamente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\}, \qquad \text{si } x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$$

Hay que distinguir dos casos:

(i) Si la sucesión es acotada, su supremo y su ínfimo son números, es decir, $\underset{n\to\infty}{lím}\ x_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\} = B$ y $\underset{n\to\infty}{lím}\ x_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\} = C$. Por lo tanto, si D es una cota superior de la sucesión y E es una cota inferior de la sucesión, entonces $\underset{n\to\infty}{lím}\ x_n = B \leq D$ y $\underset{n\to\infty}{lím}\ x_n = C \geq E$. Se tienen, entonces (ver también teorema 2 de la sección 3.7) los siguientes resultados:

Teorema I. Sea (x_n) una sucesión creciente y supóngase que D es una cota superior de esta sucesión. Entonces, (x_n) es convergente y $\underset{n\to\infty}{lím}\ x_n \leq D$.

Teorema II. Sea (x_n) una sucesión decreciente y supóngase que E es una cota inferior de esta sucesión. Entonces, (x_n) es convergente y $\underset{n\to\infty}{lím}\ x_n \geq E$.

(ii) Si la sucesión es no acotada, entonces su límite resulta, respectivamente, $+\infty$ en el caso creciente y $-\infty$ en el caso decreciente.

Para una serie de términos positivos (negativos), la sucesión de sumas parciales es creciente (decreciente) y puede aplicarse lo anterior; es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sup \{x_1 + x_2 + \cdots + x_k\} = \sup \{s_n\}, \text{ si } x_k \geq 0 \text{ para cada } k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \inf \{y_1 + y_2 + \cdots + y_k\} = \inf \{t_n\}, \text{ si } y_k \leq 0 \text{ para cada } k.$$

Naturalmente, hay que distinguir en cada situación el caso acotado y el no acotado, que se traduce respectivamente, en la convergencia y la divergencia de la serie.

De lo expuesto anteriormente, surge el siguiente teorema.

Teorema 5. Si la sucesión de sumas parciales de términos positivos está acotada superiormente por un número *M*, entonces la serie es convergente y su suma no puede exceder a *M*.

Demostración. De acuerdo a las hipótesis del teorema, la sucesión de sumas parciales de términos positivos está acotada superiormente por *M* e inferiormente por 0 y además, esta sucesión es creciente. Entonces, (teorema I) la sucesión de sumas parciales es convergente y su suma no excede a *M*.

Teorema 6. (*Criterio de Comparación*)

Supuesto que $x_k \geq 0$ e $y_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$, si existe una constante positiva c tal que

$$x_k \leq c \cdot y_k \quad \text{para todo } k \qquad (*)$$

entonces la convergencia de $\sum y_k$ implica la de $\sum x_k$.

Demostración. Sean $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ y $t_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ las *n*-ésimas sumas parciales de las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$, respectivamente. Entonces, (*) implica $s_n \leq c \cdot t_n$. Si $\sum y_k$ converge, sus sumas parciales están acotadas (teorema 4); si *M* es una cota superior, se tiene $s_n \leq c \cdot M$ y, por lo tanto, $\sum x_k$ es también convergente puesto que sus sumas parciales están acotadas por $c \cdot M$ (teorema 4).

Observaciones

La conclusión del teorema anterior se puede formular también como sigue:

1. "La divergencia de $\sum x_k$ implica la divergencia de $\sum y_k$".

Esta proposición es lógicamente equivalente al teorema 6. Cuando se satisface la desigualdad (*), se dice que la serie $\sum y_k$ *domina* a la serie $\sum x_k$.

2. Si se suprime un número finito de términos del principio de una serie, la convergencia o divergencia no se afecta. Por lo tanto, el teorema 6 es también válido si se verifica la desigualdad (*) para todo $k > N$, donde N es un número fijo.

Ejemplos

1) Se demostrará que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ es convergente utilizando el teorema 4.

Se debe encontrar una cota superior para la sucesión de sumas parciales (s_n) de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. El n-ésimo término de esta sucesión es

$$s_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} \tag{1}$$

Ahora se consideran los primeros n términos de la serie geométrica con $a = 1,\ x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad . \tag{2}$$

Por el ejemplo visto después del teorema 3, la serie geométrica con $a = 1$, $x = \frac{1}{2}$ tiene suma 2. Por lo tanto, la suma (2) es menor o igual que 2 .

