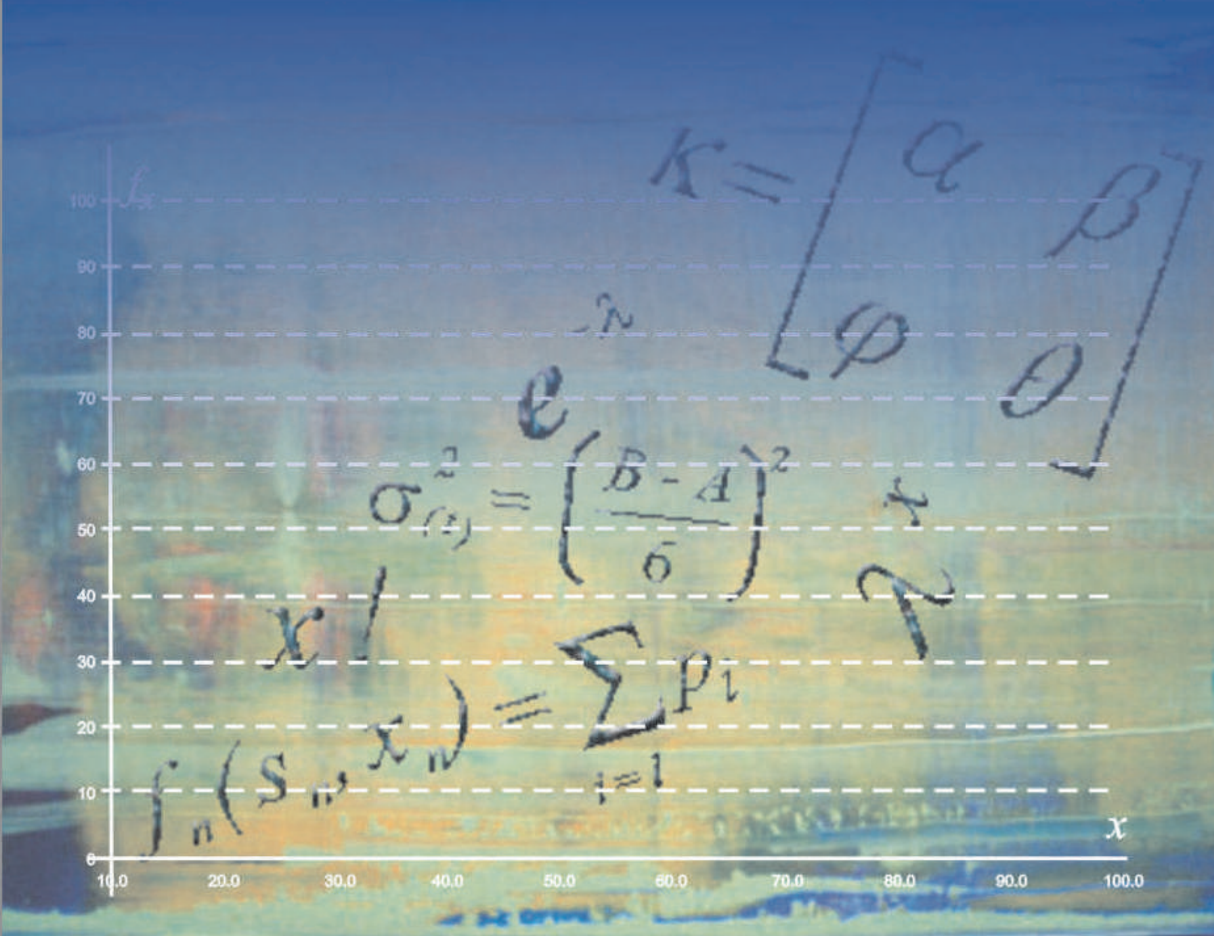
LIBROS DE TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Entre el arte y la ciencia

Métodos y modelos de apoyo a la toma de decisiones en Administración



2009

UNLPam

Julio Eduardo FREDES
Yamila Ethel MAGIORANO
Antonio Amado FELICE
Nicolás SAN JUAN FIOL
Ramiro Adrián RODRÍGUEZ

[2009] LIBRO DE TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Entre el arte y la ciencia

Métodos y modelos de apoyo a la toma de decisiones en Administración

Julio Eduardo FREDES
Yamila Ethel MAGIORANO
Antonio Amado FELICE
Nicolás SAN JUAN FIOL
Ramiro Adrián RODRÍGUEZ

Julio Eduardo Fredes
Entre el arte y la ciencia : métodos y modelos de apoyo a la toma de decisiones en administración. Julio Eduardo Fredes; Yamila Ethel Magiorana; Antonio Amado Felice; Nicolás San Juan Fiol y Ramiro Adrián Rodríguez. - 1a ed. - Santa Rosa : Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Económicas y Jurídicas. , 2010.
238 p. ; 18x25 cm.

ISBN 978-950-863-129-9

1. Ciencias Económicas.
CDD

Fecha de catalogación: 09/12/2009

LIBRO DE TEXTO PARA **ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

Entre el arte y la ciencia. Métodos y modelos de apoyo a la toma de decisiones en Administración.

AUTORES: Julio Eduardo FREDES / Yamila Ethel MAGIORANO / Antonio Amado FELICE / Nicolás SAN JUAN FIOL / Ramiro Adrián RODRÍGUEZ

Diciembre de 2009, Santa Rosa, La Pampa

Coordinación de Diseño y Diagramación: Gabriela HERNÁNDEZ (DCV-EdUNLPam).

Diseño de Interior: Florencia SEMPER

Impreso en Argentina
ISBN: 978-950-863-129-9
Cumplido con lo que marca la ley 11.723
EdUNLPam - Año 2009
Cnel. Gil 353 PB - CP L6300DUG
SANTA ROSA - La Pampa - Argentina

Prefacio

Este texto ha sido desarrollado para su utilización en un curso de grado destinado a la aplicación de métodos y modelos matemáticos de apoyo a la toma de decisiones en la Administración de organizaciones. Constituye una introducción a las metodologías de trabajo que suelen denominarse como "Investigación Operativa" o "Investigación de Operaciones".

La Investigación Operativa surgió como disciplina alrededor de la mitad del siglo XX y se consolidó, en un proceso de realimentación mutua, con la evolución del cálculo electrónico. Como muchos otros campos del conocimiento, inició su vida con aplicaciones de índole militar, pero en la actualidad tiene un frondoso rango de aplicaciones en las más diversas actividades de las organizaciones.

Si algún conocedor del espectro que abarca la Investigación Operativa observa el contenido de este texto, notará que el mismo está particularmente restringido. Las razones son muy sencillas: no se procura presentar un texto que abarque a todos los temas y, principalmente, los autores decidimos formalizar esta publicación con el foco puesto en las necesidades bibliográficas de los estudiantes de grado y de los contenidos que prevé la carrera de Contador Público Nacional de la Universidad Nacional de La Pampa.

Dada la situación que se describe en el párrafo anterior, es un libro introductorio que procura, de la manera más fácil posible, el acceso a la esencia de los métodos y modelos que se utilizan para respaldar con base científica a quienes tiene a cargo la toma de decisiones en Administración.

El texto comienza con la visión introductoria de los temas de la asignatura, definiendo los modelos, su clasificación y aplicaciones, y sienta las bases para los capítulos siguientes.

Los temas específicos que se desarrollan comprenden:

• Teoría de redes, con acento en los instrumentos utilizados para planificación, seguimiento y control de proyectos, tanto determinísticos como aleatorios. En este último caso, con una extensión a la aplicación de Simulación;

•Teoría de las líneas de espera, básicamente con los modelos más simples de un solo canal de espera con uno o varios servidores que atienden en paralelo, y con poblaciones infinitamente grandes o acotadas;

•Apoyo multicriterio a la decisión, en el cual se recorren tanto la fundamentación filosófica y epistemológica que ubican a este enfoque como síntesis de las posturas racional y empírica, como las características que le confieren idoneidad para modelar situaciones reales complejas en muchos ámbitos de decisión. Se distinguen las distintas variantes que puede presentar la metodología, y se desemboca en la aplicación de un método multicriterio discreto: el Proceso Analítico Jerárquico.

•Programación dinámica, de la que se explican las razones de su posibilidad de aplicación y tipificaciones.

En todos los casos a la presentación teórica se le agregan ejemplificaciones que permitan asimilar mejor los conocimientos, procurando ubicar al lector en situaciones hipotéticas que transcurren cerca de su ámbito de estudio. Los capítulos presentan bibliografía que puede consultarse a efectos de ampliar los temas desarrollados, y rematan con un conjunto de ejercicios de aplicación de los temas. Los resultados de tales ejercicios constan en el último capítulo del libro.

Los autores.
Santa Rosa, mayo de 2009

Índice

PREFACIO

1. ANÁLISIS CUANTITATIVO Y PROCESO DE TOMA DE DECISIONES.. 13
1.1. Resolución de problemas y toma de decisiones............................15
1.1.1. Identificación de la situación y acciones posibles.
1.1.2. Ejecución y Control.
1.2. Análisis cuantitativo, enfoque sistémico y modelización.............17
1.2.1. Métodos cuantitativos y cualitativos.
1.3. Modelización: concepto. Distintos tipos de modelos..................18
1.3.2. Tipos de modelos.
1.3.3. Las ventajas de modelar.
1.3.4. Los modelos matemáticos.
1.3.5. Algunos modelos determinísticos y probabilísticos.
1.4. Construcción de modelos: metodología y etapas. Datos: formas y fuentes..25
1.4.1. Los modelos matemáticos.
1.5. Desarrollo de modelos: preparación, métodos de cálculo y resolución..27
1.5.1. Preparación de modelos matemáticos.
1.5.2. Búsqueda de objetivos mediante resolución del modelo matemático.
1.5.3. Proceso de formulación de un problema de optimización.
1.6. Ejercicios de Aplicación Práctica...29
1.7. Apéndice..33
1.7.1. Modelos determinísticos.
1.7.2. Modelos probabilísticos.
1.8. Bibliografía..37

2. TEORÍA DE REDES – PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS POR CAMINO CRÍTICO.. 39
2.1. Distintos tipos de algoritmos aplicables... 41
2.1.1. Conceptos y definiciones previas.
2.1.2. Glosario.
2.1.3. Problema de la ruta más corta.
2.1.4. Problema del árbol de extensión mínima.
2.1.5. Problema del flujo máximo.
2.2. Redes PERT y CPM... 44
2.2.1. Conceptos básicos: planificación, programación y control.
2.2.2. El modelo expresado en una red.
2.2.3. Camino crítico.
2.2.4. Proyectos con tiempos inciertos en las actividades.
2.2.5. Intercambio duración-costo. Programación óptima.
2.3. Aplicación de Simulación al PERT.. 73
2.3.1. Posibilidad de mayores análisis en el caso probabilístico. Marco metodológico.
2.3.2. Operatoria de la simulación en un proyecto probabilístico.
2.4. Ejercicios de aplicación práctica.. 82
2.5. Apéndice... 89
2.5.1. Otras técnicas aplicables a la administración de proyectos.
2.5.2. La Distribución Beta de Euler aplicada en PERT.
2.6. Bibliografía.. 93

3. LÍNEAS DE ESPERA.. 95
3.1. Características de fenómenos de espera. Elementos intervinientes; interrelación...97
3.1.1. La situación que puede representarse con este modelo.
3.1.2. ¿Normativo o Descriptivo?
3.1.3. Elementos intervinientes.
3.2. Características de operación; sistemas en estado estable; medidas de eficiencia..103

3.2.1. Cómo opera la situación modelada como cola.
3.2.2. Medidas de eficiencia o desempeño.
3.3. Distintos tipos de modelos. Cola simple, un solo canal, capacidad infinita..105
3.3.1. La tipificación de los modelos de colas.
3.3.2. El modelo M/M/1.
3.4. Modelo con cola simple, múltiples canales paralelos y capacidad infinita..109
3.4.1. Características del modelo.
3.5. Modelos de espera con población demandante finita............112
3.5.1. Características del modelo.
3.6. Análisis económico de las líneas de espera..............................115
3.6.1. Dos modos de analizar una misma situación problemática.
3.6.2. La incorporación de costos al modelo.
3.7. Ejercicios de Aplicación Práctica..120
3.8. Bibliografía..127

4. APOYO MULTICRITERIO A LA DECISIÓN...........................129
4.1. Conceptos y nociones básicos del apoyo multicriterio a la decisión..131
4.1.1. La selección en presencia de criterios múltiples
4.1.2. El papel del análisis multicriterio.
4.1.3. El Apoyo Multicriterio a la Decisión.
4.1.4. Cuestiones conceptuales del Apoyo Multicriterio a la Decisión.
4.2. Apoyo multicriterio a la decisión: distintos tipos de análisis..137
4.2.1. ¿Cómo modelar las situaciones que presentan criterios múltiples?
4.2.2. Métodos Multicriterio Continuos.
4.2.3. Métodos Multicriterio Discretos.
4.2.4. Métodos Multicriterio en contextos de negociación y decisión en grupos.
4.2.5. Dimensión internacional y tendencias actuales.

4.3. Métodos de decisión multicriterio discreta; normalización de criterios; ponderación preferencial..140
4.3.1. Esquema de trabajo.
4.3.2. Normalización.
4.3.3. Preanálisis de dominación.
4.3.4. Ponderación preferencial de los criterios.
4.4. Proceso Analítico de Jerarquías. Elementos fundamentales y proceso analítico... 143
4.4.1. En qué consiste el Proceso Analítico de Jerarquías (PAJ).
4.4.2. Proceso de modelización.
4.4.3. El proceso analítico.
4.5. Aplicación del Proceso Analítico de Jerarquías. Cálculos y Análisis de sensibilidad...146
4.5.1. El proceso de cálculo.
4.5.2. Análisis de sensibilidad.
4.6. Ejercicios de Aplicación Práctica..151
4.7. Apéndice... 157
4.7.1. Clasificación de los Métodos Multicriterio Discretos.
4.7.2. Índices aleatorios de consistencia en AHP.
4.7.3. Escala de comparaciones pareadas en AHP.
4.8. Bibliografía..161

5. PROGRAMACIÓN DINÁMICA..163
5.1. Conceptos básicos. Principio de optimalidad...........................165
5.1.1. "Divide y vencerás".
5.1.2. Glosario.
5.1.3. Características de las aplicaciones de programación dinámica.
5.1.4. Optimidad.
5.1.5. Nomenclatura y formulación.
5.1.6. Ventajas y desventajas de la resolución mediante Programación Dinámica.
5.2. Distintos tipos de Programación Dinámica.............................172

5.2.1. Selección de una dimensión de análisis para una clasificación.
5.2.2. Caso determinístico.
5.2.3. Caso probabilístico.
5.3. Los árboles de decisión en la toma de decisiones multinivel. 202
5.4. Ejercicios de Aplicación Práctica... 203
5.5. Apéndice... 206
5.5.1. La resolución mediante recurrencia en avance.
5.6. Bibliografía.. 214

6. RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA.. 215
6.1. Ejercicios del Capítulo 1... 217
6.2. Ejercicios del Capítulo 2... 219
6.3. Ejercicios del Capítulo 3... 225
6.4. Ejercicios del Capítulo 4... 228
6.5. Ejercicios del Capítulo 5... 234

1

Capítulo I

Análisis cuantitativo y proceso de toma de decisiones

1

1.Análisis cuantitativo y proceso de toma de decisiones

1.1. Resolución de problemas y toma de decisiones

1.1.1. Identificación de la situación y acciones posibles

La toma de decisiones es una actividad diaria que realizan los individuos, pero existen casos en donde, debido a la importancia o complejidad de la misma, se vuelve necesario y conveniente tomarse más tiempo para concretar la decisión. Es en estas circunstancias cuando -al aplicar razonamiento, técnicas, o hasta recurrir a otras disciplinas- los métodos cuantitativos se manifiestan como un instrumento óptimo para brindar ayuda a quienes tienen que decidir dentro de las organizaciones.

La resolución de problemas se puede definir como:

•el proceso de identificar una diferencia entre algún estado de cosas actual y uno deseado, y

•emprender después una acción para resolver la diferencia.

A efectos de resolver un problema se debe seguir una serie de pasos. Según los diversos autores que se consulten, puede ser que el proceso contenga algunos pasos más o algunos menos, a partir de los que se consignan a continuación:

1) Identificar y definir el problema: esto es, distinguir esa situación mencionada anteriormente que hace a la diferencia entre un estado de cosas actual y uno deseado.

2) Determinar el conjunto de alternativas: toda situación del tipo de la que se pretende solucionar es factible de ser enfrentada con uno o más cursos de acción que provea a eliminar la diferencia entre los estados.

3) Determinar el criterio o criterios que se utilizarán para evaluar las opciones: a su vez, las distintas alternativas pueden ser factibles de apreciación desde diversos puntos de vista. En este sentido, debe consignarse que es posible que se trate de problemas en que los análisis serán basados en **criterio único o bien multicriterio**, según se trate de problemas en los que el fin es obtener la mejor solución con respecto a un solo criterio o con respecto a varios.

4) Evaluar las alternativas disponibles: se procede a apreciar las distintas opciones presentadas. Cada criterio se utiliza como dimensión de análisis.

5) Elegir una de las alternativas: como consecuencia de la evaluación y confección de un ordenamiento de las alternativas al seguir los pasos ya citados, se procede a seleccionar aquella que se considere más apropiada para la solución de la situación problemática. Lo que hace que esta fase de selección sea difícil es que, probablemente, los criterios no son igualmente importantes y ninguna opción es la mejor con respecto a todos los criterios.

Toma de decisiones es el término que generalmente se asocia con estas primeras cinco etapas del proceso de resolución de problemas. Así, el primer paso de la toma de decisiones es identificar y definir el problema y el último la elección de una alternativa, que es el acto propiamente dicho de tomar una decisión. Según Eduardo Martínez (1998) "es el proceso de convertir información en acción. Es un proceso de identificación y formulación de soluciones factibles, evaluación de soluciones y selección de la mejor solución".

1.1.2. Ejecución y Control

Fuera del proceso de toma de decisiones entendido en el sentido mencionado, se pueden citar:

6) Implantar la opción o alternativa seleccionada: es fundamental tener en claro que no existe decisión sin acción. O sea, una vez resuelto cuál es la mejor opción en función de los criterios aplicados, se debe actuar para que dicha alternativa se aplique a la realidad que se presentaba problemática.

7) Evaluar los resultados y determinar si se ha obtenido una solución satisfactoria: como conclusión del proceso de resolución de problemas se deben apreciar las consecuencias de lo resuelto y ejecutado. Del control de tales resultados en su comparación con los objetivos propuestos se inferirá si es necesario realizar correcciones.

1.2. Análisis cuantitativo, enfoque sistémico y modelización

1.2.1. Métodos cuantitativos y cualitativos

El análisis para toma de decisiones puede asumir dos formas básicas: cualitativa o cuantitativa.

El **análisis cualitativo** se basa primordialmente en el razonamiento y la experiencia del administrador; incluye la "impresión" intuitiva que el administrador tiene del problema, y constituye una faceta que puede ser identificada con **el arte de la toma de decisiones.** Sin embargo, puede ser muy importante en la decisión final del administrador considerar otros puntos de vista y analizar desde una perspectiva diferente si su experiencia con problemas similares es escasa, o si el problema presenta un grado de complejidad que impide que se lo enfrente solamente con la experiencia y la intuición.

Es entonces cuando, al utilizar el **enfoque cuantitativo**, el analista se concentra en los hechos o los datos cuantitativos asociados al problema y desarrolla expresiones matemáticas que describen los objetivos, las restricciones y las relaciones existentes en el mismo. Después el analista utiliza uno o más métodos cuantitativos para ofrecer una **recomendación** con base en los aspectos cuantitativos planteados; para esto recurre a la aplicación del **método científico** como procedimiento de análisis y resolución del problema complejo.

Los administradores fortalecen sus aptitudes para el método cualitativo en base a su experiencia. Aquel administrador que complemente sus fortalezas cualitativas con los conocimientos de los métodos cuantitativos se potenciaría sobremanera y colocaría en una mejor posición para comparar, tomar decisiones y evaluar sus recomendaciones.

Al aplicar métodos enrolados en el enfoque cuantitativo se busca eliminar conjeturas improvisadas y los razonamientos intuitivos y escasamente justificados que son frecuentemente aplicados en la toma de decisiones frente a problemas complejos.

Adicionalmente, la búsqueda de soluciones que tenga en cuenta las interrelaciones dentro de la organización, los distintos puntos de vista, intereses y poder de los actores involucrados, y las responsabilidades sociales que derivan de su interacción con el ambiente, proveen una perspectiva particularmente interesante para el planteo de modelos; ella deriva del hecho de aplicar el enfoque sistémico a la situación, especialmente cuando se lo hace desde la dinámica de sistemas.

1.3. Modelización: concepto. Distintos tipos de modelos

1.3.1. Definición de Modelo

Es frecuente encontrar situaciones en las que los esfuerzos se concentran en resolver "algo" que no "funciona" correctamente. En muchas ocasiones esto ocurre porque se toma o define un problema erróneamente.

Conviene entonces concretar en una definición qué es lo que se entiende por **modelo.**

Los modelos son representaciones de objetos o situaciones reales; representaciones más o menos simplificadas que permiten aprehender una realidad aún cuando no se la esté observando directamente.

Una vez que el problema ha quedado bien definido, el "científico de la Administración" comenzará a desarrollar -modelar- el problema en términos matemáticos.

1.3.2. Tipos de modelos

Es posible identificar una amplia gama de clasificaciones según las diversas dimensiones de análisis de modelos. La siguiente se considera suficiente para los fines que persigue este texto.

Modelos icónicos: son también conocidos como modelos físicos, y están constituidos por réplicas físicas de la realidad que representan. En esta clase se encuentran las maquetas de construcciones de ingeniería y los juguetes a escala.

Otra clase de modelos son los **analógicos**, que son de forma física pero no tienen el mismo aspecto físico del objeto que representan. Las relaciones entre los objetos y variables están representadas en un medio diferente al real, y muestran un comportamiento en forma análoga a tal realidad. Es decir que su comprensión requiere de un nivel de abstracción mayor que en el primer caso, y un conocimiento previo de los conceptos y relaciones involucrados en la realidad modelada. Tal el caso del velocímetro de un automóvil, el marcador de una balanza, un gráfico de sectores circulares o de líneas de tendencia que representan las ventas de una empresa, etc.

Los modelos **matemáticos** utilizan símbolos y relaciones o expresiones matemáticas para representar una situación. Son parte crucial de cualquier enfoque cuantitativo, y algunos de ellos serán desarrollados en este texto. Para su comprensión es necesario un nivel de abstracción mayor aún que en los modelos analógicos. En contrapartida son más adaptables que los otros dos tipos a distintas situaciones en las que pueden aplicarse. Cuentan con variables cuantitativamente definidas y relaciones matemáticas, como, por ejemplo, los modelos del universo astronómico que construyen los físicos (órbitas de desplazamiento de cuerpos celestes y satélites artificiales, etc.), y los modelos con que los economistas representan las relaciones entre los diversos mercados y factores que intervienen en una Economía.

1.3.3. Las ventajas de modelar

La importancia del desarrollo de un modelo radica en que permite, a quien lo observa, figurarse cómo es una realidad, a partir de:

1. Poder observar en una escala reducida y/o en un medio más conocido, un problema que puede presentarse complejo para su comprensión, a partir de la representación realizada.

2. Detallar y analizar las distintas soluciones alternativas que podrían

resolver el problema, antes de enfrentar la realidad para cambiarla;

3. Observar los distintos escenarios posibles y extraer conclusiones anticipadamente, sin llegar a alterar la realidad para ver qué ocurre.

4. Experimentar en menos tiempo y sin necesidad de involucrarse en cambios que, efectuados directamente sobre la situación real, pueden derivar en situaciones irreversibles y de complejas e inesperadas consecuencias.

5. Proponer la ejecución de las alternativas al experimentar en un medio que no conlleva incurrir en los costos que supondría hacerlo con objetos y situaciones reales.

Considerar lo citado precedentemente posibilita, por ejemplo, determinar si un proceso de producción es rentable o no, sin necesidad de su ejecución en la realidad.

Para que los aspectos mencionados se conviertan en realidades palpables y sean efectivamente ventajas importantes, se debe tener muy en cuenta que **el éxito del modelo matemático y el enfoque cuantitativo dependen en gran medida de la precisión con la que puedan expresarse, en términos de ecuaciones o relaciones matemáticas, las distintas relaciones observadas que se quiere representar.**

A continuación se desarrolla un ejemplo de una situación hipotética que, a medida que se la analiza para encontrar una solución, deja más en claro la conveniencia de recurrir a la construcción de modelos simbólicos. De esta forma, la aplicación del método científico al planteo y la resolución de problemas que se presentan, viene en ayuda del "arte" de la toma de decisiones al acotar los horizontes hacia donde se debe llevar la atención.

Ejemplo 1.1. Modelo para optimizar asignación de subsidios a actividades deportivas

Sea el caso de un club que recibe del Estado Provincial una serie de subsidios en forma periódica, bajo la condición de mantener ciertas relaciones técnicas entre las distintas disciplinas que se practican en la organización. De esta manera, el Gobierno Provincial manifiesta, indirectamente, el interés por el desarrollo de algunas actividades deportivas más que por otras, ya que con los índices mencionados confecciona un ordenamiento entre los postulantes (clubes) que le sirve de referencia para distribuir los fondos destinados a subsidios.

Para simplificar, se reducirá la situación a admitir únicamente dos deportes subsidiados, pero se la podría complicar mediante la incorporación de muchos más, siempre bajo el mismo esquema de modelización. Así, se encuentra que la natación es prioridad para el gobierno, y le ha asignado un puntaje 50 al club que la cuenta entre sus actividades; mientras que fútbol, sin dejar de estar apoyado por el Estado, sólo cuenta con 30 puntos.

Por cada niño que el club registre en un determinado deporte el Estado girará a la entidad una suma, en pesos, equivalente a los puntos asignados. Obviamente, interesa al club maximizar el total recibido en concepto de subsidios. Adicionalmente, se tienen dos condiciones más: ninguno de los deportes puede registrar más del 75% del total de niños registrados en los deportes, y la cantidad de niños inscriptos en natación no puede ser mayor al doble de los asignados a fútbol.

Natación	Fútbol	Total Niño	Coef. Natación	Coef. Fútbol	Subsidio Total
50	50	100	50	30	4000
60	40	100	50	30	4200
80	20	100	50	30	4600

Tabla 1.1. Subsidios al desarrollo de deportes, para 100 niños inscriptos

Una mirada a la Tabla 1.1. muestra que, si se parte de una situación inicial con el 50% de los niños en cada actividad y con subsidio total de $4000 para el club, a medida que se incrementa la cantidad admitida en natación y con la misma cantidad total de deportistas, el importe recibido es cada vez mayor. Sin embargo, la última asignación (por muy seductora que sea) no respeta las condiciones establecidas.

La cuestión es, entonces, hasta cuándo se continúa con las cuentas que mejoren paulatinamente los resultados obtenidos, y cómo se disparan señales que alerten sobre la infracción a las restricciones impuestas. Obviamente esta búsqueda no puede prolongarse indefinidamente en el tiempo, por lo cual se debe buscar el auxilio de métodos que provean soluciones aceptables y en el menor tiempo posible. Entonces es oportuna la aplicación de métodos cuantitativos como los que se están desarrollando en este texto. Tales métodos han sido reunidos bajo el nombre de Investigación Operativa, o Ciencia de la Administración, entre otras denominaciones.

1.3.4. Los modelos matemáticos

Al momento de desarrollar un modelo se deberá tener en cuenta que existen factores del entorno que no están bajo el control del administrador o del decisor, a los que se denomina **insumos incontrolables** del modelo. A aquellos que son determinados o controlados por quien toma las decisiones en la realidad representada por el modelo se los denomina **insumos controlables** del mismo. Entre estos insumos están las alternativas de decisión que el administrador especifica y, por ello, se las vincula a las **variables de decisión** del modelo.

No debe olvidarse acá que tanto la situación problemática que llevó a plantear el modelo como las decisiones que se adopten y apliquen para solucionarla se desarrollan en un plano de realidad tangible. Por otra parte, dado que el modelo armado es "una representación" tanto él como los resultados que arroje provendrán de un mundo simbólico con un grado importante de abstracción. De manera que el resultado del modelo es simplemente la proyección **de lo que sucedería si ocurren** los factores ambientales mencionados y tales decisiones en una situación real.

En tal sentido, la Figura 1.1., adaptada de Eppen **(2000: 4)**, es claramente representativa de la situación descripta en el párrafo anterior, y no debe ser soslayada por quien tiene a cargo el asesoramiento para la toma de una decisión como tampoco por quien debe aplicarla.

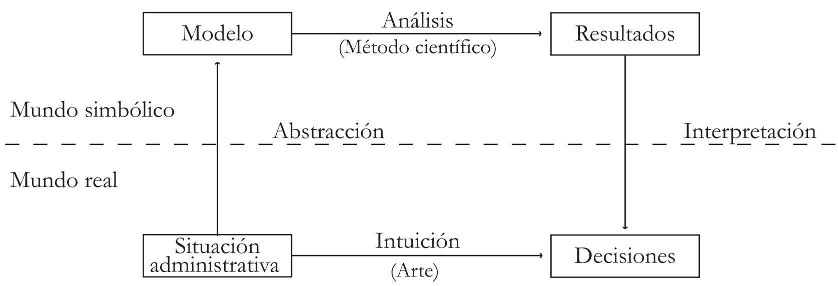


Figura 1.1. El proceso de construcción de un modelo. Adaptado de Eppen y Gould (2000)

Existen dos teorías en las cuales se puede apoyar el enfoque a adoptar ante una situación que se pretende modelar.

La Teoría Normativa indica el "como debería ser"; recomienda qué decisión tomar para llegar al óptimo si en la realidad se repite la situación modelada. La Teoría Normativa es prescriptiva: con todos los elementos de juicio a su alcance, el que toma la decisión debe actuar. Los **modelos normativos** (también llamados de decisión, o de optimización) se apoyan en esta teoría y aportan recomendaciones sobre la forma de comportarse para conseguir un objetivo establecido (a maximizar, a minimizar o alcanzar un cierto grado de satisfacción). Tal objetivo es representado por una expresión matemática que lo describe y se la denomina **función objetivo:** una medida de desempeño del modelo, cuyo valor depende de aquellos que adopten las variables de decisión. A esta función objetivo le acompañan **funciones de restricción**, las que representan condiciones o limitantes observados en la realidad modelada. Finalmente, se puede identificar un conjunto de datos que identifican a hechos, situaciones o circunstancias que permanecerán constantes (o se asume que no se alterarán) en el transcurso de la modelización y de la resolución simbólica del modelo: los **parámetros**; o sea, variables que adoptan valores que se mantendrán fijos durante el análisis. En general, se considera que los parámetros son incontrolables[1], y deben tenerse en cuenta por ser importantes para el modelo y su resolución, ya sea porque se los tiene observados y conocidos o porque se les asigna un valor supuesto.

Por otra parte, la llamada Teoría Descriptiva (o Teoría Positiva) se basa en estudios que tratan de decir cómo se actúa y, además, de "predecir" ese comportamiento. Un **modelo descriptivo** explica la realidad en base a los datos. En este caso no existen una **función objetivo** ni restricciones, pero sí se da una medición del **desempeño** por medio de variables a definir, así como existen datos incontrolables (observados o supuestos) del modelo que se expresan mediante los **parámetros**.

Existe una tipología adicional que es conveniente tener presente al momento de distinguir la clase de modelo con la que se debe tratar. Está basada en la certeza que se tiene sobre los datos y relaciones aplicados: ¿se los conoce con exactitud? ¿o son inciertos y están sujetos a variaciones?

En un **modelo determinístico** los datos son conocidos y se tiene la certeza de que no variarán al momento de aplicación real del modelo

[1] En determinados casos, y según la forma en que se maneje el modelo, puede ocurrir que el valor de un parámetro no sea incontrolable, sino que esté expresamente asignado por el administrador del modelo. Por ejemplo, el parámetro "velocidad de desplazamiento de un cuerpos celeste" es un dato incontrolable para un astrónomo que construya un modelo del universo; por su parte, en un modelo de líneas de espera (si bien en principio será un dato observado -incontrolable-) el parámetro "velocidad de servicio de un prestador" puede llegar a ser un valor que se cambie a discreción del modelador para observar cómo se comportarían la línea de espera o los costos del modelo ante cambios en la eficiencia del servidor.

-o sea, al analizar el problema se cuenta en forma cierta con toda la información necesaria para la toma de decisiones.

Cuando algunos de los insumos incontrolables -parámetros o variables de estado- son inciertos o están sujetos a variaciones importantes, y su valor no podrá ser estimado con precisión en el modelo a los efectos de la toma de la decisión, se está en presencia de un **modelo estocástico o probabilístico**, ya que incorpora el desconocimiento mencionado mediante alguna medida de tal probabilidad.

La Programación Matemática, al procurar la optimización sirve para encontrar la respuesta que proporciona el mejor resultado: la que logra mayores ganancias, mayor producción o felicidad o la que logra el menor costo, desperdicio o malestar. La Programación Matemática, en general, aborda el problema de determinar asignaciones óptimas de recursos limitados para cumplir un objetivo dado. El objetivo debe representar la meta del decisor.

1.3.5. Algunos modelos determinísticos y probabilísticos

La mencionada separación entre modelos matemáticos descriptivos y normativos puede darse tanto entre los denominados probabilísticos como entre los determinísticos.

A modo de síntesis, y sin agotar la lista que se podría elaborar, se pueden citar los siguientes:

1.3.5.1. Modelos Normativos:

a) Programación Lineal: es una metodología de trabajo que representa situaciones en las que se identifican relaciones lineales entre los elementos. Lo hace mediante una función objetivo y un conjunto de restricciones, todas expresadas mediante funciones de primer grado. La obtención del objetivo deseado, está condicionado por ciertas restricciones (dificultades, limitaciones) que impone el entorno.

Encuentra su aplicación práctica en casi todas las facetas de los negocios donde se puedan reconocer relaciones lineales entre los objetos a modelar. Dentro de la Programación Lineal se distinguen, a su vez, el problema general y los casos especiales como son los problemas de Transporte y Asignación; además, como extensión debida al tipo de variables que se manejan, se tienen la Programación Lineal Entera y Programación Lineal Mixta, con la incorporación de variables que no admiten fraccionamiento en los valores que se les asignen.

b) Programación Dinámica: en este caso, el tiempo es variable explícita (o la situación es asimilable a una donde transcurra el tiempo), existen decisiones secuenciales interrelacionadas, y el problema puede fraccionarse en etapas que se resuelven todas de igual manera.

c) Otras situaciones se presentan en la realidad de las organizaciones y han motivado la creación de modelos específicos tales como: Teoría de los Juegos, la Teoría de Redes (de máxima capacidad, mínima distancia, árboles de extensión mínima, y administración de proyectos por camino crítico), Programación No Lineal, Teoría de Administración de Inventarios, Técnicas de Apoyo Multicriterio a la Decisión, Teoría de la Decisión.

1.3.5.2. Modelos Descriptivos:

Las oportunidades de encontrar modelos que adopten la característica de meramente describir la realidad son menores que en el caso normativo. Sin embargo, una forma de enfocar la Teoría de las Líneas de Espera es la de mostrar únicamente medidas de comportamiento de un sistema; aunque, con el agregado de parámetros representativos de costos involucrados, se puede transformar en un modelo normativo tendiente a minimizar los costos totales del sistema.

1.4. Construcción de modelos: metodología y etapas. Datos: formas y fuentes

1.4.1. Los modelos matemáticos

Ya se mencionó que la toma de decisiones puede tener dos modalidades bien definidas: arte y/o ciencia. Concomitantemente, la construcción de un modelo requiere de una buena dosis de arte e imaginación, además de los conocimientos técnicos y científicos necesarios para mejorar las opiniones intuitivas.

Como consecuencia de lo consignado anteriormente, no existe una sola manera de desarrollar un modelo para una misma situación real.

En la medida que la construcción de modelos es un arte, sus fundamentos pueden enseñarse igual que los del arte. Por otro lado, en un ambiente de negocios, el desarrollo de modelos cuantitativos requiere que se especifiquen las interacciones de muchas variables. Para que sea cuantificado, el problema debe expresarse en términos matemáticos provenientes de un adecuado análisis y rigurosa metodología que será provista por un profundo conocimiento de las teorías científicas que sea necesario aplicar.

El proceso de construcción de modelos puede dividirse en tres pasos:

1. Estudio del ambiente de la situación administrativa: una vez más la Teoría General de Sistemas y la Dinámica de Sistemas hacen su aporte en apoyo a la toma de decisiones gerenciales, mediante su aplicación en los hechos y relaciones que se pretende modelar. Dentro de la administración suele restarse importancia al estudio del ambiente existente dentro de la organización. Por ejemplo, en muchos casos el problema se deriva de malas relaciones entre integrantes de la organización, lo cual deja un ambiente no propicio para el desarrollo de los negocios. Ignorar tales circunstancias al modelar, contribuye a favorecer la escasa comprensión de la situación en forma clara y, por consiguiente, la adopción de decisiones incorrectas. En función de lo citado, debe tenerse en cuenta que corresponderá interiorizarse profundamente de la situación real, para su correcta representación en el modelo.

2. Representación selectiva de la situación: si bien conviene tener una visión holística de la situación, es necesario limitar el alcance de la representación. También existirán aspectos no relevados pero que pueden tener incidencia en los análisis y conclusiones a que se arribe. Estos aspectos se registrarán mediante suposiciones y simplificaciones (que deben explicitarse debidamente). Aquí se deberá focalizar en los aspectos centrales excluyendo del ambiente los periféricos. Los objetivos y decisiones deben ser identificados y definidos explícitamente de la forma más clara posible. Los objetivos pueden ser más de uno.

3. Construcción y análisis de un modelo simbólico (cuantitativo): en esta instancia se acudirá a las clasificaciones detalladas en títulos anteriores, para definir si se trata de modelo determinista o probabilístico. También se debe acudir a la obtención de datos y fuentes que posibiliten las tareas de esta etapa. En gran parte las decisiones administrativas se basan en la evaluación e interpretación de datos, por lo que son muy necesarios para construir modelos eficaces. Los modelos simbólicos brindan una forma de evaluar e interpretar datos de manera sistémica y con más atención a los detalles de lo que es posible con modelos mentales. Es común que los datos que se presentan al analista no estén procesados o que se encuentren en distintas fuentes y lugares, y que se tenga que realizar un esfuerzo adicional para su recolección y, tal vez, homogeneizar su unidad de medida. La decisión de cómo recopilar, almacenar e interpretar datos está gobernada principalmente por el uso que se les vaya a dar. Los datos pueden provenir de registros del pasado o ser generados a través de observaciones directas o estimaciones realizadas en el presente. Los datos pueden ser también generados como pronósticos del futuro.

1.5. Desarrollo de modelos: preparación, métodos de cálculo y resolución

1.5.1. Preparación de modelos matemáticos

Para llevar adelante la preparación de un modelo y su cálculo de resolución corresponde partir de un punto que es básico, y es el referido a qué tipo de modelo es el que se tiene entre manos. Entre todas las clasificaciones mencionadas se trata aquí de definir si es determinista o probabilístico.

Un modelo puede considerarse como una manera de capturar una realidad y transmitir su esencia sin que sea necesario estar en presencia de dicha realidad. Una fotografía es un modelo de la realidad ilustrada en la imagen.

Como un modelo sólo captura determinados aspectos de la realidad, tal como se consignó anteriormente su éxito dependerá de la precisión con que adhiere a la situación y objetos modelados. Adicionalmente, su uso puede no ser apropiado en una aplicación en particular si no captura los elementos correctos que le corresponde representar.

Un modelo matemático es una ecuación, desigualdad o sistema de ecuaciones o desigualdades, que incluye algunos determinados aspectos de la realidad representada, sus interacciones y relaciones. Los modelos de este tipo se utilizan en gran medida en las ciencias físicas, en el campo de la ingeniería, los negocios y la economía.

1.5.2. Búsqueda de objetivos mediante resolución del modelo matemático

El analista debe identificar un criterio según el cual pueda medir el sistema, a efectos de definir las condiciones que procurarán aportar una solución al problema. A menudo se denomina medida del rendimiento del sistema o medida de efectividad a dicho criterio.

En los modelos matemáticos normativos la medida de efectividad se representa mediante una expresión matemática: la función objetivo.

Conseguir lo deseado de manera "determinística" (es decir, libre de riesgo) o "probabilística" depende de la influencia que puedan tener los factores no controlables en la determinación de los resultados de una decisión, y también en la cantidad de información que el tomador de decisión tiene para estimar el comportamiento de dichos factores.

Generalmente los responsables de administrar un negocio simplemente buscan que la resolución del modelo aporte alguna mejora en el nivel de rendimiento. Como contribución complementaria al buen juicio e intuición del decisor se plantea la "búsqueda de un objetivo" en el marco del modelo.

1.5.3. Proceso de formulación de un problema de optimización

Para formular un modelo normativo las propuestas varían según los autores que se refieran a dicho procedimiento.

Lo básico y elemental es la observación detallada de la realidad; puede que sea plasmada en un primer texto "borrador", al que se recomienda leer con atención varias veces con la finalidad de formular un Modelo Mental. Si se trata de un modelo normativo es factible identificar cuatro partes: un conjunto de variables de decisión, los parámetros, la función objetivo y un conjunto de restricciones.

A continuación, y a modo de lineamientos generales, se sugieren las siguientes etapas, adecuadas fundamentalmente para aquellos que al tomar decisiones están acostumbrados a pensar en términos de objetivos y medidas de desempeño.

• Definir objetivos y medidas de desempeño.

• Identificar entradas del modelo que influyen sobre el objetivo definido. Esta forma de trabajo conduce sin demasiadas dificultades a la definición de variables de decisión y parámetros, puesto que según los valores que adopten será su contribución al valor de la función objetivo.

• Consignar cuáles son las restricciones que ponen límite a las variables de decisión y a las medidas de desempeño, y serán las que encuadren el campo de soluciones factibles del problema.

1.6. Ejercicios de Aplicación Práctica

Ejercicio 1.6.1.

La empresa *Mequa SA* realiza la distribución entre almacenes de un mismo cliente dentro de nuestra ciudad. La distribución tiene asociados costos con cada recorrido. Una forma de visualizar estos recorridos es mediante una red.

a) Determine qué tipo de modelo permite representar la situación planteada. Si es factible presentar un modelo matemático, clasifíquelo en función de alguna dimensión de análisis mencionada en el texto.

b) Identifique las variables de decisión, los parámetros y la función que optimiza el modelo. No es necesario recurrir a simbología especial necesaria para el modelado; basta con hacer un relato de los elementos solicitados y sus componentes.