Obsérvese que el término de la suma dado en (1) es menor o igual al término correspondiente de la suma dado en (2); es decir,

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \text{ para todo } k \geq 1 .$$

Esto es cierto porque $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, lo cual, además del factor 1 contiene $k-1$ factores, cada uno mayor o igual que 2. Por lo tanto,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq 2$$

Luego, por el teorema 4, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ es convergente y tiene su suma menor o igual que 2. En este ejemplo, los términos de la serie dada se comparan con los de una serie convergente. Se trata de un caso particular del teorema 6.

2) Se determinará si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k+1}$ es convergente o divergente.

La serie dada es: $\frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \frac{4}{32} + \cdots + \frac{4}{3^k+1} + \cdots$

Comparando el k-ésimo término de esta serie con el k-ésimo término de la serie geométrica convergente

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{4}{3^k} + \cdots, \quad x = \frac{1}{3} < 1$$

se tiene $\frac{4}{3^k+1} < \frac{4}{3^k}$ para todo entero $k \geq 1$. Por lo tanto, por el teorema 6, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k+1}$ es convergente.

3) Se determinará si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ es convergente o divergente.

La serie dada es: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \cdots$

Comparando el k-ésimo término de esta serie con el k-ésimo término de la serie armónica divergente, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} \quad \text{para todo entero } k \geq 1.$$

Por lo tanto, por la observación 1 del teorema 6, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ es divergente.

4) Se determinará si la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2+\sqrt{k}}$ es convergente o divergente.

La serie dada es: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2+\sqrt{k}}+\cdots$

Comparando el *k*-ésimo término de esta serie con el *k*-ésimo término de la serie divergente $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$, se tiene

$$\frac{1}{2+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}, \text{ para todo entero } k\geq 1$$

desigualdad que no permite expresar una conclusión. (Nótese que si una serie es término a término menor que una divergente, el criterio de comparación no concluye nada). Pese a todo, esperando que la serie dada sea divergente se la compara con la serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$.

En este caso, se tiene término a término

$$x_k=\frac{1}{k}\leq\frac{1}{2+\sqrt{k}}=y_k, \qquad k\geq 4$$

Por la observación 2 del teorema 6, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2+\sqrt{k}}$ es convergente entonces también lo es la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Absurdo!. Luego, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2+\sqrt{k}}$ es divergente.

Teorema 7. (*Criterio de comparación por paso al límite*)

Supuesto que $x_k>0$ y $y_k>0$ para todo $k\geq 1$ y que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = 1$$

entonces $\sum x_k$ converge si y sólo si $\sum y_k$ converge.

Demostración. Existe un número natural N tal que para todo $k > N$ implica $\frac{1}{2} < \frac{x_k}{y_k} < \frac{3}{2}$. Por lo tanto, $y_k \le 2 \cdot x_k$ y $x_k \le \frac{3}{2} \cdot y_k$ para todo $k > N$. Aplicando dos veces el teorema 6 se tiene demostrado el teorema.

Observación

Obsérvese que este último teorema se verifica también si $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = c$, siempre que $c > 0$, puesto que entonces se tiene $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{c \cdot y_k} = 1$ y se puede comparar $\sum x_k$ con $\sum (c \cdot y_k)$. Sin embargo, si $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = 0$ sólo se puede concluir que la convergencia de $\sum y_k$ implica la convergencia de $\sum x_k$.

Usando la serie geométrica $\sum y^k$ como serie de comparación, Cauchy dio dos criterios útiles conocidos como *criterio de la raíz* y *criterio del cociente*.

Si $\sum x_k$ es una serie cuyos términos (a partir de uno de ellos) satisfacen una desigualdad de la forma

$$0 \le x_k \le y^k \text{, donde } 0 < y < 1$$

la aplicación directa del criterio de comparación (teorema 6) expresa que la serie $\sum x_k$ converge. Las desigualdades anteriores son equivalentes a

$$0 \le x_k^{1/k} \le y \qquad (*)$$

y de aquí el nombre de *criterio de la raíz*.

Si la sucesión $\left(x_k^{1/k}\right)$ es convergente, el criterio se puede expresar en una forma práctica sin hacer referencia al número *y*.

Teorema 8. (*Criterio de la raíz*)

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie de términos positivos tales que

$$x_k^{1/k} \to R \text{ cuando } k \to \infty .$$

a) Si $R < 1$, la serie converge.

b) Si $R > 1$, la serie diverge.

c) Si $R = 1$, el criterio no decide.

Demostración. Si $R < 1$, elíjase y de manera que $R < y < 1$. Entonces, (*) se ha de satisfacer para todo $k > N$ a partir de un número natural *N*. Por lo tanto, $\sum x_k$ converge en virtud del criterio de comparación. Esto demuestra a).

Para demostrar b), se observa que $R > 1$ implica $x_k > 1$ para una infinidad de valores de k y, por lo tanto, x_k no puede tender a cero. Por lo cual, en virtud del teorema 2, $\sum x_k$ diverge. Esto demuestra b).

Para demostrar c), se consideran los dos ejemplos en los que $x_k = 1/k$ y $x_k = 1/k^2$. En ambos casos, $R = 1$ puesto que $k^{1/k} \to 1$ cuando $k \to \infty$, pero $\sum 1/k$ diverge mientras que, se puede probar que, $\sum 1/k^2$ converge.

Ejemplo

Con el criterio de la raíz es fácil determinar la convergencia de la serie $\sum_{k=3}^{\infty} (\log k)^{-k}$ puesto que

$$x_k^{1/k} = \frac{1}{\log k} \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \to \infty .$$

Una aplicación ligeramente distinta del criterio de comparación conduce al siguiente criterio.

Teorema 9. (*Criterio del cociente*)

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie de términos estrictamente positivos tal que

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \to L \text{ cuando } k \to \infty .$$

a) Si $L < 1$, la serie converge.

b) Si $L > 1$, la serie diverge.

c) Si $L = 1$, el criterio no decide.

Demostración. Si $L < 1$, elíjase y de manera que $L < y < 1$. Entonces, ha de existir un número natural N tal que $x_{k+1} / x_k < y$ para todo $k > N$. Esto implica

$$\frac{x_{k+1}}{y^{k+1}} < \frac{x_k}{y^k} \text{ para todo } k > N .$$

Es decir, la sucesión $\left(x_k / y^k \right)$ es decreciente para $k > N$. En particular, cuando $k > N$ ha de ser $x_k / y^k \leq x_N / y^N$, o de otro modo

$$x_k \leq c \cdot y^k \text{, donde } c = \frac{x_N}{y^N} .$$

De donde resulta que $\sum x_k$ está dominada por la serie convergente $\sum y^k$ quedando así probado a).

Para demostrar b), basta observar que $L > 1$ implica $x_{k+1} > x_k$ para todo $k > N$, a partir de un número natural N y, por lo tanto, x_k no puede tender a cero.

Finalmente, c) se prueba utilizando los mismos ejemplos que en el teorema 8.

Observaciones

1. Que la razón x_{k+1}/x_k sea siempre menor que 1 no implica que el límite L sea menor que 1. Por ejemplo, la serie armónica, que diverge, tiene la razón $\frac{k}{k+1}$ que es siempre menor que 1, pero el límite L es igual a 1.

Por otra parte, para la divergencia es suficiente que la razón sea mayor que 1 para n suficientemente grande, puesto que entonces es $x_{k+1} > x_k$ y x_k no puede tender a cero.

Ejemplo

Se puede establecer la convergencia de la serie $\sum k!/k^k$ por el criterio del cociente. La razón de dos términos consecutivos es

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{(1+1/k)^k} \longrightarrow \frac{1}{e} \text{ cuando } k \to \infty$$

en virtud de que $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{a}{k}\right)^k = e^a$ para todo real a. Puesto que $1/e < 1$ la serie converge. En particular, esto implica que el término general de la serie tiende a cero; es decir,

$$\frac{k!}{k^k} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } k \to \infty$$

lo que se acostumbra expresar diciendo que k^k “crece más rápidamente” que $k!$, para k suficientemente grande.

Nota

Se probará que $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{a}{k}\right)^k = e^a$ para todo real a.