Ejercicio 1.6.2.

Considere detenidamente y en forma crítica las expresiones referidas a **Modelado** que se insertan a continuación.

a) Consigne si las expresiones son Verdaderas o Falsas. Fundamente brevemente la respuesta en caso de ser necesario.

1) En los casos de análisis cualitativo el juicio y la experiencia de un gerente son modelos cualitativos que él aplica para la toma de decisiones.

2) Al momento de resolver un modelo normativo y hacer que sus variables de decisión adopten un valor, se están tomando decisiones que resuelven el problema real modelado.

3) Quien construye un modelo vuelca en él toda la realidad del ambiente que está observando.

Ejercicio 1.6.3.

Sea el modelo de producción que se desarrolla a continuación, y en el que las variables x e y son representativas de las unidades a fabricar de teléfonos digitales de los modelos Senior y Lux, respectivamente.

$$\textit{Maximizar: } 4x + 5y$$

Sujeto a la restricción $3x + 2y \leq 283$

La empresa que planifica esta producción pretende obtener el máximo beneficio proveniente de sus ventas de los modelos Senior y Lux. La fabricación de referencia se encuentra restringida por la cantidad de placas electrónicas "AlfaCharlie de usos múltiples", de las cuales el modelo Senior utiliza 3 unidades, mientras que el otro modelo requiere sólo 2, y se dispone de un máximo de 150 unidades en el período que se está por planificar.

a) Consigne si las siguientes expresiones, referidas al **enunciado presentado**, son **V**erdaderas o **F**alsas. Fundamente brevemente la respuesta si es necesario.

1) Dado que el modelo contiene variables que representan unidades físicas (teléfonos), éste es un modelo físico.

2) Los valores 4, 5, 3, 2, y 283 son variables de decisión del modelo.

3) Por ser una descripción de la realidad en términos de relaciones matemáticas, el modelo se puede tipificar como descriptivo.

4) El mostrado en el enunciado es un modelo que se puede clasificar como analógico.

Ejercicio 1.6.4.

Se aproxima un fin de semana largo y Usted convoca a su familia para realizar un viaje de mini turismo. El destino propuesto es una ciudad que está a ***K*** kilómetros de distancia de su lugar de residencia.

A efectos de realizar una buena planificación confecciona un modelo matemático. La idea que lo guía es contar con un instrumento que permita estimar las gastos ***(g)*** en combustible que tendrá por ir hasta el lugar elegido para las vacaciones y retornar a la residencia habitual.

Se conoce que un litro de combustible cuesta $ 1,903 y, según el manual de uso del vehículo a utilizar, su consumo de combustible es de 0,11 litros por kilómetro recorrido. Con estos datos plantea el modelo siguiente: ***g= 1,903 . 0.11 . k***

a) Indique si el modelo está completo, o si correspondería agregarle expresiones que lo aproximen más a la realidad que se pretende reflejar. En caso que considere que está incompleto, incorpore no más de tres elementos que perfeccionen el planteo.

b) Dadas las siguientes oraciones incompletas, señale con cuáles de las opciones listadas a continuación conforman una expresión válida. (Puede haber más de una que satisfaga la condición).

I. El modelo presentado ***(g = 1.903 * 0.11 * k)*** es …

1) un modelo descriptivo.

2) un modelo simbólico.

3) un modelo estocástico.

4) descripto correctamente si se aplican todas las expresiones anteriores.

5) imposible de describir con las expresiones anteriores.

II. Para que el modelo presentado ***(g = 1.903 * 0.11 * k)*** pueda ser utilizado adecuadamente como modelo determinístico descriptivo requiere incorporarle …

1) Supuestos o aproximaciones en forma de parámetros.

2) Más variables de decisión.

3) Una función objetivo.

4) Cualquiera de lo consignado en las expresiones anteriores.

5) Nada de lo consignado en las expresiones anteriores.

c) Si en la parte **II** del inciso **b)** marcó las opciones **1), 2)** o **4)** consigne, en forma concisa, un ejemplo de lo que agregaría.

Ejercicio 1.6.5.

Cuando se confecciona un modelo se debe contar con los suficientes fundamentos teóricos para justificar cuáles son sus insumos incontrolables, cuáles las variables de decisión, y cuáles las relaciones que los vinculan y representan la realidad modelada. A continuación se inserta la descripción de una situación que Usted deberá analizar cuidadosamente para completar lo requerido más abajo.

"Quantum Heavy Metales" recibe una orden para producir la mayor cantidad posible de carcasas de aluminio que la empresa pueda entregar. El contrato especifica un precio de $4,85 por carcasa. El ingeniero de diseño de productos propone tres modelos alternativos para las carcasas (A, B y C), los que dan como resultado distintos tiempos de uso para la máquina y costos de material. Los costos de material difieren debido a las distintas cantidades de desperdicio. Datos relacionados con tales ítems así como el costo por minuto de procesamiento se listan en la tabla siguiente.

Diseño de Producción	Tiempo de Máquina (en minutos)			Costo de Material
	Corte	Estampado	Terminación	
A	0,40	0,70	0,50	$3.355
B	0,80	1,00	0,30	$4.150
C	0,35	0,60	0,75	$3.005
Costo/min	$0,20	$0,30	$0,10	

El cliente quiere recibir la entrega después de un mes de firmar el contrato. Con base en los compromisos actuales de la empresa, el gerente de producción pronostica que la planta tiene capacidades de hasta 90 horas de tiempo de máquina cortadora; 140 horas de tiempo de estampado y 120 horas para terminación. El problema del ingeniero de producción consiste en determinar cuántas unidades de cada diseño fabricar para garantizar la entrega dentro de los términos del contrato.

a) Marque con **X** la intersección de fila y columna para indicar con qué ítem necesario para formular un modelo normativo (variable de decisión, función objetivo, restricción, parámetro) se identifica cada una de las expresiones, referidas al modelo presentado. Si no es posible la identificación consignar que no es aplicable en esta modelización.

Expresión	Variable de decisión	Función objetivo	Restricción	Parámetro	No aplica
Máximo de horas mensuales disponibles de "Corte"					
Maximizar la cantidad de carcasas fabricadas					
Cantidad de carcasas "diseño C" a producir en el mes					
Costo por minuto de máquina de "Estampado"					
$4.150					
Precio de venta de cada carcasa					

1.7. Apéndice

1.7.1. Modelos determinísticos

La **programación lineal** es una herramienta que ha probado su idoneidad para seleccionar alternativas en problemas de decisión, y por consiguiente se la aplica en una gran variedad de entornos. Sería imposible enumerar aquí la cantidad de aplicaciones; a continuación se indican algunas de ellas para las áreas funcionales más importantes de una organización.

<u>Finanzas:</u>

Es aplicable en problemas de selección del *mix* de carteras de inversiones. La variedad de carteras suele ser importante y requerir el agregado de muchas restricciones.

Otro problema de decisión implica determinar la combinación de métodos de financiación para una cantidad de productos cuando existe más de un método de financiación disponible. El objetivo puede ser maximizar las ganancias totales cuando las ganancias de un producto determinado dependen del método de financiación. Por ejemplo, se puede financiar con fondos internos, con deuda a corto plazo o con financiación intermedia. Puede haber limitaciones con respecto a la disponibilidad de cada una de las opciones de financiación, así como también restricciones financieras que exijan determinadas relaciones entre las opciones de financiación a los efectos de satisfacer los términos y condiciones de los préstamos bancarios o financiación intermedia, o bien exigencias sobre ratios extraídos de los estados contables de la organización. También puede haber límites con respecto a la capacidad de producción de los productos. Las variables de decisión serían la cantidad de unidades que deben ser financiadas por cada opción de financiación.

Administración de Producción y Operaciones:

En los procesos industriales es común que a partir de una materia prima en particular se obtenga una gran variedad de productos. En la industria petrolera, de la refinación del crudo puede obtenerse naftas, kerosén, nafta de aviación, aceite para calefaccionar, fuel oil y distintas clases de aceite para motor. Según el precio de cada producto y los tipos de crudo utilizados -más o menos pesados-, el problema es determinar la cantidad que se debería fabricar de cada producto. Técnicamente se tienen numerosas restricciones tales como límites de las capacidades de diversas operaciones de refinado, rendimiento de subproductos según el tipo de crudo a procesar, disponibilidad y costos de materia prima, demandas de cada producto y políticas gubernamentales con respecto a la fabricación de determinados productos.

En la industria de productos químicos y de procesamiento de alimentos existen problemas similares.

Recursos Humanos

Los problemas de planificación de personal también se pueden analizar con programación lineal. Por ejemplo, la demanda de servicios de personal temporario para instalación / reparación en la industria telefónica. La programación de dotaciones para las empresas de transporte aéreo o terrestre; las restricciones, además de la cantidad de personal disponible deben tener en cuenta la ubicación de cada persona después de un viaje, disposiciones legales sobre descanso del personal, etc. Otro caso típico lo constituye la organización de guardias en turnos rotativos que deben cubrir necesidades mínimas con fluctuaciones horarias (durante el día) o diarias (durante una semana).

1.7.2. Modelos probabilísticos

Estos problemas constituyen casos de toma de decisiones arriesgadas, y en los ellos debe tenerse especial cuidado al modelar, para no incurrir en errores debido a alguna de las siguientes causas que suelen afectar el resultado del proceso: presunciones falsas, no tener una estimación exacta de las probabilidades, depender de las expectativas, la existencia de dificultades para medir la función de utilidad, y los errores de pronóstico.

Cabe distinguir entre los casos de pura incertidumbre de aquellos en los que es posible aplicar alguna distribución de probabilidad conocida (teórica o derivada de la observación de frecuencias).

1.7.2.1. Toma de decisiones con pura incertidumbre

El dominio de los modelos de análisis de decisiones está entre dos casos extremos, en función del grado de conocimiento que se tenga sobre el resultado de las acciones. La probabilidad es el instrumento que permite medir las chances de que un evento ocurra, y expresa el grado de incertidumbre. El lado determinista tiene probabilidad 1 (o cero), mientras que el otro extremo tiene una probabilidad plana (todas igualmente probables). Por ejemplo, si se tiene certidumbre de la ocurrencia (o no ocurrencia) de un evento, se usa la probabilidad uno (o cero). Si se tiene incertidumbre, entonces es razonable aplicar la expresión "En realidad no sé; por lo tanto, puede o no ocurrir con probabilidad 0,50"; se evalúa en forma subjetiva la probabilidad (noción de Bayes).

De lo expuesto se infiere que la probabilidad siempre depende de cuánto conoce el decisor. Si sabe todo lo que puede saber, consignará probabilidades 1 o 0.

Cuando las decisiones se toman con pura incertidumbre el decisor desconoce los resultados de los estados de la naturaleza y/o es costoso obtener la información necesaria. En tal caso, la decisión depende meramente del tipo de personalidad que tenga el decisor y, consecuentemente, de la postura que adopte ante la incertidumbre. Así, se tendrán los siguientes comportamientos (criterios para decidir) según los tipos de personalidad al momento de tomar decisiones con pura incertidumbre:

• **Pesimismo o Criterio Conservador (o Maximin):** se aplica una hipótesis de mínima en la que al evaluar los resultados se supone que, a lo sumo, se conseguirá lo mejor de todo lo peor. La postura lleva implícito el razonamiento que "las cosas malas siempre me suceden a mí".

• **Optimismo o Criterio Agresivo (o Maximax)**. En oposición al anterior, existe predisposición a conseguir lo mejor de lo mejor, y "las cosas buenas siempre me suceden a mí".

• **Con coeficiente de Optimismo (Criterio o Índice de Hurwicz):** Procura un punto intermedio sin caer en los extremos de los criterios anteriores. Se basa en la asignación o estimación de un coeficiente de optimismo que caracteriza a esa actitud "ni demasiado optimista ni demasiado pesimista".

• **Mínimo arrepentimiento (o Criterio de Pérdida de Oportunidad de Savage):** El decisor, desde su posición, evalúa las oportunidades perdidas ("costos de oportunidad"), las cuales le producen lamentaciones y pesares. Dado que, quien debe decidir detesta las lamentaciones y se preocupa por minimizar las situaciones deplorables, la decisión a tomar debe ser tal que valga la pena repetirla. Como resultado, el individuo interpreta que "Sólo debería seleccionar y hacer las cosas que siento que podría repetir con placer".

• **Yo no sé nada (o Criterio Laplace):** En este caso la apreciación de la situación consiste en considerar que todos los estados de la Naturaleza tienen igual probabilidad. Ante el desconocimiento sobre cómo se comportará la Naturaleza, todo es igualmente probable.

1.7.2.2. Toma de decisiones con riesgo

Cuando el decisor posee algún conocimiento sobre la ocurrencia de los posibles estados de la Naturaleza puede asignar alguna estimación subjetiva de probabilidad a la ocurrencia de cada estado. En estos casos, el problema se clasifica como de toma de decisiones con riesgo. Entre estos modelos se cuentan aplicaciones de la Teoría de la Decisión, la administración de proyectos con tiempos estimados de duración de las tareas (PERT), y la teoría de las colas (o líneas) de espera con comportamientos aleatorios de incorporación a la cola y/o de los tiempos de prestación del servicio a quienes proceden de las colas.

1.8. Bibliografía

ANDERSON, D., SWEENEY, D. Y WILLIAMS, T. (1993). *Introducción a los modelos cuantitativos para Administración*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

EPPEN, G. D., GOULD, F. J., Y OTROS (2000). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa* - Creación de modelos de decisiones con hojas de cálculo electrónicas. México, Prentice-Hall.

MARTÍNEZ, E. Y ESCUDEY, M. (1998). *Evaluación y Decisión Multicriterio. Reflexiones y Experiencias*. Santiago de Chile, Ed. Universidad de Santiago.

MATHUR, K. Y SOLOW, D. (2000). *Investigación de Operaciones - El arte de la toma de decisiones.* México, Prentice-Hall.

TAHA, H. (1994). *Investigación de Operaciones.* México, Ed. Alfaomega.

2

Capítulo 2

Teoría de Redes – Programación de Proyectos por Camino Crítico

2

2.Teoría de Redes – Programación de Proyectos por Camino Crítico.

2.1. Distintos tipos de algoritmos aplicables

2.1.1. Conceptos y definiciones previas

Existen diversas situaciones de la realidad que pueden modelarse mediante la utilización de redes, tales como las relacionadas con producción, distribución, administración de proyectos, administración de recursos, etc.

El planteo de las situaciones problemáticas mediante redes permite apreciar visualmente el modelo formulado, y aporta significativamente a su mejor resolución.

Los modelos de redes o grafos no se agotan en lo que se presentan acá. Las situaciones de la vida real son muy complejas, y seguramente el lector sabrá apreciar si las puede modelar y resolver con estos algoritmos o debe apelar a instrumentos más complejos de modelado.

Antes de avanzar en la descripción de los distintos tipos de redes que se pueden presentar bajo este título, es conveniente describir algunos términos que son de utilización común en estos modelos.

2.1.2. Glosario

Como primera definición cabe consignar que el modelo se basa en una representación gráfica, con el agregado de referencias adicionales, que varían según el tipo de red aplicada.

Red: es un conjunto de puntos (nodos) con uniones entre ellos (arcos).

Nodo (o vértice): se utiliza para identificar puntos dentro de la red, y se representa (generalmente) con círculos.

Arco (ligadura, arista o rama): es una línea que une nodos dentro de la red, y puede contener puntas de flecha para indicar el sentido de circulación de la información o datos.

Arco dirigido: el flujo a través de él se admite en una sola dirección, y cuando se lo menciona (más allá de que tenga forma de flecha) se lo identifica con la referencia "nodo desde-nodo hasta" para indicar dicho sentido del flujo. Genéricamente, el "nodo desde" se designa con la letra ***i,*** y el "nodo hasta" se nombra con ***j.***

Arco no dirigido: a diferencia del mencionado antes, éste permite el flujo en ambas direcciones.

Red dirigida: es un caso especial, en la que sólo existen arcos dirigidos.

Red no dirigida: en este tipo de red todos sus arcos son no dirigidos.

Trayectoria (ruta o camino) entre dos nodos: está formada por una sucesión de arcos distintos que conectan a los nodos y en esta sucesión no se repiten nodos; es decir, que para vincular los nodos extremos de la ruta, puede ser que se pase por varios que están situados en posiciones intermedias.

Trayectoria dirigida de *i* a *j*: Cuando la sucesión de arcos vinculados mediante los nodos permite que el flujo ocurra entre ***i*** y ***j***.

Trayectoria no dirigida entre dos nodos: En este caso la sucesión de arcos es tal que el flujo entre los extremos es factible en cualquiera de los sentidos.

Ciclo: Cuando se traza una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo.

Nodos conectados: se los puede denominar de tal forma cuando existe al menos una trayectoria no dirigida entre los nodos. No es necesario que la trayectoria sea dirigida, sino que exista vinculación entre los nodos.

Red conexa: cada nodo participante de la red está conectado de alguna manera con al menos uno de los otros nodos.

Árbol: se denomina de esta manera a una red en la que, a medida que se agregan nodos, los arcos que se incorporan no forman ciclos.

2.1.3. Problema de la ruta más corta

En una red conexa no dirigida, en la cual se designa como “origen” y “destino” a dos de los nodos. Hay una distancia no negativa en cada uno de los arcos, el modelo tiene como objetivo encontrar **la ruta (trayectoria) más corta entre origen y destino.**

El algoritmo que se aplica sobre una red con las características descriptas es relativamente sencillo (Rotulación de nodos según lo especificado por el Algoritmo de Dijkstra), y se basa en procedimientos recurrentes de resolución. Existen variaciones adecuadas para la resolución cuando se elimina la condición de no negatividad de las distancias, o cuando se admite que la red sea dirigida.

2.1.4. Problema del árbol de extensión mínima

En este caso también se trata de una red conexa no dirigida con distancias (o alguna otra medida de longitud) no negativa en cada uno de los arcos, pero el modelo tiene como objetivo encontrar **la menor longitud total** entre todos los conjuntos de arcos que proporcionen conexiones entre cada par de nodos.

En el caso de tener ***n*** nodos la red, bastan ***n -1*** arcos para satisfacer la condición citada en el párrafo anterior. Se ubican tales arcos de manera que formen un árbol de expansión.

La aplicación de un algoritmo codicioso, en este problema, conduce a una solución óptima.

2.1.5. Problema del flujo máximo

La red que se puede tipificar de esta manera es conexa y dirigida, y cuenta con un solo Origen y uno solo nodo Destino. Los nodos restantes (intermedios) son de trasbordo; éstos no retienen elementos (no almacenan) y simplemente despachan lo recibido.

Como se trata de pasar desde el Origen hasta el Destino con la máxima cantidad posible de elementos (vehículos, mensajes, líquidos, carga, etc.), para cada ruta que puede conectar esos dos nodos su capacidad máxima está dada por la mínima capacidad que existe entre todas las ramas que la componen. Esto se debe a que la capacidad de cada nodo de trasbordo limita el flujo entre arcos sucesivos, y de todos los nodos de trasbordo el de menor capacidad define el número máximo de elementos que circulará por esa ruta.

Para su resolución se puede plantear como un programa lineal, pero también es factible aplicar un algoritmo (Red de Flujo Máximo) que analiza cada una de las trayectorias que pueden satisfacer el objetivo, y mediante la recurrencia del procedimiento crece la cantidad que circula por la red hasta que es imposible mejorarla cuando se llega al máximo flujo que admite.

2.2. Redes PERT y CPM

2.2.1. Conceptos básicos: planificación, programación y control

Para describir las técnicas que se despliegan bajo este título corresponde, en primer lugar, consignar una definición de qué se entiende por "proyecto". A tal fin, se consignará lo especificado por el *Project Management Institute (PMI)*, organización que, en base a su trayectoria y dedicación al tema, ha convertido sus recomendaciones en estándares de las técnicas de gestión de proyectos.

La definición mencionada indica que un **proyecto es un emprendimiento temporario con la finalidad de obtener un producto o servicio único.** Esto es que: tiene fechas definidas de comienzo y terminación, y es completado cuando se obtienen los objetivos perseguidos (o se determina que ya no es viable). Puede agregarse que siempre se contará con un patrocinador, quien proveerá los recursos necesarios para obtener los resultados, y para quien un proyecto exitoso cumplirá a satisfacción sus expectativas.

La **Administración (dirección, gestión o gerenciamiento) de proyectos** es el instrumento adecuado para la gestión de todos los aspectos relacionados con proyectos. La definición que provee el *PMI* es: **la aplicación de conocimientos, habilidades, herramientas y técni-**

cas de administración a proyectos, para satisfacer requerimientos y expectativas de los distintos interesados y afectados (*stakeholders*).[2]

La Gestión de Proyectos implica actuar para satisfacer los requerimientos y expectativas mencionados, aplicando un balance entre demandas de tiempo, costos y calidad. Estos tres ítems componen la que, en este ámbito, se denomina "Triple Limitación". Estas tres variables interactúan mutuamente a modo de vasos comunicantes, representado generalmente a objetivos contrapuestos.

Se trata de aplicar metodología científica al planeamiento, programación y control de proyectos mediante la utilización de un conjunto de métodos y técnicas.

Según el *PMI* se pueden reconocer cinco grupos de procesos, que organizan y describen el trabajo relacionado con un proyecto: Inicio o Estructuración, Planificación, Ejecución, Monitoreo y Control, y Cierre. Los proyectos se componen de fases, y dentro de cada una es posible reconocer estos cinco grupos de procesos, los cuales se interrelacionan conforme lo muestra la Figura 2.1.

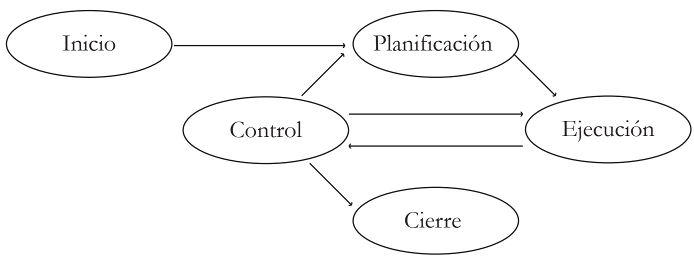


Figura 2.1. Interrelación entre los grupos de procesos de un proyecto. Fuente: PMBOK

En el proceso de **planificación,** a partir de los objetivos planteados, se produce documentación que abastecerá a -y de la cual dependerán- los demás grupos de procesos. Entre otra, se obtiene información acerca de:

- Definición de cuáles serán las actividades a ejecutar.
- Identificación de la secuencia de tales actividades.

2 La traducción literal, al idioma Castellano, del término *stakeholder* (de amplia difusión en la literatura vinculada con la Administración de organizaciones) corresponde a "apostador". Se lo aplica, entonces, figuradamente en tal sentido, al identificar a aquellas personas o entes que tienen interés o participan o son afectados ("apuestan") por el éxito de un negocio o emprendimiento.

• Estimación de la duración de las actividades.

• Planeamiento de recursos necesarios para ejecutar las actividades.

• Costos: Estimación y presupuesto, con especificación de montos y momentos en que serán necesarios.

• Desarrollo del programa tentativo de ejecución de cada actividad (Fechas/Calendario) y, consecuentemente, los plazos totales para la efectivización del proyecto en su conjunto. El calendario de fechas confeccionado es la base de la **programación**, que puede ser: **1) Programación Primaria**, en la que se consignan el momento en que se ejecutará cada una de las tareas, y la asignación de recursos a tal fin. **2) Programación Definitiva**, derivada de la programación primaria, a partir de ajustes en la ejecución prevista para las actividades. Se procura la asignación óptima de recursos en el proyecto al eliminar la simultaneidad de su utilización, mediante mejoras en la coordinación, para un mejor aprovechamiento de tiempos y recursos.

Tal como lo indica su nombre, en el momento de la **ejecución** se procede a plasmar en la realidad lo que se ha planificado y programado previamente.

Obviamente el paso consignado en el párrafo anterior podría tener lugar sin necesidad de los dos que le preceden. Sin embargo, aquí se puede apreciar la conveniencia de aplicar estas técnicas ya que, al haberse establecido duraciones de tareas, fechas y utilización de recursos en forma previa, es posible ejecutar el proceso de **Control**. Éste permite evaluar si la realidad se está desenvolviendo según lo previsto o no, y en función de esto establecer las medidas correctivas que sean necesarias.

Precisamente, como consecuencia del control ejercido en el proceso referido antes, siempre y cuando sea necesario se puede proceder a la **Reprogramación** (nueva Planificación), haciendo ajustes a los aspectos que causaron desvíos en la ejecución del proyecto. En tales circunstancias, al tomar las decisiones emergentes se ponderan las repercusiones que habrá sobre el proyecto, al actuar sobre las variables que participan de la "Triple Limitación".

Los conceptos que se desarrollarán en este capítulo constituyen una fracción del proceso de "Planificación".

En apoyo de la Gestión de Proyectos se utilizan PERT y CPM , que son técnicas basadas en la representación de modelos mediante redes. A diferencia del método Gantt -que fuera su predecesor- tienen como característica la separación de los procesos de planificación y programación de las actividades constitutivas del proyecto, y permiten una clara visualización de las relaciones de precedencia entre las actividades representadas en el grafo.

La aplicación de las técnicas PERT y CPM[3] presenta los siguientes aspectos relevantes:

• Posibilitan actuar por excepción, sobre aquellos elementos que, sujetos a control permanente durante la ejecución, aparecen como discrepantes con lo programado.

• Facilitan la coordinación entre los responsables de subproyectos cuando se asignan a distintos grupos -como fracciones de un proyecto más amplio, cada uno con sus respectivos programación y control.

• Concomitantemente con lo apuntado, durante la ejecución y control permiten conocer los grados de avance real en relación con lo planeado, así como comparar la evolución de los costos reales contra planeados. Entre otros, este análisis es posible mediante la aplicación de la Gestión del Valor Ganado (*EVM o Earned Value Management*, en inglés), metodología que simplemente se citará aquí a modo de presentación, y se deja a cargo del lector interesado la profundización de sus conceptos.

• Ante retrasos en la ejecución permiten: a) identificar claramente qué tareas deberían reprogramarse; b) visualizar por anticipado los efectos que tales alteraciones tendrían sobre los costos, sin necesidad de esperar a recalcularlos al momento de su efectiva ocurrencia en la realidad.

• Si las duraciones de las tareas se basan en estimaciones, como en el denominado "PERT Tiempo", permiten relacionar probabilidades y duración estimada del proyecto; y, con el auxilio de técnicas de simulación, ampliar la información disponible para la toma de decisiones.

• Suministran, información valiosa a quien tiene a cargo la gestión, sin decidir ni dirigir por sí mismas. Por ejemplo: fecha estimada de fin del proyecto y detalle de actividades condicionantes; primeras y últimas fechas de inicio y fin de cada actividad; detalle de actividades que pueden (o no) retrasarse en su inicio y/o finalización; carga y asignación de recursos (y costos involucrados) en cada momento del cronograma planeado del proyecto.

3 PERT y CPM son siglas formadas por las iniciales de las frases *Program Evaluation and Review Technique y Critical Path Method*, respectivamente. Véase, en este mismo capítulo, el Apéndice 2.5.1. "Otras técnicas aplicables a la administración de proyectos", para interiorizarse sobre orígenes y características que las diferencian.

• Cuando la dirección conoce la información detallada en el punto precedente puede, entre otras: concentrar su atención en las tareas que lo exigen, aunque sin descuidar las restantes; facilitar el seguimiento y control por cada sector responsable de las distintas actividades; verificar permanentemente que se cumpla con la asignación de recursos humanos y materiales al proyecto según lo programado y, eventualmente, mejorar su asignación; efectuar las previsiones correspondientes para el suministro de materiales y planificar el flujo financiero del proyecto en función de lo previsto para cada momento del mismo; analizar diferentes alternativas para la duración del proyecto, cada una de las cuales tendrá distintos costos de ejecución.

2.2.2. El modelo expresado en una red

En principio el objetivo del modelo es obtener el menor tiempo posible de ejecución de todo el proyecto. Luego se incorporarán costos, para analizar un nuevo modelo de optimización.

Las características citadas, de los modelos de red, aplican aquí: los datos se grafican mediante nodos y arcos. CPM y PERT se incluyen entre las técnicas que consignan las actividades en los arcos, y los nodos representan momentos (sucesos o acontecimientos) dentro del proyecto.[4]

Los arcos aquí tienen dos características principales: 1. son dirigidos, por tener implícito en su contenido el transcurso del tiempo necesario para ejecutar una tarea; 2. su longitud no tiene relación directa con el tiempo necesario para finalizar la tarea representada.

Para facilitar la interpretación, uso y consistencia de la red graficada, conviene seguir algunas reglas, tales como: graficar sólo un arco por actividad y entre dos nodos sólo trazar un arco; identificar un único acontecimiento inicial y un único acontecimiento final del proyecto; establecer (y controlar posteriormente sobre) el correcto trazado de las relaciones de precedencia y simultaneidad en la ejecución de las tareas, mediante preguntas sobre cuáles son las actividades predecesoras inmediatas, cuáles las sucesoras inmediatas y cuáles pueden tener lugar en forma simultánea;

4 Para una confrontación con otras técnicas que utilizan diferente forma de representación véase, en este mismo capítulo, el Apéndice 2.5.1. "Otras técnicas aplicables a la administración de proyectos".

enumerar los nodos representativos de sucesos de manera que para cada tarea sea ***i*** (momento de inicio) menor que ***j*** (fecha de finalización); identificar cada actividad que llega a o sale de un nodo y describirla (o nombrarla con un código) sobre el arco que la representa.

2.2.3. Camino crítico

2.2.3.1. Conceptos involucrados, cálculo y aplicación

Ya se expresó, que al aplicar las duraciones de las tareas de todo el proyecto, se busca obtener la menor duración de éste. El algoritmo a aplicar debe buscar tal objetivo.

Los cómputos para determinar cuánto durará el proyecto pueden hacerse de varias formas -que en realidad son diferentes maneras de expresar los mismos cálculos-: hacerlo sobre la red en sí misma; utilizar matrices triangulares; o con tablas o programas lineales.

Se expondrán conceptualmente algunos temas importantes en la rutina de determinación de la fecha de finalización del proyecto.

2.2.3.2. Fechas más tempranas y más tardías

Para comenzar, se hace constar que al primer nodo de la red, que representará el suceso de inicio de ejecución del proyecto se la asigna la fecha 0 (cero), y a partir de ella se cuentan los demás momentos, que servirán para ubicar a todas las tareas dentro de ese calendario que es el programa de realización del proyecto.

Conviene definir dos conceptos esenciales para interpretar qué se entiende por camino crítico:

a) Fecha más temprana (o primera fecha): es aquella fecha o momento más temprano en el cual puede ocurrir un suceso y que, a su vez, posibilite que se terminen todas las tareas que lo preceden según la planificación. Por ejemplo, la "Fecha más temprana de inicio" de una tarea refiere al momento más temprano en que se la puede comenzar a ejecutar.

b) Fecha más tardía (o última fecha): es la fecha o momento más tardío (o atrasado) en el cual se puede dar un suceso. En el referido ejemplo de iniciación de una tarea, el momento más tardío en que puede hacerlo, es aquel más alejado de la fecha de inicio del proyecto que permite ejecutar dicha tarea (y todas las que le siguen en la secuencia temporal) sin que se afecte la fecha de terminación del proyecto. O sea que el proyecto no se terminaría en la fecha prevista si la tarea de referencia comenzara después de la fecha apuntada como "Fecha más tardía de inicio".

La forma de calcular las fechas mencionadas es sencilla:

1. En primer lugar se calculan las fechas más tempranas. Para esto, a partir de un dato conocido (fecha más temprana para un nodo que ya la calculó) se suma la duración de la tarea trazada con nacimiento en él, para calcular la fecha más temprana del nodo conectado que le sigue en la red, que a su vez será fecha más temprana de finalización de la tarea en cuestión.

Cuando a un nodo confluye más de un arco (o sea, varias tareas aportarían su fecha más temprana de finalización para calcular la del nodo bajo supervisión), para cada arco se calcula la fecha más temprana de terminación (mediante la suma citada en el párrafo anterior) y de todas ellas se toma el mayor valor para asignarlo como fecha más temprana del nodo que se trate. Esto corresponde que sea así en virtud de que, de esa manera, la fecha más temprana de ocurrencia de tal suceso permite que todas las tareas que le preceden finalicen antes de que llegue la fecha indicada o, a lo sumo, en esa fecha.

El proceso mencionado sigue hasta llegar a calcular la fecha más temprana del momento final del proyecto (representada en el nodo final). Según se desprende de esta descripción, dicha fecha corresponde a la fecha más temprana en que puede finalizar la ejecución del proyecto, y como tal indica **la menor duración que puede tener éste de manera que se puedan finalizar todas las tareas que lo componen.**

2. Se sigue con el cálculo de las fechas más tardías. Calculada la fecha más temprana de finalización del proyecto, se la asigna al nodo final del proyecto, pero ahora bajo la denominación "fecha más tardía" de finalización del proyecto.

Se conoce cuál es el momento más tardío en que puede terminar el proyecto, y se sigue un camino inverso al citado en **1**. Se calcula para cada momento su fecha más tardía de ocurrencia: a la fecha más tardía de finalización de cada tarea se le resta la duración de ésta. Este cálculo en retroceso busca las fechas más tardías de inicio de cada tarea, y a su vez permite calcular las correspondientes a momentos más tardíos de inicio de las que preceden a las ya calculadas.

Cuando, en la ejecución del algoritmo citado, se observa que desde un mismo nodo se trazan varios arcos que llegan a diversos nodos (motivo por el cual presentarían los cálculos con distintos datos y para un mismo nodo) se procede a seleccionar como fecha más tardía de ese momento a aquella que dio el menor valor calculado como fecha más tardía de inicio de todas las actividades que nacen en el mismo momento (nodo). De tal manera se garantiza que todas las tareas que inician en tal momento (y las que les siguen en la secuencia) se podrán realizar sin alterar la fecha de finalización del proyecto.

2.2.3.3. Holguras y criticidad

El concepto **criticidad** se refiere a una característica de la que participan algunas tareas del proyecto: **la imposibilidad de demorar la finalización** de dichas tareas (ya fuera por iniciarse más tarde o por alargarse la duración con respecto a lo programado) pues hacerlo significaría terminar el proyecto más tarde de la fecha calculada como más temprana del nodo final.

Para poder identificar tales tareas (ya terminado el recorrido de ida y vuelta sobre la red, que permite calcular las fechas más tempranas y tardías para cada nodo y, consecuentemente, de inicio y fin de cada tarea), se calculan las discrepancias que existen en cada momento de la red entre ambos tipos de fecha.

La diferencia de valores entre fechas más temprana y más tardía para un nodo se conoce con el nombre de “holgura de suceso”.

La inexistencia de holgura en un suceso es un indicio muy importante en la administración de proyectos mediante redes, y lleva a definirlo como **nodo crítico**.

Tal hecho constituye la condición necesaria para que se esté en presencia de una **tarea crítica** si los nodos en que se inicia y termina son críticos.

Para confirmar que efectivamente se está en presencia de una actividad crítica, se debe verificar la condición suficiente, dada por la inexistencia de "holgura de actividad". Matemáticamente, si el resultado de la fecha más tardía de finalización menos la fecha más temprana de inicio menos la duración de la tarea es nulo (cero), se puede afirmar que dicha tarea es crítica.

Según las denominaciones provengan de PERT o CPM, indistintamente se encontrarán en la bibliografía referencias a "holguras" o bien a "márgenes" o "flotantes", para referirse al concepto descripto en párrafos precedentes.

2.2.3.4. El camino crítico y su aplicación

El cálculo mencionado indica que, si la holgura de la actividad es cero, no existe para tal tarea la posibilidad de demorarse en su inicio (si se ejecutara en el tiempo previsto) ni de alargar su duración (aún cuando se inicie en su fecha más temprana de inicio), ya que provocarían el corrimiento de la fecha más temprana de finalización de la tarea. Como ya se ha visto, dicho valor condiciona a otros que se deben calcular a posteriori; por este motivo puede terminar afectada la fecha más temprana de finalización del proyecto.

El denominado **camino crítico** (o ruta crítica) está constituido por todas las tareas que, trazadas desde el momento inicial hasta el momento final del proyecto, carecen de holgura de actividad[5]. Esta **sucesión de tareas críticas** es la que debe merecer la mayor de las atenciones de quien administra el proyecto. Esto se debe a que cualquier retraso en el inicio o ejecución de tales tareas significará retrasar la finalización del proyecto en su conjunto. Esto no releva de vigilar también el desempeño de las demás tareas, que participarán del esquema de control por excepción mencionado más arriba.

La longitud del camino crítico se resume en dos conceptos muy concretos: representa al menor tiempo posible de terminación del proyecto y, a su vez, el mayor tiempo permisible a tal fin.

[5] Comúnmente se hace referencia a un camino crítico sin mayores distinciones -como si no tuviera ramificaciones-, pero puede ocurrir que se identifique más de una secuencia de tareas críticas que unen los momentos de inicio y fin del proyecto. Es decir, que puede haber más de un camino crítico; obviamente, su duración será la misma y estará dada por la fecha más temprana calculada para el nodo final.

2.2.4. Proyectos con tiempos inciertos en las actividades

2.2.4.1. El futuro no es tan cierto como parece

En los títulos anteriores se ha trabajado con redes en las que las duraciones de las tareas componentes de un proyecto se suponen conocidas con certeza. Es decir, no se ha tenido en cuenta que pueden existir proyectos donde no sea posible determinar con precisión la duración de las distintas tareas que lo integran. En tal caso, al no existir certeza en los tiempos, éstos deberán obtenerse a partir de estimaciones, lo que confiere características aleatorias o estocásticas al modelo.

Tal situación se da cuando se trata de proyectos de primera ejecución, ya que -por contener tareas que nunca se han realizado- no se cuenta con una historia que permita afirmar cuál será su duración al momento de ejecutarse.

La existencia de tal tipo de inconveniente en la estimación de duración de actividades llevó a la creación de PERT como técnica de gestión de proyectos. Esta característica fue una de las que lo diferenciaron de CPM[6] en sus inicios. En la actualidad las diferencias que había entre ambas técnicas han pasado a ser, en gran parte, meras referencias anecdóticas.

Lo concreto es que, si hay incertidumbre en la estimación de las duraciones de las tareas debido a la naturaleza aleatoria de aquellas, se hace necesario (para que tales tiempos sean tratados como variables aleatorias) conocer de ellos:

a) la distribución de probabilidades aplicable a cada una de estas variables;

b) las medidas de tendencia central y de dispersión que pueden caracterizarlas, tales como la esperanza matemática y la varianza.

2.2.4.2. Distribuciones de probabilidad aplicables a la variable “duración de tareas”

Al presentarse una situación como la descripta en este título puede ocurrir que:

6 Para mayor abundancia de reseña histórica sobre PERT y CPM véase, en este mismo capítulo, el Apéndice 2.5.1. “Otras técnicas aplicables a la administración de proyectos.”

1. Se conozcan las distribuciones teóricas aplicables a los tiempos de duración de las tareas. Esto ocurre cuando las tareas no son tan nuevas o se las puede asimilar a otras ya ejecutadas en alguna oportunidad, y se posee experiencia e historia.

Si se denomina con i al nodo que representa el inicio de una tarea y con j el correspondiente a su finalización, para la tarea ij se podrá contar con la media ($\bar{t}_{ij}$) y la varianza (σ_{ij}^2), previa obtención de suficiente información que permita contrastar la hipótesis de que la duración de una determinada tarea se distribuye según una ley establecida. Estas hipótesis no deberán efectuarse en forma arbitraria sino que, para tener validez estadística, se deberán someter a un Test de Distribución, para establecer si tal hipótesis es válida (o no, y en este caso proceder a cambiarla). Este proceso debe repetirse para cada tarea cuya duración se presenta incierta, lo que implica un trabajo bastante complejo para un proyecto de cierta envergadura; no solo por su abundancia de cálculos, sino también por la cantidad de información requerida.

2. No sea posible conocer las distribuciones teóricas aplicables. De lo mencionado al final del inciso 1 se deduce que esto puede ser bastante común. Para tal caso, los creadores del método PERT idearon una metodología de trabajo, deducida de estudios empíricos. Tales estudios concluyeron que "las duraciones de las tareas se ajustan a una distribución Beta".

En la primera situación se está frente a un caso de riesgo, ya que es posible ajustar la distribución de los datos a una expresión teórica. En cambio, en la segunda se tiene un caso de incertidumbre por no ser posible tal ajuste; sin embargo, por motivos que se explayarán más adelante, de conformidad con el Método PERT se la tratará con un criterio similar a la situación de riesgo.

2.2.4.3. Distribución Beta en la estimación de las duraciones de tareas

Frecuentemente resulta conveniente expresar una ley de distribución probabilística mediante estadísticos que la representen (como, por ejemplo, mediante valor medio y desvío estándar en Gauss y Poisson). En Beta tales valores no conducen a una única distribución, según se verá en el Apéndice teórico de este capítulo.

A efectos de una aplicación práctica y -ya mencionado antes- con raíz eminentemente empírica, se puede consignar:

• tendrá un valor modal, designado con ***M***,

• si se adoptan algunos supuestos se pueden calcular media $(E_{(T)} = \bar{T})$ y varianza ($\sigma^2_{(t)}$) de la distribución.

$$E_{(t)} = \frac{A + 4M + B}{6} \qquad \sigma^2_{(t)} = \left(\frac{B - A}{6}\right)^2$$

Se explica en el Apéndice de este capítulo que la curva es acampanada; puede ser simétrica o no, y la probabilidad toma sus valores mínimos en los valores ***A*** y ***B*** de la variable ***t,*** y tiene su valor modal en ***M***. Para valores de la variable menores que ***A*** o mayores que ***B*** la probabilidad es cero.

Para que se pueda aplicar la Distribución Beta de Euler a las duraciones de las tareas de un proyecto se debe contar, para cada una de las actividades, con la estimación de tres tiempos de ejecución. Los responsables de ejecución, o quienes tienen alguna experiencia en haber realizado tareas similares, serán los encargados de proveer tales tiempos a quien está a cargo de la planificación y programación del proyecto. Ellos son:

1. Tiempo Optimista (t_0): es la duración mínima que puede demandar la ejecución de la tarea ***i-j***, siempre y cuando se den las mejores condiciones. Se estima que la probabilidad de conseguir esta duración en la realidad es del 1%.

2. Tiempo Normal o más probable (t_m): es la duración que se tendría trabajando en condiciones normales, y que resultaría más frecuente si se repitiera un cierto número de veces la ejecución de la tarea: el tiempo que se indicaría si hubiese que estimar una sola duración.