En efecto, puesto que la sustitución directa lleva a una indeterminación de la forma 1^{∞}, se procede de la manera siguiente. Se supone que el límite existe y se lo representa por

$$y = \underset{k \to \infty}{lím} \left(1 + \frac{a}{k}\right)^k$$

Tomando el logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene

$$\ln\ y = \ln\left[\underset{k \to \infty}{lím} \left(1 + \frac{a}{k}\right)^k\right]$$

y usando el hecho de que la función logaritmo natural es continua, se escribe

$$\ln\ y = \underset{k \to \infty}{lím}\left[\ln\left(1 + \frac{a}{k}\right)^k\right] =$$

$$= \underset{k \to \infty}{lím}\left[k\ \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right)\right] = \qquad \text{(Forma indeterminada } \infty \cdot 0\text{)}$$

$$= \underset{k \to \infty}{lím}\left[\frac{\ln[1 + (a/k)]}{1/k}\right] = \qquad \text{(Forma indeterminada } 0/0\text{)}$$

$$= \underset{k \to \infty}{lím}\left[\frac{\left(-a/k^2\right)\left(1/[1 + (a/k)]\right)}{-1/k^2}\right] = \quad \text{(Regla de L'Hôpital)}$$

$$= \underset{k \to \infty}{lím} \frac{a}{1 + (a/k)} = a\ .$$

Finalmente, como $\ln y = a$, se sabe que $y = e^a$ y se concluye que $\underset{k \to \infty}{lím} \left(1 + \frac{a}{k}\right)^k = e^a$.

2. Tanto el criterio de la raíz como el del cociente, en realidad no son más que casos particulares del criterio de comparación.

Además, la convergencia o divergencia de las series al aplicar estos tres criterios no se ve afectada si se suprimen un número finito de términos en dichas series.

5.5. Convergencia absoluta y condicional.

Si $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es una serie cualquiera de números reales, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ es una serie de términos positivos y, por lo tanto, prácticamente todos los criterios de comparación pueden aplicarse a $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

En general, la convergencia de $\sum x_k$ no implica la convergencia de $\sum |x_k|$. En sentido contrario se tiene el siguiente teorema.

Teorema 10. Si $\sum |x_k|$ converge, entonces también converge $\sum x_k$ y se tiene

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| .$$

Demostración. Supongamos que $\sum |x_k|$ converge y sea $y_k = x_k + |x_k|$. Se demostrará que $\sum y_k$ converge. Se deduce, entonces (por el teorema 1) que $\sum x_k$ converge debido a que $x_k = y_k - |x_k|$.

Puesto que y_k es 0 ó $2|x_k|$, se tiene $0 \leq y_k \leq 2|x_k|$ y, por lo tanto, $\sum |x_k|$ domina a $\sum y_k$. Por consiguiente, $\sum y_k$ converge y, como ya se ha dicho, esto implica la convergencia de $\sum x_k$.

Además, como $\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ haciendo que $n \to \infty$, se obtiene

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| .$$

Definición. Una serie $\sum x_k$ se llama *absolutamente convergente* si $\sum |x_k|$ converge. Es *condicionalmente convergente* si $\sum x_k$ converge y en cambio $\sum |x_k|$ diverge.

Observación

El teorema anterior nos dice que una serie absolutamente convergente es convergente, pero es posible que una serie sea convergente pero no absolutamente convergente.

Teorema 11. Si $\sum x_k$ y $\sum y_k$ son absolutamente convergentes, lo mismo le ocurre a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k)$ cualesquiera que sean α y β.

Demostración. Esto se deduce fácilmente a partir de las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{M} |\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k| \le |\alpha| \sum_{k=1}^{M} |x_k| + |\beta| \sum_{k=1}^{M} |y_k| \le |\alpha| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + |\beta| \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$$

que demuestran que las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k|$ están acotadas y, por lo tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k|$ es convergente.

Ejemplos

1) Considérese la serie alternada (signos alternativamente positivos y negativos):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} + \cdots \ .$$

Esta serie será absolutamente convergente si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{2}{3^k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots$ es convergente. Como ésta es la serie geométrica con $x = \frac{1}{3} < 1$ que es convergente, entonces la serie dada es absolutamente convergente; luego es convergente.