3. Tiempo pesimista (t_p): corresponde al tiempo necesario para la ejecución de la actividad cuando se presentan grandes retrasos en el desarrollo de los trabajos, a excepción de casos extremos como catástrofes, huelgas generalizadas, etc., salvo que alguna de esas situaciones límites sea un riesgo normal para al tipo de tarea que se analizada.

Estas tres estimaciones de tiempo -de carácter subjetivo- se aplican en PERT con la distribución Beta con asimilación a estimadores de los valores mínimo, máximo, y modal de la variable ***t***.

Así, se tiene que:

$t_o = \hat{A}_{ij}$, o sea que es un estimador de ***A*** para la tarea ***i-j;***

$t_p = B_{ij}$, o sea que es un estimador de ***B*** para la tarea ***i-j;***

$t_m = M_{ij}$, o sea que es un estimador de ***M*** para la tarea ***i-j***;

A su vez, para estimar los valores correspondientes a media y varianza de la duración de una tarea con los conceptos asimilados, son de utilidad las siguientes fórmulas.

Si bien pueden estar afectadas por alguna imprecisión teórica, son prácticas por la sencillez que adoptan.

$$t_e = \frac{t_o + 4\,t_m + t_p}{6} \qquad \sigma^2_{(t)} = \left(\frac{t_p - t_o}{6}\right)^2$$

Siempre debe tenerse presente la naturaleza subjetiva de las estimaciones, por lo que es aconsejable asegurarse que éstas sean las mejores posibles: por ejemplo, consultar a más de una persona que conozca la actividad y que, en lo posible, emitan opinión independiente.

2.2.4.4. Consecuencias derivadas de las hipótesis admitidas en PERT

Tal como se consignara en el título anterior, la forma de estimar los tiempos de ejecución de cada actividad y la adhesión al ajuste a una distribución Beta a partir de conclusiones totalmente empíricas, han llevado a que algunos estudiosos del tema la observen con espíritu crítico.

Así, se ha anotado que la metodología y supuestos utilizados pueden conducir a los siguientes errores de estimación:

a) diferencia entre la distribución probabilística (real, verdadera o más adecuada) aplicable a la duración de una determinada tarea, y la función Beta adoptada.

b) errores en las estimaciones de los tiempos optimista, normal y pesimista.

c) errores de aproximación derivados de las fórmulas utilizadas para el cálculo del tiempo medio esperado y de la varianza.

Por esto, vale hacerse las preguntas que siguen:

1) ¿Cuál es el error cometido por suponer que la duración de una actividad sigue una distribución Beta?

2) Aún cuando se suponga que realmente siga a la distribución Beta y sean correctas las tres duraciones aportadas por los especialistas, ¿cuál es el error cometido por utilizar media y varianza calculadas con las expresiones aproximadas vistas antes?

3) Dado el supuesto de que realmente sigue a la distribución BETA y que los valores media y varianza son correctos, ¿cuál es el error cometido por aplicar valores de duración incorrectos?

Pero, por otra parte y también empíricamente, se ha comprobado que la conjunción de esos tres tipos de errores en el total del proyecto conducen a errores que no exceden del 15% en la estimación del tiempo esperado del proyecto y del 6% en la varianza calculada.

2.2.4.5. El plazo de ejecución del proyecto como variable aleatoria

Una vez que para cada tarea ***i-j*** se ha estimado su duración media t_{ij}, se calculan las fechas y camino crítico como si las duraciones hubieran sido aportadas en forma determinística. Se adopta como duración de cada tarea dicho valor medio.

De esta forma se obtiene un camino crítico. Para simplificar el análisis -no se afectan los conceptos desarrollados- se supondrá que existe un solo camino crítico en el proyecto. La suma de las duraciones medias de las tareas críticas que lo integran, dará la duración estimada del proyecto.

Tareas que lo conforman: $C_c = [(1, K_1), (K_1, K_2), \ldots, (K_{n-1}, n)]$

Duración total estimada para el proyecto será

$$D = E_{(t_{1,K_1})} + E_{(t_{K_1,K_2})} + \ldots + E_{(t_{K_{n-1},n})}$$

$$D = T_e$$

Como las duraciones consideradas son las medias de variables aleatorias, se concluye que se obtiene una nueva variable aleatoria T, suma de variables aleatorias.

El procedimiento aplicado remite a observar la propiedad que establece que la esperanza matemática de una suma de variables aleatorias es igual a la suma de las medias de dichas variables. En símbolos:

$$E_{(x_1+x_2+\ldots+x_n)} = E_{(x_1)} + E_{(x_2)} + \ldots + E_{(x_n)}$$

De aquí que el valor T_e calculado define la media de la variable aleatoria T, que es la duración esperada del proyecto; o sea la $E_{(T)}$.

Es de interés determinar la distribución que sigue la variable aleatoria T, y a tal fin es de utilidad el Teorema Central del Límite. Lo expresado por dicho teorema puede presentarse de la siguiente forma:

Si se tiene un conjunto de variables aleatorias independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con sus respectivas medias $\bar{x}_i$ y varianzas σ_i^2 (para $i = 1, 2, \ldots, n$), la variable aleatoria X que se obtiene como suma de dichas variables tenderá a distribuirse en forma Normal, en la medida en que el número de variables tienda a infinito; su media será igual a la suma de las medias y la varianza igual a la suma de las varianzas de las variables.

En síntesis, para que pueda consignarse de esta manera la forma de estimar la duración de un proyecto, las condiciones a cumplirse son:

1) Independencia entre las distintas variables aleatorias

2) Independencia en su distribución

3) El número de variables debe ser muy grande. Matemáticamente, esto es: $n \rightarrow \infty$

Aplicado el Teorema a una red de proyecto con duraciones inciertas para sus tareas, se pueden identificar los siguientes conceptos involucrados en el mismo:

• **Variables independientes:** son las duraciones de las distintas tareas (t_{ei}).

• **Valor medio y dispersión:** de la ley Beta surgen t_e y σ_i^2. De donde $\bar{x}_i = t_{ei}$ y $\sigma_i^2 = \sigma_{te}^2$

• **Suma de las variables:** la duración del proyecto será la suma de las duraciones de las tareas críticas (T_e).

• **Varianza:** la varianza de la duración del proyecto será la suma de las varianzas de las duraciones de las tareas críticas (σ_T^2).

Se concluye que la variable aleatoria duración del proyecto (T) se distribuirá en forma Normal con media $\boldsymbol{T_e}$ y varianza $\boldsymbol{\sigma}_T^2$, según las siguientes expresiones, donde $\boldsymbol{i_j}$ ε $\boldsymbol{C_c}$ indica que se deben considerar **las tareas pertenecientes al camino crítico.**

$$\boldsymbol{T = N(T_e, \sigma_T^2)} \qquad T_e = \sum_{ij\ \varepsilon\ Cc} t_{e_{ij}} \qquad \sigma_T^2 = \sum_{ij\varepsilon\ Cc} \sigma_{t_{eij}}^2$$

Los supuestos del Teorema Central del Límite llevan a que se analice en primer lugar si existe independencia entre las variables. No habría dudas en cuanto a la independencia en sus distribuciones en el plano estadístico, pero en el plano temporal no existiría tal independencia, dado que las tareas del camino crítico se siguen unas a otras en función de lo planificado. Por tal motivo se debe tener presente dicha condición al momento de aplicar el Teorema.

El restante supuesto es que la cantidad de variables debe ser un número muy grande (matemáticamente, tendiendo a infinito), lo que requiere en la práctica que el camino crítico esté integrado por al menos 30 tareas (según algunos autores, 50).

2.2.4.6. Análisis de la probabilidad de cumplimiento del proyecto

Aceptar que la variable $\boldsymbol{T}$ tiene distribución Normal permite utilizar sus propiedades para hallar la probabilidad de ejecutar el proyecto en determinados plazos. Recuérdese que la distribución es perfectamente simétrica y que el valor de la media divide el área en 2 partes iguales, tal como se ve en el gráfico de la Figura 2.6. que, además, muestra las probabilidades comprendidas en intervalos significativos de la variable $\boldsymbol{T}$.

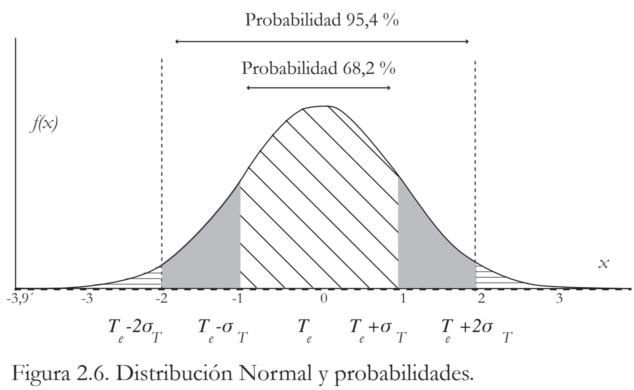


Figura 2.6. Distribución Normal y probabilidades.

Probabilidad de tener finalizado el proyecto en el plazo Te

De acuerdo a lo expresado se tiene

$$P(T \leq T_e) = 0{,}5$$

lo que indica un 50% de seguridad de poder concretar el proyecto en su tiempo medio de ejecución T_e y, a su vez, que el riesgo de no finalizarlo en esa fecha es también del 50%:

$$P(T > T_e) = 0{,}5$$

Probabilidad de finalizar al proyecto antes de una determinada fecha

Definida una fecha T_x cualquiera, una medida del margen de seguridad de poder finalizarlo que corresponde a ese plazo se tiene con la probabilidad que se calcula mediante la aplicación de la Distribución Normal Estandarizada ***N(0,1)***.[7]

Para esto se debe hallar el valor estandarizado correspondiente al valor T_x de la variable bajo estudio, mediante la ecuación. $Z_x = \frac{T_x - T_e}{\sigma_T}$

Si se utiliza la tabla respectiva para la búsqueda del valor, corresponde aplicar la siguiente equivalencia:

$$P(T \leq T_x) = P(Z \leq Z_x)$$

El riesgo de no poder finalizar el proyecto en la fecha T_x prefijada se mide con la probabilidad complementaria de ésta; probabilidad de no concluir el proyecto a esa fecha:

$$P(T > T_x) = 1 - P(T \leq T_x)$$

Determinación del tiempo de ejecución que provea un nivel de seguridad

Para una administración racional en casos de riesgo se puede estimar un plazo de ejecución que provea un determinado nivel de seguridad (y su complemento de riesgo).

Seleccionado ese nivel de seguridad se realiza el proceso inverso al del punto anterior, y se obtiene de esta manera el valor de Z que corresponde a dicho nivel de probabilidad prefijado, y que remite a la aplicación de la Distribución Normal Estandarizada ***N(0,1).***

Luego, para estimar la fecha se efectúa el cálculo: $T_x = T_e + Z \, . \, \sigma_T$

7 Esta metodología de trabajo responde a cálculos manuales que se facilitan utilizando la tabla con valores Estandarizados N(0,1), pero la aplicación de -por ejemplo- planillas de cálculo electrónico permite invocar directamente la distribución a aplicar y obtener con precisión el resultado buscado.

2.2.4.7. Casos de proyectos con escasa cantidad de tareas

Es posible que en algún caso se tengan menos de 30 tareas críticas, y no sea posible aplicar el Teorema Central del Límite tal como se consignó (*Condición 3,* $n \rightarrow \infty$).

En tales casos, y en sustitución de la metodología explicada, se puede acudir a una aplicación del teorema de Bienayme-Tchebycheff. Se recordará que de dicho teorema puede deducirse el siguiente enunciado: la probabilidad de que una observación $\boldsymbol{x}$ de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ se encuentre dentro del rango de variación de más o menos $\boldsymbol{K}$ veces el desvío standard ($K\,\sigma$) en torno a su valor medio esperado es superior a una constante que vale $\boldsymbol{1 - 1/k^2}$.

La expresión formal es: $P(m - K\sigma < x < m + K\sigma) > 1 - 1/k^2$; donde $\boldsymbol{m}$ es la media de la distribución, y equivale a $\boldsymbol{E_{(x)}}$.

Si esta expresión es verdadera, lo será también la siguiente:

$$P(x < m + K\sigma) > 1 - 1/k^2$$

lo que no requiere prueba alguna, pues simplemente se ha quitado el límite mínimo al intervalo en que puede estar $\boldsymbol{x}$, y por tanto la probabilidad debe ser mayor que en la expresión anterior. Y permite cuantificar la probabilidad con los correspondientes márgenes de seguridad y riesgo.

Aplicada a la variable $\boldsymbol{T}$ que es objeto del análisis en la administración de proyectos se tiene:

$$P(T < T_e + K\sigma) > 1 - 1/k^2$$

Por ejemplo, si se considera $\boldsymbol{K = 2}$, resultará que la probabilidad de que el tiempo de ejecución del proyecto sea menor que el valor medio más 2 veces el desvío estándar es mayor que 0,75. Por tanto, se tendrá un margen de seguridad de por lo menos el 75% de finalizar antes de la fecha definida por $T_e + 2\sigma$, y el correspondiente riesgo inferior al 25% de no poder hacerlo.

2.2.4.8. Restricciones y limitaciones del Método PERT

En el desarrollo del texto se han expuesto algunas características y supuestos del Método PERT que podrían llegar a provocar falencias y/o inexactitudes en su aplicación como técnica de administración de proyectos con duraciones inciertas. Pueden ser sintetizadas en las siguientes:

1) Se supone que la duración de las actividades sigue una distribución Beta, cuando es posible que no sea así; a su vez, los cálculos de la media y varianza responden a simplificaciones.

2) La aplicación del Teorema Central del Límite que postula la técnica, presenta ciertas dudas en cuanto a su justificación, y exige un mínimo de tareas en el camino crítico.

3) Debe notarse que, en la práctica, se ha tratado a este problema de tipo aleatorio como si no lo fuera, ya que PERT se ocupa del camino crítico, y la distribución que obtiene es de este camino y no del proyecto. Pero debe tenerse en cuenta que caminos no críticos que van desde el inicio al fin del proyecto, cuya varianza total es muy grande pueden llegar a representar -al momento de la ejecución - una duración del proyecto mayor a la que expresa el camino crítico.

2.2.5. Intercambio duración-costo. Programación óptima

Hasta aquí las duraciones de un proyecto no se han relacionado con los costos involucrados. Ya se ha señalado que estas técnicas de gestión proveen la información que se necesita para una adecuada gestión de los costos y tiempos, y ésta será la temática a desarrollar a continuación.

Es bastante común que, al administrar un proyecto, se deba cumplir estrictamente con una fecha de entrega del resultado del mismo. En tal caso, si después de estimar la fecha de terminación en base a la duración del camino crítico se considera que el proyecto debería terminar antes para cumplir con tal condición, se pueden intentar acortamientos mediante intercambio de costos y duración. Otras alternativas serían descartar el proyecto o ejecutarlo según las posibilidades y voluntad de quien tiene interés en que se realice, pero no serán motivo del análisis que sigue.

2.2.5.1. Los costos asociados al proyecto

Obviamente, para poder realizar el intercambio mencionado en el título anterior es necesario conocer en qué costos se incurre y cómo reaccionan ante cambios en los diversos componentes del proyecto.

Existen lo que se denomina **costos directos**, identificables totalmente con el desarrollo de una tarea o actividad. En tal carácter, si la duración de la tarea se acorta, estos costos se incrementan; es decir, varían en forma inversamente proporcional con la duración de la tarea.

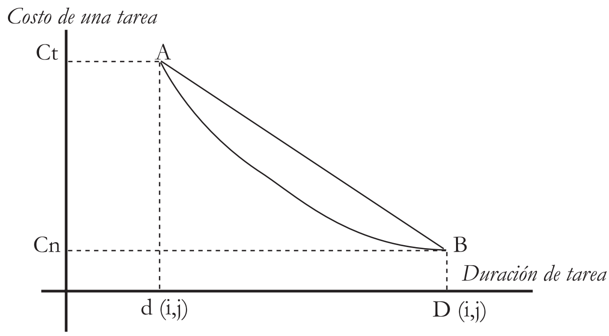


Figura 2.7. Costo directo de una tarea en un proyecto

Como muestra la línea curva de la Figura 2.7., los costos directos aumentan al reducir la duración de la tarea desde el punto B (correspondiente a un **Costo Normal** con una **Duración Normal**) hasta el punto A (que a la **Duración Todo Acelerado** asigna el **Costo Todo Acelerado**), y su tasa de incremento es mayor a medida que se reduce el tiempo de ejecución.

Tal relación costo-duración es perfectamente entendible en condiciones reales, pero difícil de manejar en forma práctica dentro del modelo, ya que para cada una de las tareas del proyecto existen comportamientos similares al mencionado en el párrafo anterior, lo que puede resultar en una cantidad considerable de cálculos. Para simplificar, mediante el segmento AB se hace una **aproximación lineal** al comportamiento real de los costos directos, y se cuenta con un elemento de fácil aplicación en los cálculos: **la pendiente de la recta es indicativa de la tasa de incremento del costo directo por cada unidad de tiempo en que se reduce la duración.**

La definición de costo "todo acelerado" implica la ejecución de la tarea en el menor tiempo que permiten los recursos asignados. En plazos de ejecución menores es imposible realizar la tarea, así como tampoco es aceptable ejecutarla en un plazo superior al indicado por la duración normal. Por esto, las gráficas de las funciones respectivas están acotadas entre los puntos A y B de la Figura 2.7.

Por otra parte, los costos indirectos no se pueden identificar con el desarrollo de una tarea o actividad en particular, sino que son imputables al proyecto en su conjunto. Y por esto, si la duración del proyecto se acorta, estos costos se reducen al variar en forma directamente proporcional. Tal el caso de los gastos generales, alquileres, salarios de personal de vigilancia, multas por retrasos en la entrega del resultado final, costos de administración del proyecto, etc.

Por lo expuesto, los **costos indirectos** son representables mediante funciones lineales crecientes, tal como puede apreciarse en la Figura 2.8.

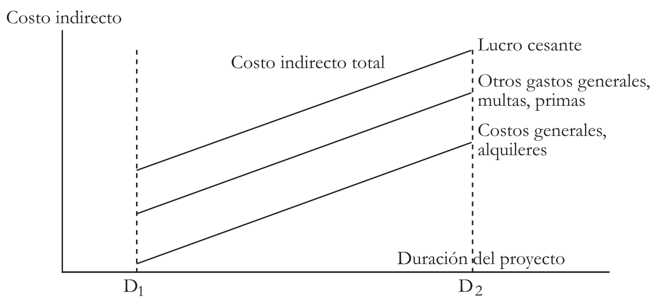


Figura 2.8. Costos indirectos de un proyecto

Para cada duración del proyecto la suma de todos los costos directos involucrados en cada una de sus tareas, más los correspondientes costos indirectos, conduce a la suma de los costos totales del proyecto. Esto puede representarse mediante tres curvas, que se indican en la Figura 2.9. Ahí se observa que si la duración del proyecto se reduce de T_2 a T_1 los costos indirectos disminuyen su nivel, mientras que el importe de los directos aumenta con tal reducción.

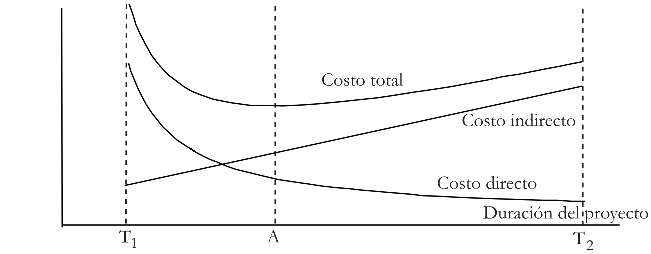


Figura 2.9. Costos directos, indirectos y totales de un proyecto

Ahora, los criterios de "mejor opción" dependerán de las expectativas, necesidades y capacidades de los *stakeholders* del proyecto. Así, de las distintas combinaciones posibles podrá elegirse la duración T_2, con ejecución Normal de todas las tareas; o bien optar por la duración T_1, en la cual todas las tareas se ejecutan Todo Acelerado. Existen muchas alternativas intermedias de duración: la del punto A es la recomendable en cuanto a combinación de costo y tiempo, ya que conduce a una duración menor que la del Todo Normal y a un costo menor que ella.

2.2.5.2. La reducción de duración y su efecto sobre los costos del proyecto

Ya se conoce que la duración total del proyecto está definida por la fecha más temprana del suceso final, que a su vez está precedido por una ruta compuesta tareas críticas y que comienza en el suceso inicial. Por esto, si es posible alguna reducción, ésta será efectiva cuando se pueda acortar alguna de las tareas críticas. En función de obtener la mejor relación duración-costo será necesario observar la reducción de las tareas críticas que muestren el menor costo incremental; o sea, aquellas con el menor aumento en los costos directos ante una reducción unitaria en su duración, expresado con la pendiente del segmento AB de la Figura 2.7.

En este punto es posible tomar dos alternativas: reducir de a una unidad la duración total del proyecto hasta llegar a un costo total que satisfaga, o reducir las actividades que admitan acortamiento en la totalidad de las unidades de tiempo que lo puedan hacer.

En cualquiera de los casos hay que tener en cuenta que, al acortarse el camino crítico, puede haber otros caminos que adquieran tal carácter y, en consecuencia, sean susceptibles de participar también en la rutina de cálculos del acortamiento ya que el procedimiento mencionado se repite hasta que se llega a la duración que satisface el objetivo.

Además, se incorpora la reducción que operaría en los costos indirectos, en el supuesto de que el proyecto tenga costos de este tipo, que incidirán en forma inversa al incremento de los costos directos por reducción. El efecto neto se visualiza en la forma de la curva Costo Total de la Figura 2.9.

2.2.5.3. Métodos para obtener una programación definitiva

Durante la planificación y la programación primaria, si bien la escasez de recursos disponibles condiciona el cronograma obtenido, no se avanzó demasiado en la asignación óptima de ellos.

Una vez obtenida la duración calculada mediante los procedimientos ya descriptos, se revisa si los recursos están limitados en su disponibilidad, si serán insuficientes en algún momento de la ejecución del proyecto y será necesario reforzar la dotación, o si sobreabundarán, etc.

Analizadas estas características del proyecto, se aplica alguno de los métodos de asignación y programación de recursos para avanzar hacia la programación definitiva, de modo que:

• Se respete la lógica para la realización de las tareas y los métodos de trabajo adoptados.

• No se sobreasignen los recursos disponibles.

• No se prolongue la duración del proyecto a menos que se prevea que es imposible realizarlo en el plazo calculado y con el nivel de recursos disponible.

2.2.5.4. Diagrama calendario

El diagrama calendario se basa en una representación gráfica de la red previamente construida, a lo que se agrega una escala de tiempos: consiste en un diagrama de barras tradicional (Gantt) al que se agrega la posibilidad de graficar las relaciones entre las tareas. Concretamente, se transforma un diagrama de flechas en un diagrama de barras con longitudes de barras proporcionales a las duraciones de las tareas, con indicación de las relaciones entre las mismas, y ubicadas en el calendario según el momento en que se ha programado su ejecución.

Como es un instrumento a aplicar cuando se procura la Programación Definitiva, ya se conoce cómo se compone el camino crítico, cuyas tareas tienen una única ubicación posible en el desarrollo del proyecto. Las tareas no críticas, pueden desplazarse en el tiempo según convenga. La ubicación de las holguras de actividad permitirá contar con una cantidad muy amplia de diagramas calendario.

La Figura 2.10, ejemplifica sobre un **diagrama calendario en fecha temprana.**

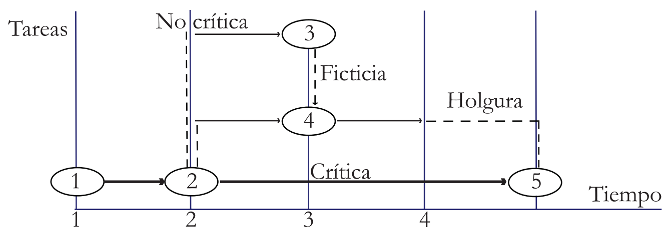


Figura 2.10. Diagrama calendario en fecha temprana

Para confeccionar un diagrama calendario se procede de la siguiente forma:

• Trazar líneas verticales en número igual a las unidades de tiempo que dura el proyecto.

• Indicar el Camino Crítico por medio de arcos trazados con línea llena gruesa.

• Trazar, con arcos de línea llena fina, las tareas no críticas. Recordar que su ubicación en el tiempo depende de la definición adoptada: diagrama en fecha más temprana, o más tardía, etc.

• Completar con líneas de trazo discontinuo los márgenes u holguras, y conectarlas a los nodos con líneas de puntos, para evitar confusiones.

• Las actividades ficticias se representan con flechas verticales -de trazo discontinuo- que unen a los nodos que las delimitan.

Es evidente que, una vez confeccionado el diagrama, se pueden visualizar el momento en el tiempo en que se deberá efectuar cada tarea, y los márgenes que poseen las actividades no críticas para efectivizar su realización sin modificar la duración total del proyecto.

La observación del diagrama y el conocimiento de la calidad y cantidad de recursos requeridos para las distintas tareas permitirán comenzar a programar definitivamente el proyecto.

Una vez confeccionada la programación definitiva -y volcada la misma a otro diagrama calendario- los trazos discontinuos horizontales que se observen indicarán claramente dónde existen holguras, de qué valor son, y cómo se podría alterar el desarrollo de las tareas subsiguientes en el caso de que se excedan los márgenes disponibles.

Es evidente que este tipo de diagramas no sólo es de utilidad para definir una programación definitiva, sino también para realizar reprogramación cuando se atrase la ejecución de un proyecto, para identificar tareas que pueden acelerarse o replanificarse en función de los recursos disponibles.

2.2.5.5. Diagrama de carga de recursos

El diagrama calendario indica claramente las tareas a acelerar para concluir el proyecto en la fecha predeterminada, y es la base para construir los **diagramas de carga de recursos.**

Cada tarea requiere simultáneamente varios tipos de recursos y es necesario conocer el programa de utilización de los mismos para el período que dure el proyecto. Los diagramas de carga permiten visualizar la necesidad de recursos por unidad de tiempo, y se construyen en base al diagrama calendario y a las necesidades de recursos por unidad de tiempo para cada una de las tareas. Se pueden expresar de dos formas: tabular y gráfico de barras, para lo cual son adecuados los esquemas mostrados en la Figura 2.11.

Diagrama de carga de recursos (Tabular)

Tarea 1											
Tarea 2											
Tarea 3											
Tarea 4											
Tarea 5											
Tarea 6											
Tarea 7											
TOTAL											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*t*

Diagrama de carga de recursos (gráfico de barras)

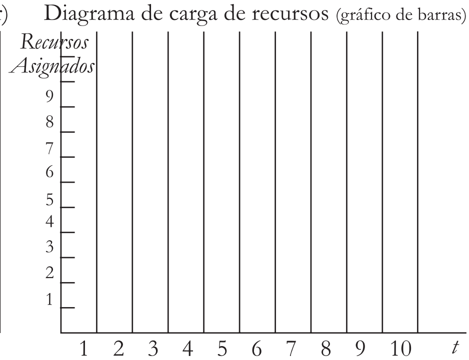


Figura 2.11. Diagrama de carga de recursos, tabular y como gráfico de barras.

En el diagrama tabular cada celda de la fila TOTAL se obtiene de sumar todos los valores que hay en la columna correspondiente. Y tales sumas se aplican para elaborar el gráfico de barras para cada unidad de tiempo.

Ejemplo 2.1. Aplicación de los Diagramas Calendario y de Carga de Recursos

Se tiene el proyecto cuyo diagrama calendario en fecha temprana se ha trazado en la Figura 2.12. Supóngase que se requiere un recurso de un solo tipo (para simplificar el problema) cuyas necesidades diarias se indican en la Tabla 2.1.

No se desarrollarán en este texto métodos específicos ideados para programar asignación de recursos -como procedimiento MAP, algoritmos de Burguess y de Brooke, etc.-. En su lugar, puede hacerse un pequeño análisis intuitivo sobre el diagrama calendario (y utilizar planillas de cálculo electrónico o *software* específico de administración de proyectos) para realizar desplazamientos de tareas que lleven a aumentar la efectividad de utilización del recurso en consideración.

El diagrama calendario se toma como guía para confeccionar el Diagrama de Carga de Recursos Tabular, mediante la traza de un cuadriculado (Tabulado) en el que se coloca para cada actividad (indicada en su margen izquierdo) la necesidad de recurso en el instante del tiempo que corresponda. En la fila marcada con "Total" aparece el requerimiento del proyecto en cada una de las unidades de tiempo en que se ejecutará.

Se puede construir ahora el **Diagrama de Carga de Recursos como gráfico de barras** (Figura 2.13.) para el proyecto programado en **fecha temprana**. Se representan simultáneamente el tiempo (indicado en abscisas) y la cantidad de recursos requerida por día (en ordenadas) y se observa en correspondencia con el diagrama calendario en fecha temprana. Coinciden las unidades de tiempo del grafo y del cuadro de la Tabla 2.2.

En la gráfica de la Figura 2.13 se ve que el recurso no se utilizará parejo. Si se opta por proveerse al inicio (y permanentemente) del máximo a utilizar del recurso (10, en el ejemplo), debería destinarse a otros proyectos la capacidad no utilizada (representada por las áreas en blanco II y III) o, si no existen aquellos, a mantenerla ociosa. En cambio, si se opta por adquirir dinámicamente las cantidades necesarias en cada unidad de tiempo, el proyecto puede quedar expuesto a: imposibilidad de conseguir el recurso en el momento requerido; cambios imprevistos en su precio; alto nivel de rotación, etc.

El Diagrama de Carga permite planificar un mejor empleo de la mano de obra del proyecto mediante un índice de la eficiencia en la utilización del recurso, que es el denominado **porcentaje de aprovechamiento del recurso *(PAR).***

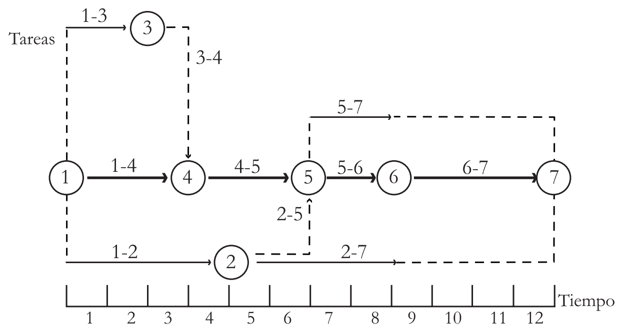


Figura 2.12. Diagrama calendario en fecha temprana

TAREA	RECURSO
1-2	2 u/día
1-3	3 u/día
1-4	4 u/día
2-7	2 u/día
4-5	3 u/día
5-6	2 u/día
5-7	6 u/día
6-7	4 u/día

Tabla 2.1. Recursos por tarea

Tareas	Unidades de recurso necesarias											
1-2	2	2	2	2								
1-3	3	3										
1-4	4	4	4									
2-7					2	2	2	2				
4-5				3	3	3						
5-6							2	2				
5-7							6	6				
6-7									4	4	4	4
TOTAL	9	9	6	5	5	5	10	10	4	4	4	4

Tabla 2.2. Diagrama de Carga de recursos en forma tabular

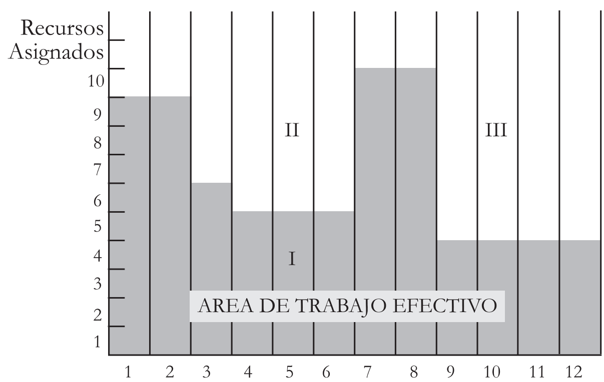


Figura 2.13. Diagrama de Carga de Recursos como gráfico de barras

2.2.5.6. El porcentaje de aprovechamiento de recursos

Este análisis supone el aprovisionamiento al inicio del máximo necesario para salvar la demanda de pico, pero el enfoque también puede ser útil si se prevé contratar el recurso a medida que se lo necesite. El **porcentaje de aprovechamiento del recurso *(PAR)*** es un *ratio*. Se calcula con el cociente entre las unidades de tiempo de trabajo efectivo del recurso ***(utte)*** y las unidades de tiempo de recurso necesarias para cubrir el trabajo de pico ***(uttp)***: cociente entre lo necesario y lo disponible. Las ***uttp*** son los **recursos que se deben disponer** en el proyecto si se supone que ese elemento no se prestará ni solicitará a otros proyectos o secciones de la organización. La diferencia entre la unidad y el ***PAR*** indica porcentaje de ociosidad, si no hay transferencia entre proyectos.

Para el programa bajo análisis se calcula:

$$\begin{aligned} utte &= 9 \times 2 + 6 \times 1 + 5 \times 3 + 10 \times 2 + 4 \times 4 \\ &= 18 + 6 + 15 + 20 + 16 \\ &= 75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} uttp &= 12 \,.\, 10 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$PAR = \frac{utte \times 100}{uttp}$$

$$\begin{aligned} &= 75 \times 100 / 120 \\ &= 62{,}50\% \end{aligned}$$

Se analizará ahora la manera de mejorar el PAR en forma práctica: una mejor asignación que incremente tal porcentaje y prevea una carga más pareja del recurso.

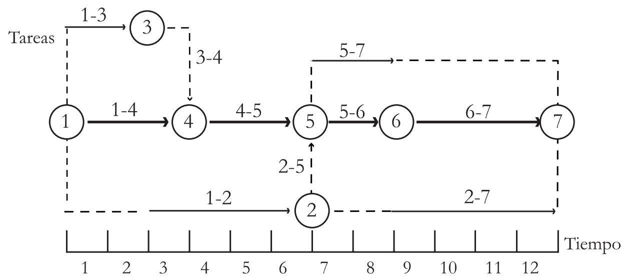


Figura 2.14. Diagrama calendario en fecha temprana aprovecha holguras en la ruta 1-2-7

Tareas	Unidades de recurso necesarias											
1-2			2	2	2	2						
1-3	3	3										
1-4	4	4	4									
2-7									2	2	2	2
4-5				3	3	3						
5-6							2	2				
5-7							6	6				
6-7									4	4	4	4
TOTAL	7	7	6	5	5	5	8	8	6	6	6	6

Tabla 2.3. Diagrama de Carga de Recursos en forma tabular al aprovechar holguras en la ruta 1-2-7

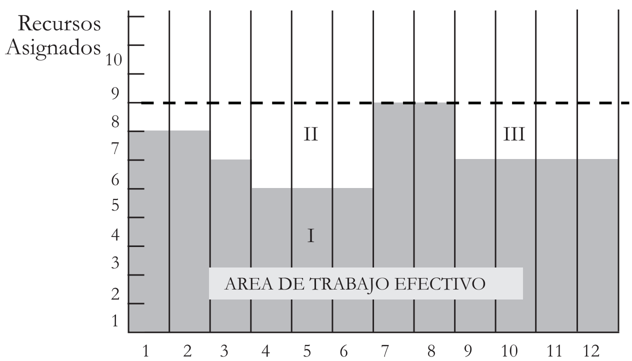


Figura 2.15. Diagrama de Carga de Recursos (gráfico de barras) aprovechando holguras en la ruta 1-2-7

En la Figura 2.14, se observa un nuevo diagrama calendario que ha mejorado el diagrama de carga de recursos al disminuir zonas de ociosidad.

Se ha aprovechado la holgura que presentaban las tareas de la ruta 1-2-7 en conjunto, mediante su reubicación en otro momento, ya que ahora ninguna de estas dos tareas se programa en fecha temprana. Esto descomprime la demanda del recurso en los momentos de mayor demanda: los días 7 y 8. Esta situación puede apreciarse en la Tabla 2.3. y en la Figura 2.15.

La consecuencia es un aumento del porcentaje de aprovechamiento, que llega a ser de:

$$PAR = \frac{(7x2 + 6x1 + 5x3 + 8x2 + 6x4)\, x100}{12x8}$$

$$= \frac{75 \times 100}{96}$$

$$= 78{,}13\%$$

También puede calcularse un promedio diario de utilización del recurso, con el cociente entre las unidades de tiempo de trabajo efectivo del recurso y el número de unidades de tiempo ***(ut).*** En este caso:

$$\frac{utte}{ut} = \frac{75 \text{ días - recurso}}{12 \text{ días}}$$

Promedio diario de utilización del recurso = 6,25 u/día

2.3. Aplicación de Simulación al PERT

2.3.1. Posibilidad de mayores análisis en el caso probabilístico. Marco metodológico

Las limitaciones mencionadas al finalizar el desarrollo de **Proyectos con tiempos inciertos en las actividades** se podrían resolver mediante mejoras en el modelo teórico, pero a costa de una mayor complejidad. La técnica de simulación por el Método Montecarlo presenta una forma sencilla de afrontar estos problemas.

No se presentará exhaustivamente la técnica de Simulación. Solamente se hará una síntesis de la misma y explicará sucintamente la forma de aplicación a este caso específico. También cabe aclarar que la utilización de tablas con números aleatorios es válida en la medida en que permite describir paso a paso la metodología aplicada. Es obvio que, para una aplicación práctica y eficiente a casos reales concretos, se deberá acudir a la utilización de cálculo electrónico (planillas de cálculo, por ejemplo) al momento de confeccionar un modelo de simulación.

Simulación Montecarlo consiste, básicamente, en realizar un muestreo artificial o simulado. Es útil su aplicación cuando se investiga un proceso en el que no es posible experimentar con la realidad, y por tanto esa realidad es reemplazada por una simulación del comportamiento del fenómeno bajo análisis.

A tal fin se requerirá información respecto al comportamiento real de dicho fenómeno; o sea, conocer estadísticamente sus componentes, ya sea por aplicación de alguna distribución teórica o las que surjan de la experiencia anterior y que se reflejarán mediante frecuencias relativas.

Adoptada una distribución para una determinada variable se tendrá su distribución de densidad $f_{(x)}$, la que permite hallar la distribución acumulativa $F_{(x)}$, con la cual se podrá trabajar con el método de Montecarlo.

Los gráficos de las Figuras 2.16. y 2.17. siguientes muestran ambas distribuciones para una variable x cualquiera.

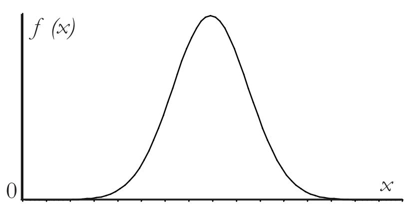


Figura 2.16. Función densidad de una variable x

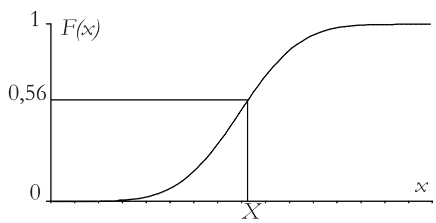


Figura 2.17. Función acumulativa

En general, el proceso de simulación de la variable aleatoria, puede sintetizarse en la siguiente secuencia, cuyos tres primeros pasos han sido graficados en la Figura 2.17.:

1) Elegir un número aleatorio, por ejemplo de 2 cifras, de una **población uniforme.**

2) Ubicarlo en el eje de probabilidad de la función de distribución o acumulativa mediante las transformaciones que sean convenientes. Por ejemplo, si se extrae el número 56, se lo transforma en 0,56, y se lo ubica en el eje de ordenadas.

3) Intersecar la proyección horizontal del valor hallado con la función graficada: se determina la abscisa correspondiente. Esto remite al valor X simulado para la variable x.

4) Repetir los pasos 1), 2) y 3) las veces que sea necesario según el número de muestras a extraer.

En algunos casos, a diferencia del caso general descripto anteriormente, las tablas de números aleatorios utilizadas responden a distribuciones standard. Tal el caso de Normal o Beta, en que el valor aleatorio que proporciona la tabla es el desvío con respecto a la media, que deberá multiplicarse por el desvío standard de la variable a simular y sumarse al valor medio.

Por ejemplo, si se desea aplicar una distribución Beta, la tabla utilizada suministrará el valor del desvío, que puede designarse con $\boldsymbol{\beta}$. Luego, se tiene como valor simulado para la tarea ***i-j:***

$$t_{ij} = E_{(tij)} + \sigma_{(ij)} \cdot \beta$$

En el caso de apelar a la simulación no es obligatoria la suposición de que las duraciones de tareas siguen a una distribución Beta de Euler: se pueden considerar distintas distribuciones para distintas tareas, según los valores observados que se tengan de la realidad (Normal, Beta, Triangular, Uniforme, frecuencias relativas, etc.) y aplicarlas consecuentemente al simular la duración de la tarea correspondiente.

Para simplificar el ejemplo, en este caso se utilizará una tabla de números aleatorios para la simulación y se supondrá que las actividades del proyecto se distribuyen según una función $\boldsymbol{\beta}$ de Euler.

La tabla con que se simulará la duración de cada tarea contiene valores aleatorios de los desvíos con respecto a la media de dicha función $\boldsymbol{\beta}$ de Euler. Se multiplica ese valor aleatorio por el desvío estándar de la variable a simular y se suma el resultado al valor medio, para tener la duración simulada de la tarea.

Una ruta, que no sea crítica según los datos aplicados en PERT, pero con valor cercano a la duración del proyecto (llamada por esto *ruta semicrítica*) puede llegar a ser crítica y, como tal, condicionar la duración del proyecto al aplicarse los distintos valores aleatorios para la duración esperada de cada tarea. Puede analizarse esta eventualidad para evaluar qué probabilidad existe de que otro camino distinto del crítico obligue a controlar la ejecución de sus tareas; esto derivará del porcentaje de veces en que tal camino se volvió crítico a lo largo de las simulaciones.

La simulación consiste en tomar una gran cantidad de muestras al azar de valores de la Distribución $\boldsymbol{\beta}$, obtener duraciones aleatorias de las tareas y, consecuentemente del proyecto, una distribución de los tiempos esperados de finalización del proyecto permitirá estimar la duración del proyecto mediante una serie de ensayos o muestras artificiales.

Como el tiempo más probable de ejecución de una tarea no siempre es simétrico respecto de los tiempos optimista y pesimista, usualmente se aplican tres tablas de la función $\boldsymbol{\beta}$ de Euler, según sea $\boldsymbol{t_m}$ equidistante de los otros dos o esté más próximo a alguno de ellos que al otro.

2.3.2. Operatoria de la simulación en un proyecto probabilístico

Aunque se da por supuesto que se aplica la distribución $\boldsymbol{\beta}$ de Euler (con las debidas reservas), al simular un caso no es necesario atarse a esta función. Se pueden considerar distintas distribuciones para distintas tareas: Normal, Beta, Triangular, Uniforme, frecuencias relativas, etc.