2) Se determinará si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen\ k}{2^k}$ converge absolutamente.

Como $|sen\ k| \leq 1$ para todo entero $k \geq 1$, entonces por el criterio de comparación $\left|\frac{sen\ k}{2^k}\right| \leq \frac{1}{2^k}$ para todo entero $k \geq 1$. Se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{sen\ k}{2^k}\right|$ es convergente pues $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ es la serie geométrica con $x = \frac{1}{2} < 1$, que es convergente. La serie dada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen\ k}{2^k}$ es entonces absolutamente convergente y, por lo tanto, se concluye que es convergente.

5.6. Ejercicios propuestos.

1. Determinar, mediante el criterio del *k*-ésimo término, cuáles de estas series divergen:

   a) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$

   b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

   c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2\,k!+1}$

   d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k}$

2. Determinar si la siguiente serie converge o diverge. Proporcionar la suma, si es que converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

3. Determinar si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$ converge.

4. Determinar por el criterio de comparación si la siguiente serie converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^k}$$

5. Usar el criterio de comparación por paso al límite para probar la divergencia de las siguientes series:

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a \cdot k + b}$ $\quad a > 0$. *Serie armónica general.*

   b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\ 2^k + 5}{4\,k^3 + 3\,k}$

6. Probar por el criterio de la raíz que las siguientes series convergen:

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2k}}{k^k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{2^k}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathrm{k}/(\mathrm{k}+1)\right]^{k^2}$

7. Probar por el criterio del cociente que las siguientes series convergen:

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\ 2^{k+1}}{3^k}$

8. Determinar si convergen absolutamente las siguientes series:

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k(k+1)/2}}{3^k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k+1)}$

b

Bibliografía

[1] **Apóstol, T.**, *Calculus*, Vol.1, Reverté S.A., 1976.

[2] **Apóstol, T.**, *Análisis Matemático*, Reverté S.A., 1979.

[3] **Cignolli, R.**, *Una Introducción a la Teoría Axiomática de Conjuntos*, CIMEC-IMAL, 2002.

[4] **De Figueiredo, D.**, *Funções Reais*, Serie de Matemática, Monografía Nº 10, The Pan American Union, 1970.

[5] **Dieudonné, J.**, *Fundamentos del Análisis Moderno*, Reverté S.A., 1976.

[6] **Dugundji, J.**, *Topology*, Allyn and Bacon, 1970.

[7] **Friedman, A.**, *Advanced Calculus*, Holt, Rine Hart and Winston, Inc., 1981.

[8] **Gentile, E.**, *Notas de Álgebra*, Eudeba, 1976.

[9] **Haaser, N., LaSalle, J. y Sullivan, J.**, *Análisis Matemático I. Curso de Introducción*, Trillas, 1997.

[10] **Hocking, J. L. y Young, J.**, *Topología*, Reverté, S.A., 1966.

[11] **Horváth, J.**, *Introducción a la Topología General*, Serie de Matemática, Monografía Nº 9, The Pan American Union, 1975.

[12] **Kelley, J. L.**, *General Topology*, Springer-Verlag, 2000.

[13] **Kolmogorov, A. y Fomin, S.**, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Mir, 1975.

[14] **Kuratowski, K.**, *Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología*, Vicens-Vives, 1973.

[15] **Landau, E.**, *Foundations of Analysis*, Chelsea, 1951.

[16] **Lima, E. L.**, *Curso de Análise*, Vol. 1, Projecto Euclides, 1982.

[17] **Lipschutz, S.**, *Topología General*, Mc Graw-Hill, 1970.

[18] **Michavila, M.**, *Fundamentos del Cálculo Numérico 1: Topología Métrica*, Reverté S.A., 1986.

[19] **Munkres, J. R.**, *Topología*, Prentice Hall, 2002.

[20] **Sierpinski, W.**, *General Topology*, Dover Publications, 2000.

[21] **Rudin, W.**, *Principios del Análisis Matemático*, Mc Graw-Hill, 1977.

[22] **Trejo, C.**, *El Concepto de Número*, Serie de Matemática, Monografía Nº 7, The Pan American Union, 1973.

Noviembre de 2008. Santa Rosa, La Pampa.