Si bien en la actualidad existen programas de computación que permiten realizar simulaciones de manera relativamente fácil, para el caso en que se opte por un proceso manual de simulación de la duración de un proyecto el mismo puede sintetizarse en lo siguiente:

a) Indagar qué distribución aleatoria ajusta a la duración de cada tarea ***i-j.*** Si no se tiene una tabla especial de desvíos como en el caso de $\boldsymbol{\beta}$, obtener fórmula que la rige y acumulativa.

b) Para la duración de la tarea, extraer los números equiprobables y aplicar las fórmulas que correspondan en cada caso.

c) Repetir el proceso para cada una de las tareas hasta completar la red.

d) Obtener la duración del proyecto que corresponda al ensayo, mediante la definición de un camino crítico.

e) Repetir el proceso tantas veces como sea necesario. Esta cantidad de experimentos es un problema de determinación de tamaño de muestra, para lo que se aplican los conocimientos adquiridos en Estadística. Tal tamaño dependerá del grado de confianza que se desee.

f) Finalizadas las muestras (o sea, ejecutado el proceso una cantidad ***n*** de veces, suficiente para sacar conclusiones fundadas), se puede obtener:

1. Probabilidad de que cada camino sea crítico.

2. Distribución que sigue la duración del proyecto y parámetros que la caracterizan.

3. Análisis de la probabilidad de cumplimiento del proyecto antes de determinada fecha.

4. Grado de criticidad de cada tarea. O sea, el porcentaje de veces que la tarea resultó crítica en la muestra total.

5. Distribución seguida por la fecha de cada nodo (temprana o tardía).

Ejemplo 2.2. Aplicación de Simulación Montecarlo a PERT

Dado el proyecto cuya red se presenta en la Figura 2.18., con duraciones en días, se procederá a realizar las simulaciones correspondientes y obtener conclusiones.

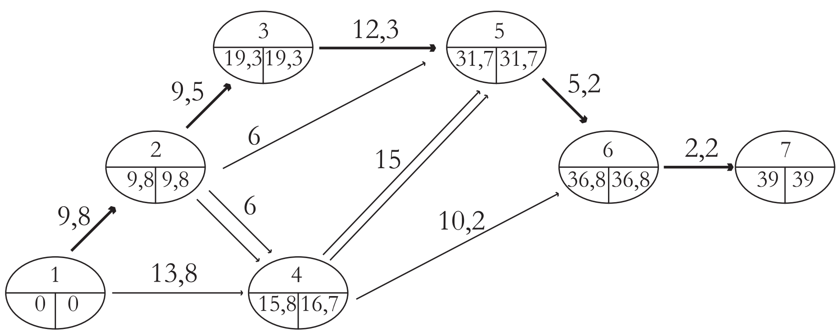


Figura 1.18. Red PERT con duraciones y caminos crítico y semicrítico

	PERT							Simulación 1					Simulación 2					Simulación 3				
Tarea	t_o	t_m	t_p	t_e	σ_t	C?	SC?	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?	F 18 C 3	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?	F 18 C 4	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?
1-2	7	10	12	9,8	0,83	x	x	**1,41**	1,18	11,0	x	x	**0,33**	0,28	10,1	x	x	**-0,72**	-0,60	9,2	x	x
2-3	6	10	11	9,5	0,83	x		**-0,96**	-0,80	8,7		x	**2,00**	1,67	11,2	x		**0,20**	0,17	9,7		x
1-4	8	13	23	13,8	2,50			**-0,77**	-1,93	11,9			**-0,87**	-2,18	11,7			**0,17**	0,43	14,3		
2-4	3	6	9	6,0	1,00		x	**0,19**	0,19	6,2	x		**-1,17**	-1,17	4,8		x	**0,92**	0,92	6,9	x	
2-5	5	6	7	6,0	0,33			**0,61**	0,20	6,2			**0,46**	0,15	6,2			**0,92**	0,31	6,3		
3-5	10	12	16	12,3	1,00	x		**-0,30**	-0,30	12,0		x	**-1,23**	-1,23	11,1	x		**0,84**	0,84	13,2		x
4-5	12	15	18	15,0	1,00		x	**0,68**	0,68	15,7	x		**2,32**	2,32	17,3		x	**2,09**	2,09	17,1	x	
4-6	6	10	15	10,2	1,50			**0,94**	1,41	11,6			**-0,49**	-0,74	9,4			**-0,43**	-0,65	9,5		
5-6	4	5	7	5,2	0,50	x	x	**-0,03**	-0,02	5,2	x	x	**-0,55**	-0,28	4,9	x	x	**-1,27**	-0,64	4,5	x	x
6-7	1	2	4	2,2	0,50	x	x	**0,01**	0,01	2,2	x	x	**-0,25**	-0,13	2,0	x	x	**-1,93**	-0,97	1,2	x	x

Duración Proyecto Camino Crítico			38,8					40,2					39,3					39	
Camino Semicrítico				38,2					39,1					39,2					37,8

Tabla 2.4. Simulación de tiempos de proyecto mediante valores aleatorios de distribución Beta Euler

La Tabla 2.4. presenta la información proveniente de la red, y algunos valores que se calculan a medida que avanza el proceso de simulación (en esta tabla hay lugar para tres simulaciones) y que se explicarán a continuación. Como aclaración de su contenido vale consignar:

1. Las columnas encabezadas con la leyenda "PERT" responden a cálculos con datos reales, trasladados a su vez a la red del enunciado.

En primer lugar, y tal lo explicado oportunamente, corresponde definir cuáles son los tiempos medios esperados de cada una de las tareas según la información recogida de los encargados de proveerla a quien administrará el proyecto.

Para ello se utilizarán los datos incluidos en las columnas identificadas como t_o, t_m y t_p , que contienen las tres fechas necesarias para estimar la duración media esperada de cada tarea (calculada en la columna t_e) y su respectiva varianza (σ^2_{te}) y desvío estándar (σ_{te}) que constan en las columnas siguientes. Según estos cálculos el proyecto tardaría 38,8 días según el camino crítico (ruta 1-2-3-5-6-7) con un desvío estándar de 1,7 ($=\sqrt{2,88}$). El camino semicrítico (ruta 1-2-4-5-6-7) dura 38,2 días. La probabilidad de terminar el proyecto en 41 días o menos puede estimarse en 0,903.

2. Los otros tres grupos de columnas a la derecha de la anterior contienen los cálculos de las tres simulaciones.

3. Las columnas encabezadas con **C?** y **SC?** se utilizarán, respectivamente, para marcar si la tarea ha resultado crítica o semicrítica (perteneciente a la ruta que sigue, en duración, al camino crítico) tanto por ya sea aplicación de los datos reales como de los simulados.

Los números de fila y columna de las tablas de números aleatorios de la función Beta, donde arranca la selección para las simulaciones efectuadas se indican en las columnas de la Tabla 2.4. marcadas con F 1 C 1, F 18 C 3, y F 18 C 4. Esta selección es arbitraria, y podría ser, en sí misma, hecha aleatoriamente (por ejemplo, mediante un sorteo).

En tales columnas de la Tabla 2.4. se registrará el valor aleatorio obtenido, que simbólicamente se representará con la expresión $\beta_{(to,tp)}$.

Tales valores provienen de las tablas que constan en la Figura 2.19. Según la ubicación de t_o, t_m y t_p se pueden utilizar las identificadas como Tabla 1 (equidistante t_m de t_o y de t_p), Tabla 2 (asimétrica a la izquierda) o Tabla 3 (si la distribución es asimétrica a la derecha).

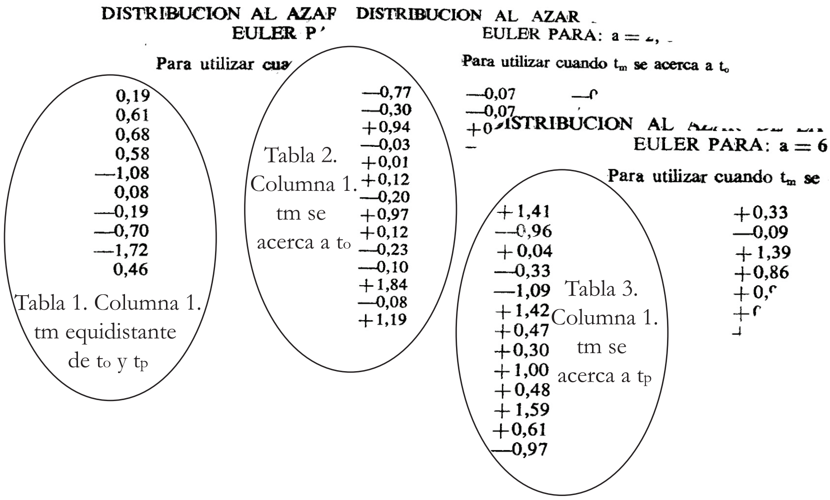


Figura 2.19. Tabla de números aleatorios Función Beta de Euler

Cuando se tienen los datos t_o, t_p y la media t_e, se define en cuál de las tres tablas de números Beta aleatorios se buscarán tales valores. En la primera simulación se recorrerán las columnas 1, desde la fila 1 hasta terminar con la lista de tareas.

El número aleatorio obtenido para la tarea 1-2 es 1,41 (proveniente de la Tabla 3, por tener asimetría derecha la distribución de tiempos 7, 10 y 12). Indica que la duración simulada estará a 1,41 desvíos del valor medio estimado en PERT.

El número obtenido se multiplica por el desvío estándar de la duración de la tarea, y el resultado del cálculo completa la columna $\beta \cdot \sigma_t$. Resulta así el valor 1,18, que es el desvío simulado. A continuación, en la columna encabezada con $t'_e =$ se ha sumado 1,18 a la media 9,8 para obtener así la duración simulada para esta tarea 1-2.

El algoritmo descripto se repite para cada una de las tareas. Varía (si corresponde, según el grado de simetría que presentan los datos) la tabla que provee el número aleatorio.

Al aplicar el algoritmo para cálculo del camino crítico se llega a una duración de 40,2 días, y el camino semicrítico se ha acercado hasta 38,9 días. Con estos datos se marcan las columnas que identifican si la tarea es crítica o semicrítica.

Una vez obtenida la duración de los caminos crítico y semicrítico, tal lo consignado en el párrafo anterior, se debe hacer una nueva simulación; en cada tabla se utilizarán ahora las columnas 3 a partir de la fila 18. En la Tabla 2.4. se muestran sus resultados junto con los correspondientes a una tercera simulación, que inició sus búsquedas en las columnas 4, fila 18.

	Simulación 4					Simulación 5					Simulación 6					Simulación 7				
Tarea	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?
1-2	**0,04**	0,03	9,9	x	x	**-1,09**	-0,91	8,9	x	x	**0,47**	0,39	10,2	x	x	**1,00**	0,83	10,7	x	x
2-3	**-0,33**	-0,28	9,2		x	**1,42**	1,18	10,7	x		**0,30**	0,25	9,8	x		**0,48**	0,40	9,9	x	
1-4	**0,12**	0,30	14,1			**-0,10**	-0,25	13,6			**-0,30**	-0,75	13,1			**-0,20**	-0,50	13,3		
2-4	**0,58**	0,58	6,6	x		**-0,19**	-0,19	5,8		x	**0,46**	0,46	6,5		x	**0,68**	0,68	6,7		x
2-5	**-1,08**	-0,36	5,6			**-0,70**	-0,23	5,8			**0,19**	0,06	6,1			**0,58**	0,19	6,2		
3-5	**-0,20**	-0,20	12,1		x	**1,84**	1,84	14,2	x		**0,94**	0,94	13,3	x		**0,97**	0,97	13,3	x	
4-5	**0,08**	0,08	15,1	x		**-1,72**	-1,72	13,3		x	**0,61**	0,61	15,6		x	**-1,08**	-1,08	13,9		x
4-6	**0,97**	1,46	11,6			**-0,08**	-0,12	10,0			**-0,03**	-0,05	10,1			**0,12**	0,18	10,3		
5-6	**0,12**	0,06	5,2	x	x	**1,19**	0,60	5,8	x	x	**0,01**	0,01	5,2	x	x	**-0,23**	-0,12	5,1	x	x
6-7	**-0,23**	-0,12	2,1	x	x	**-0,77**	-0,39	1,8	x	x	**0,12**	0,06	2,2	x	x	**-0,10**	-0,05	2,1	x	x
Duración Proyecto Camino Crítico				38,8					41,3					40,6					41,0	
Camino Semicrítico					38,5					35,6					39,7					38,4
	Simulación 8					Simulación 9					Simulación 10					Simulación 11				
Tarea	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?	F 1 C 1	$\beta . \sigma_t$	t'_e=	C?	SC?
1-2	**1,59**	1,33	11,2	x		**-0,97**	-0,81	9,0	x	x	**-0,96**	-0,80	9,0		x	**-0,33**	-0,28	9,6	x	x
2-3	**0,61**	0,51	10,0	x		**1,41**	1,18	10,7	x		**0,04**	0,03	9,5			**-1,09**	-0,91	8,6	x	
1-4	**1,84**	4,60	18,4		x	**0,94**	2,35	16,2			**0,97**	2,43	16,3	x		**-0,08**	-0,20	13,6		
2-4	**0,08**	0,08	6,1			**1,72**	1,72	7,7		x	**0,61**	0,61	6,6		x	**-1,08**	-1,08	4,9		x
2-5	**-0,19**	-0,06	5,9			**0,46**	0,15	6,2			**0,68**	0,23	6,2			**0,08**	0,03	6,0		
3-5	**-0,08**	-0,08	12,3	x		**-0,03**	-0,03	12,3	x		**0,12**	0,12	12,5			**1,19**	1,19	13,5	x	
4-5	**-0,70**	-0,70	14,3		x	**0,19**	0,19	15,2		x	**0,58**	0,58	15,6	x	x	**-0,19**	-0,19	14,8		x
4-6	**1,19**	1,79	12,0			**0,01**	0,02	10,2			**-0,23**	-0,35	9,8			**-0,77**	-1,16	9,0		
5-6	**-0,77**	-0,39	4,8	x	x	**0,12**	0,06	5,2	x	x	**-0,10**	-0,05	5,1	x	x	**-0,30**	-0,15	5,0	x	x
6-7	**-0,30**	-0,15	2,0	x	x	**-0,20**	-0,10	2,1	x	x	**1,84**	0,92	3,1	x	x	**0,94**	0,47	2,6	x	x
Duración de proyecto Camino crítico				40,2					39,3					40,0					39,3	
Camino semicrítico					39,5					39,2					39,4					36,9

Tabla 2.5. simulación de tiempos de un proyecto. Aplicación de distribución Beta Euler (PARTE 2)

El proceso completo descripto se hará la cantidad de veces que el tamaño de muestra indique como conveniente. Para ejemplificar cómo seguiría el proceso, en la Tabla 2.5. se presentan los resultados de otras ocho simulaciones, todas realizadas mediante selección de números aleatorios de la columna 1 de las tablas ya utilizadas. Si bien es un número escaso de pruebas, servirá para ilustrar los pasos posteriores que corresponde ejecutar con la técnica en estudio.

A continuación, en este texto se asume que el número de simulaciones es adecuado como para obtener conclusiones valederas. Es decir, a los efectos de los análisis, se supone que se tiene cantidad suficientemente grande de estimaciones simuladas de duración del proyecto.

Con estos valores se forma una serie de frecuencias. Se tomarán intervalos de 1 unidad al agrupar los valores para obtener los resultados resumidos de la Tabla 2.6.

Obsérvese en dicha Tabla 2.6. (Frecuencias absolutas y relativas) que los tiempos esperados obtenidos por simulación se agrupan en forma aproximadamente normal.

Con esa tabla de frecuencias es factible obtener los parámetros que caracterizan a la distribución de probabilidad de la duración total del proyecto. Ellos son el tiempo esperado simulado (T_e=40,14 días) y su varianza (σ^2_T=0,78, suma de varianzas de tareas críticas). Al aplicar estos valores en el cálculo de la probabilidad de terminar el proyecto en 41 días o menos, arrojan un valor $p_{(t<41)} = 0{,}84$. Si se compara con $p_{(t<41)} = 0{,}9$ -de la primera estimación hecha con Pert, donde se contaba con un solo conjunto de valores- se observa la influencia de la aleatoriedad de los datos (reflejada en las varianzas de las duraciones de tareas) que ha sido tenida en cuenta en las duraciones simuladas del mismo proyecto.

Otro análisis: la muestra de tamaño ***n=11*** simulaciones arrojó tres casos en los que la duración del camino semicrítico según PERT (1-2-4-5-6-7) supera al camino crítico original (1-2-3-5-6-7).

Es decir, existe una probabilidad de 3/11 (=0,27) de que al ejecutarse el proyecto se vuelva crítica una ruta que, en principio, no lo es. Esto da una probabilidad relativamente importante de que se llegue a esta situación, motivo por el cual puede ser necesario mantener un control por excepción sobre las tareas semicríticas al momento de la ejecución del proyecto.

	Duración	**Frec. Absol.**	**Frec. Rel.**
Según PERT			
1-2-3-5-6-7	**38,8** (Crít.)		
1-2-4-5-6-7	**38,2** (Semi)		
Simuladas	38,0 - 38,9	1	0,091
	39,0 - 39,9	4	0,364
	40,0 - 40,9	4	0,364
	41,0 - 41,9	2	0,181
Promedio Simulac.	**40,14**		
Varianza Simulac.	**0, 78**		
Desvío St. Simulac.	**0, 881**		

Camino	**Frec. Absol.**	**Frec. Rel.**
1-2-3-5-6-7	7	0,64
1-2-4-5-6-7	3	0,27
1-2-4-6-7	--	
1-2-5-6-7	--	
1-4-5-6-7	1	0,09
1-4-6-7	--	

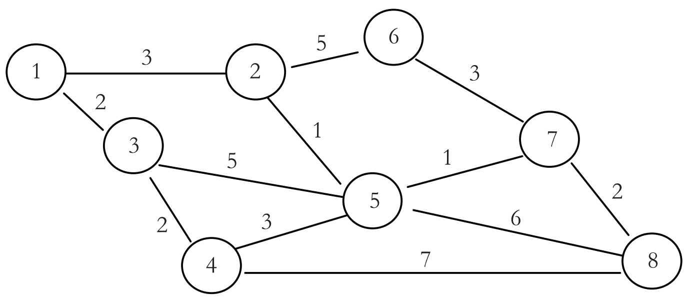
Tabla 2.6. Síntesis de resultados de las simulaciones

2.4. Ejercicios de aplicación práctica

Ejercicio 2.4.1.

Quantum Emprendimientos SA proyecta construir un country en la ciudad de Santa Rosa, para lo cual adquirió un terreno lindante al Club de Golf. Los técnicos que elaboran el proyecto para el country han identificado las ubicaciones ideales para el *club house*, las viviendas, las canchas de deportes, la proveeduría y los puntos panorámicos más interesantes.

Tales lugares están representados mediante los nodos de la red que aparece a continuación.



Las ramas de la red representan los caminos que es posible trazar entre los distintos lugares mencionados, y son alternativas válidas para diseñar un recorrido que los conecte. Los números sobre los arcos indican longitud del recorrido, en Kilómetros.

Cada camino requiere una inversión considerable en compactación, solado asfáltico, señalización, tendido de líneas eléctricas e iluminación, cables de fibra óptica, etc. Estos últimos se utilizarán para comunicaciones telefónicas y redes de computación.

El club proveerá un servicio de Internet a cada lugar representado en la red, mediante un servidor propio que se instalará en el *Club House* (Nodo 8), para lo cual se pretende armar una red de fibra óptica que conecte dicho lugar con todos los demás incurriendo en el menor costo posible de tendido de cableado. El tendido de la red se hace partiendo del

Club House y llegando con el cable una sola vez a cada uno de los restantes lugares, pudiendo existir ramificaciones donde sea conveniente hacerlas.

a) Indique cuál debería ser el tendido de la red que garantice utilizar la menor cantidad de cable y que conecte a todos los lugares de interés con el elegido para alojar el servidor de Internet.

b) Calcule cuántos kilómetros de cable serán necesarios para la instalación de la red.

Ejercicio 2.4.2.

Considere detenidamente y en forma crítica las expresiones referidas a **modelos de redes de ruta más corta** que se insertan a continuación.

a) Consigne si las expresiones son **V**erdaderas o **F**alsas. Fundamente brevemente la respuesta en caso de ser necesario.

1) La ruta más corta conecta cada uno de los pares de nodos.

2) La ruta más corta es el conjunto de arcos que se utiliza para indicar el camino más corto desde un nodo base I hasta un nodo de destino dado.

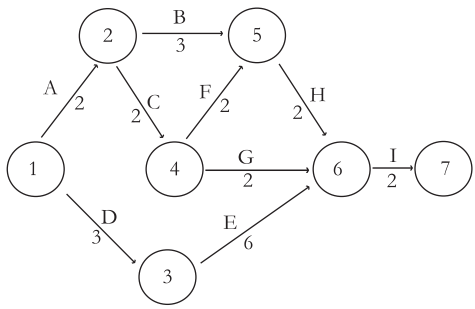
3) La ruta más corta se obtiene aplicando un algoritmo recurrente en la resolución del modelo.

Ejercicio 2.4.3.

Quantum Consultores debe planificar un proyecto para satisfacer un pedido de un cliente que quiere colocar un producto en el mercado. Se presenta un modelo conforme a lo descripto en la red de actividades que se presenta a continuación, con duraciones en días. Las tareas utilizan recursos de un solo tipo, a un costo de $10 diarios por unidad de recurso. Existen otros costos, de 20 $/día, no imputables específicamente a alguna tarea en particular.

La tabla adjunta muestra estos datos y los referidos a la posibilidad de acortar la duración de una tarea y su impacto en los costos directos del proyecto.

Actividad	Recurso (unid/día)	Permite reducir	Costo por reducir
A	3	--	--
B	3	--	--
C	1	1 d	17$/d
D	1	--	--
E	2	1 d	15 $/d
F	4	--	--
G	3	--	--
H	3	1 d	17$/d
I	1	1 d	16$/d



a) Calcule la duración del proyecto. Para las tareas E y G deje constancia de los cálculos realizados que le permitan clasificarlas como críticas o no críticas.

b) Calcule el costo total del proyecto.

Ejercicio 2.4.4.

Quantum Consultores trata de mejorar los plazos de duración del proyecto del ejercicio **2.4.3**. Por tal motivo, le solicita a Ud. que proponga un acortamiento posible sobre la programación obtenida en el inciso **a).**

Tenga en cuenta los datos consignados en la tabla insertada en tal ejercicio. El "costo por reducir" se aplica así: se tiene calculado un cierto Costo Directo para cierta duración "d" de la tarea, y al pasar a la duración "d - 1" el Costo Directo se incrementa en la cantidad consignada en la tabla.

a) Proponga acortamiento de un día en la duración del proyecto. Indique en qué tareas debe acortarse la duración, cómo se compone el efecto neto sobre el Costo Total y cuál es el nuevo Costo Total.

b) Indague si la duración del proyecto puede acortarse otro día más. Si es posible acortar, indique a cuáles tareas corresponde reducir la duración. y recalcule el Costo Total.

Ejercicio 2.4.5.

El cálculo del inciso **b)** del ejercicio **2.4.3.** se hizo bajo el supuesto de que cada día se contratarán las unidades necesarias del recurso para ese momento. Esto puede acarrear el problema de no conseguir el recurso en el momento en que se lo necesita. Por tal motivo, ahora se procura tener un plan que prevea la contratación de los recursos al inicio del proyecto, de manera que se cubra siempre el máximo nivel requerido de los mismos.

a) Confeccione el diagrama calendario correspondiente al proyecto.

b) Confeccione el diagrama tabular de carga de recursos del proyecto.

c) Confeccione el diagrama de carga de recursos del proyecto (Gráfico de barras).

d) Distribuya holguras existentes para proponer una mejora en el empleo de los recursos. Calcule el nuevo Costo Total, si se sabe que en cada momento del proyecto se contará siempre con un nivel de recursos que permita cubrir el máximo necesario.

Ejercicio 2.4.6.

Quantum Consultores conoce que el proyecto presentado en el ejercicio **2.4.3**. puede hacerse con las mismas tareas, pero ejecutadas en otra secuencia. Dicha secuencia está indicada en la tabla que se muestra aquí; lo denominaremos Proyecto Revisado. El resto de los datos son los mismos que en el ejercicio **2.4.3**..

Actividad	Requiere finalizar previamente.
A	----
B	A
C	A
D	A
E	D
F	C,D
G	E
H	B
I	F,G,H

a) Confeccione la red correspondiente al proyecto revisado.

b) Calcule la duración del proyecto revisado.

c) Calcule el costo total del proyecto revisado.

Ejercicio 2.4.7.

En los ejercicios anteriores Ud. ha analizado varias alternativas del proyecto que podrían serle útiles al cliente de *Quantum Consultores*. En el informe profesional que hay que elaborar estarán todas ellas, pero habrá una que se recomiende como el "mejor proyecto".

a) Revise los ejercicios **2.4.3**. a **2.4.6.** y confeccione una lista de las alternativas que *Quantum Consultores* puede proponerle al cliente para cumplir con el objetivo.

b) En base a lo consignado en la lista del inciso a) seleccione, de todas las versiones analizadas del proyecto, aquella que Ud. recomendará como aplicable en el negocio del cliente por tener la mejor relación tiempo-costo.

Ejercicio 2.4.8.

Considere cuidadosamente las oraciones incompletas que se insertan más abajo.

a) Señale con cuáles de las opciones listadas a continuación de las frases inconclusas éstas conforman una expresión válida (puede haber más de una que satisfaga la condición).

I. A efectos de acortar la duración de un proyecto, para identificar si es factible tal acortamiento se deben analizar las características de ...

1) las tareas críticas.

2) todas las tareas comenzando por las de menor costo directo.

3) todas las tareas comenzando por las de menor costo incremental por acortamiento.

4) todas las tareas incluidas en todas las expresiones anteriores.

5) ninguna de las tareas comprendidas en las expresiones anteriores.

II. En un proyecto con costos indirectos y donde cada actividad tiene costos por aceleración, siempre que se disminuya la duración del proyecto ...

1) disminuye su costo total.

2) aumentan los costos indirectos y disminuyen los costos directos de algunas tareas.

3) puede ocurrir que aumente el costo total aunque disminuyan sus costos directos.

4) todo lo consignado en las expresiones anteriores es aplicable.

5)nada de lo consignado en las expresiones anteriores es aplicable.

III. Cuando se administra con la técnica PERT-CPM un proyecto que tiene algunas tareas con duraciones ciertas y algunas tareas con duraciones inciertas, ...

1) se construye un modelo de optimización o normativo.

2) las duraciones de tareas se ajustan todas a una distribución Beta de Euler.

3) se construye un modelo estocástico.

4) todo lo consignado en las expresiones anteriores es aplicable.

5)nada de lo consignado en las expresiones anteriores es aplicable.

IV. Para que en un proyecto sea factible el análisis de acortamiento de su duración, necesariamente tiene que ...

1) existir tareas a las que es posible reducir su tiempo de ejecución.

2) estimarse el aumento de costos directos en las tareas que pueden acortar su duración.

3) indicarse a cuánto ascienden los costos indirectos por unidad de tiempo.

4) aplicarse todo lo consignado en las expresiones anteriores.

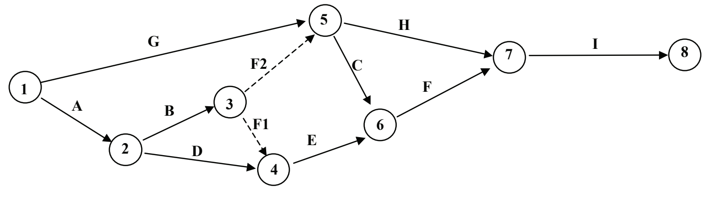
5) omitirse todo lo consignado en las expresiones anteriores.

Ejercicio 2.4.9.

Áloe Quantum SRL decide hacer un proyecto para realizar una investigación de mercado entre los clientes registrados en su base de datos. A tal efecto confecciona la siguiente lista de tareas con duraciones en semanas y costos en miles de pesos.

TAREAS	Duración Optimista	Duración Más Probable	Duración Pesimista
A Desarrollar el cuestionario.	8	9	10
B Imprimir formularios	7	8	9
C Envíar por correo y recibir respuestas	7	8	15
D Desarrollar *software* para procesamiento	4	6	8
E Probar el *software*	3	3	3
F Procesar los datos recolectados	5	13	15
G Imprimir etiquetas con domicilios	4	4	10
H Diseñar Formato Preliminar del Informe	1	1	1
I Escribir y presentar el informe final	1	7	7

La siguiente red tiene una representación del proyecto.



a) Calcule la duración estimada, y el desvío estándar y varianza de la duración de cada tarea que compone el proyecto. **Si los resultados obtenidos no son enteros, expréselos utilizando un solo decimal.**

b) Estime la duración que tendría el proyecto según los datos proporcionados, y el desvío estándar de tal duración.

c) Estime qué duración debería tener el proyecto si se pretende cumplirla con un 95,05% de certeza.

Ejercicio 2.4.10.

Utilizando los datos y resultados del ejercicio **2.4.9.**

Usted forma parte del equipo del proyecto y le solicitan que realice simulaciones sobre la duración del mismo. Decide utilizar la tabla con valores aleatorios de la función Beta de Euler que se muestra a continuación, comenzando por la primera fila de la tabla, tercera columna, recorriendo la tabla hacia abajo en dicha columna a medida que necesite más números.

Distribución al azar de la función Beta de Euler														
Para a=4, b=4					**Para a=2, b=6**					**Para a=6, b=2**				
Utilizar si t_m equidista de t_o y t_p					**Utilizar cuando t_m se acerca a t_o**					**Utilizar cuando t_m se acerca a t_p**				
0,19	0,58	-0,34	-0,85	0,40	-0,77	-0,07	-0,11	-0,69	1,03	1,41	-0,66	0,33	1,55	0,18
0,61	0,31	-0,75	-1,17	-0,40	-0,30	-0,07	0,19	-0,98	1,38	-0,96	0,78	-0,09	1,52	0,97
0,68	0,61	-0,49	-0,28	0,88	0,94	0,03	-1,09	-0,73	0,37	0,04	0,92	1,39	0,13	-,097
0,58	-1,22	-0,85	1,64	-0,28	-0,03	-0,72	0,57	0,47	-1,57	-0,33	0,60	0,86	0,46	0,00
-1,08	1,82	0,22	-0,85	-0,37	0,01	-0,82	-0,22	0,93	0,49	-1,09	0,51	0,91	0,32	0,03
0,08	-0,52	-1,37	0,96	-0,55	0,12	0,49	-1,00	-0,72	-0,33	1,42	-0,52	0,19	-1,33	2,00
-0,19	-1,08	1,00	0,55	-0,52	-0,20	0,11	-0,06	-0,93	-1,53	0,47	-0,63	1,11	1,64	1,93
-0,70	-0,68	-1,64	-0,74	0,34	0,97	2,01	0,41	0,04	-1,53	0,30	-0,36	1,07	1,68	-1,11
-1,72	1,50	1,50	0,22	1,00	0,12	-0,84	0,02	-0,11	-1,36	1,00	-1,49	-1,13	0,69	0,99
0,46	-1,35	0,03	-0,46	0,28	-0,23	-1,46	0,31	0,31	-1,39	0,48	1,41	0,20	-0,87	-0,37
-0,43	-0,05	1,04	0,64	1,33	-0,10	-1,47	0,29	-0,53	1,01	1,59	0,47	-0,97	-2,43	-0,90
-1,43	-0,31	-1,64	1,72	-0,11	1,84	0,00	-0,19	2,43	0,00	0,61	-1,45	1,36	1,66	0,11
-0,58	-0,58	-1,08	0,92	0,78	-0,08	-0,59	-0,93	-1,15	2,13	-0,97	1,49	1,23	-1,51	1,06
0,14	-1,00	-1,08	-0,58	-0,02	1,19	-0,47	-0,46	-1,41	-0,61	1,47	1,41	1,16	-1,07	-0,07

a) Calcule las duraciones simuladas para las tareas C, F y G.

b) Tenga en cuenta que, en procesos adicionales, se han simulado las siguientes duraciones de tareas: A, 9,2; B, 7,9; D, 6,1; E, 3,0; H, 1,0; I, 6,2. Con estos datos y los que resultan del inciso **a)** estime la duración del proyecto.

c) Dadas las siguientes oraciones incompletas, señale con cuáles de las opciones listadas a continuación conforman una expresión válida. (puede haber más de una que satisfaga la condición).

I. La simulación realizada en los incisos **a)** y **b)** de este ejercicio ...

1) permite afirmar, sin dudas, que la duración del proyecto será mayor que la estimado en **2.4.9. b).**

2) por sí sola no aporta demasiados elementos de juicio para estimar duración del proyecto.

3) requiere complementarse con un número muy grande de simulaciones similares.

4) participa de todo lo consignado en las expresiones anteriores.

5) no responde en absoluto a lo consignado en las expresiones anteriores.

II. Si además de la simulación realizada los incisos **a)** y **b)** de este ejercicio se hubieran hecho muchas más (pongamos por caso, 1000), se podrían estimar probabilidades de terminar el proyecto en determinadas fechas aplicando ...

1) la Distribución Beta de Euler.

2) la Distribución Normal cuyos parámetros se estimaron en el ejercicio **2.4.9.b)**.

3) la Distribución Normal cuyos parámetros surgen de los valores simulados.

4) cualquiera de las Distribuciones mencionadas en las expresiones anteriores.

5) ninguna de las Distribuciones mencionadas en las expresiones anteriores.

2.5. Apéndice.

2.5.1. Otras técnicas aplicables a la administración de proyectos

Se mencionarán sucintamente algunas técnicas que se han desarrollado para aplicar en la administración de proyectos, y que no han sido descriptas en el texto.

2.5.1.1. PERT y CPM

El desarrollo del capítulo se basó en las técnicas CPM *(Critical Path Method)* y PERT *(Program Evaluation and Review Technique)* sin realizar demasiadas distinciones. En realidad, aunque ambas comenzaron a aplicarse a mediados del siglo pasado, provenían de ambientes diferentes: PERT surgió en la Oficina Naval de Proyectos Especiales con motivo de la construcción del primer submarino nuclear en Estados Unidos en el marco del Proyecto Polaris, mientras que CPM se debe a dos especialistas de las empresas Remington Rand y Dupont y tuvo su aplicación en proyectos industriales con historia. Estos escenarios distintos de aplicación marcaron las diferencias iniciales entre ambas técnicas: PERT orientado a proyectos de índole aleatoria en sus tiempos, y CPM en proyectos en que se conocía con certeza la duración de las tareas (a lo que se sumó el análisis de intercambio entre tiempo y costos).

En la actualidad, el *software* moderno de administración de proyectos ha eliminado las diferencias iniciales y aprovecha lo mejor de cada una de las técnicas simultáneamente.

2.5.1.2. Otros métodos de cálculo y administración

Además de las técnicas descriptas en el título anterior, se han ideado otras que las sustituyen o complementan, entre las que se cuentan: PEP (desarrollado por la Fuerza Aérea de EEUU), LEES (creado por IBM), RAMPS (Método de distribución de recursos y programación de proyectos múltiples), PERT-LOB (Combina planeamiento y programación por teoría de redes con el control por línea de balance para administración de producción en serie o avance de obra), MAP (Método de asignación de mano de obra, utilizado simultáneamente tanto con PERT como con CPM), Algoritmo de Burguess (También se aplica para nivelar recursos conjuntamente con PERT y CPM), Algoritmo de Brooks (Similar al anterior, para casos de recursos limitados), Algoritmo Ford-Fulkerson (Se utiliza para PERT-Costo)

2.5.1.3. Métodos de Actividades en los Nodos

Para finalizar, una referencia a métodos en que -a diferencia de los utilizados en este capítulo- las actividades se grafican en los nodos de la red. Esta característica los tipifica como Métodos AON mientras que los otros son Métodos AOA[8]. Entre los Métodos AON se cuenta ROY, de origen francés, similar al CPM.

Los métodos AON también se denominan "de precedencia", o "de los potenciales". Como característica más notable está la facilidad para graficar la red, ya que prescinden de la inserción de tareas ficticias, lo que a su vez mejora la interpretación de los resultados de cálculos internos de la red. Esta metodología se difunde cada vez más en la literatura y, además, es la utilizada por los paquetes de *software* de administración de proyectos más conocidos del mercado.

2.5.2. La Distribución Beta de Euler aplicada en PERT

2.5.2.1. Breve repaso de conceptos teóricos

En la Distribución Beta se tiene una variable aleatoria t comprendida en el intervalo $[A,B]$, en el que $A > 0$ y $B > 0$. Se distribuye con la siguiente ley de densidad de probabilidad:

$$f_{(t)} = 0 \qquad ,\text{para } -\infty < t < A$$

$$f_{(t)} = \frac{(t-A)^{\alpha} + (B-t)^{\varphi}}{(B-A)^{\alpha+\varphi+1}\,\beta_{(\alpha+1,\varphi+1)}} \qquad ,\text{para } A \leq t \leq B$$

$$f_{(t)} = 0 \qquad ,\text{para } B < t < \infty$$

donde al cambiar de variable $x = \frac{t-A}{B-A}$ es $\beta_{(\alpha+1,\varphi+1)} = \int_0^1 x^{\alpha}.(1-x)^{\varphi}\,dx$

Como puede observarse, la distribución depende de cuatro paráme -tros A, B, α, φ, que son los que determinan la forma de la curva.

8 AON y AOA, representan a las frases en inglés: Activities On Nodes y Activities On Arcs, respectivamente.

Si se consideran las posibles formas que puede tener una distribución Beta según los valores adoptados por sus parámetros, los siguientes gráficos son ilustrativos.

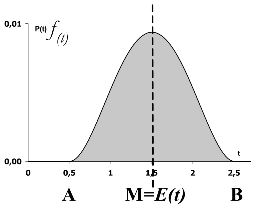


Figura 2.3. Distribución Beta simétrica

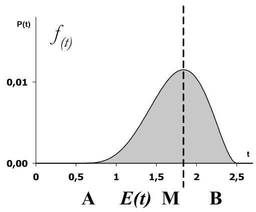


Figura 2.4. Distribución Beta asimétrica a la derecha.

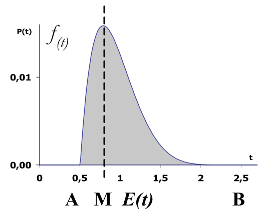


Figura 2.4. Distribución Beta asimétrica a la izquierda.

a) Simétrica	b) Asimetría a la derecha	c) Asimetría a la izquierda
Es ***B - M = M - A***, y por lo tanto coinciden ***E(t)*** y ***M***. La gráfica de la Figura 2.3. corresponde a una función Beta con parámetros ***A= 0,5***, ***B = 2,5***, $\boldsymbol{\alpha = 3}$, $\boldsymbol{\varphi = 3}$.	Cuando ***B - M < M - A***, es ***E(t) < M***. Los parámetros de la función de la Figura 2.4., son ***A= 0,5***, ***B = 2,5***, $\boldsymbol{\alpha = 5}$, $\boldsymbol{\varphi = 3}$.	Aquí ***B - M > M - A***, y en consecuencia es ***E(t) > M***. Los parámetros asignados a la función que aparece en la Figura 2.5. son: ***A = 0,5***, ***B = 2,5***, $\boldsymbol{\alpha = 2}$, $\boldsymbol{\varphi = 7}$.

Se puede concluir que la curva es acampanada, puede ser simétrica o no, y la probabilidad toma sus valores mínimos en A y B, y su valor modal es M. Para valores de la variable menores que A o mayores que B la probabilidad es cero.

2.6. Bibliografía.

ANDERSON, D., SWEENEY, D. Y WILLIAMS, T. (1993). *Introducción a los modelos cuantitativos para Administración*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

ANDERSON, D., SWEENEY, D. Y WILLIAMS, T. (2004). *Métodos cuantitativos para los negocios*. México, Thomson Editores.

HILLIER, F. Y LIEBERMAN, G. (1997). *Introducción a la Investigación de Operaciones.* México, McGraw Hill.

MATHUR, K. Y SOLOW, D. (2000). *Investigación de Operaciones - El arte de la toma de decisiones.* México, Prentice-Hall.

PROJECT MANAGEMENT INSTITUTE (2004). *A guide to the Project Management Book of Knowledge.* Third Edition (PMBOK Guide). Pennsylvania, PMI, Inc.

WINSTON, W. (1994). *Investigación de Operaciones.* México, Grupo Editorial Iberoamérica.

YU CHUEN-TAO, L. (1974). *Aplicaciones Prácticas del PERT y CPM.* Barcelona, Ed. Deusto

3

Capítulo 3

Líneas de espera

3

3. Líneas de espera

3.1. Características de fenómenos de espera. Elementos intervinientes; interrelación

3.1.1. La situación que puede representarse con este modelo

El fenómeno de la formación de líneas de espera (también llamadas colas de espera) ocurre en numerosas situaciones de la vida diaria. Desde las líneas que se forman para ser atendido en cualquier comercio donde se quiera proveer de un determinado artículo, pasando por las que se forman en la terminal de autoconsulta del Departamento Alumnos de una Facultad (sobre todo en época de inscripciones) o en el centro de fotocopiado, hasta las que forman los requerimientos de un sitio en la *Web* de *Internet* que esperan para ser resueltos por el servidor que los aloja, o el grupo de estudiantes que esperan para rendir un examen final oral, etc.

En todos los casos mencionados la característica común es que la demanda de un servicio excede a la capacidad de proporcionarlo.

Observar estas situaciones permite confeccionar modelos matemáticos para tratarlos, y:

- Tomar decisiones en cuanto a capacidad necesaria para prestar adecuadamente el servicio.
- Estimar cuántas unidades llegarán en busca del servicio en un determinado momento, y si habrá capacidad suficiente para atenderlas.
- Estimar el tiempo promedio que se debe esperar en la cola antes de ser atendido.
- Conocer las fracciones de tiempo que el servidor dedica a dar el servicio y al ocio.
- Estimar cantidades promedio y máxima de demandantes que esperarán en la fila.
- etc.

3.1.2. ¿Normativo o Descriptivo?

Los modelos matemáticos aplicados son en general de tipo descriptivo, ya que brindan información acerca de las características de las líneas de espera pero no proponen cursos de acción directos a seguir. Existe también un enfoque normativo, que tiene en cuenta que: a) Si se presta un servicio excesivo en procura de minimizar el tiempo que los demandantes del servicio pierden con motivo de la existencia de la cola, se incurrirá en costos excesivos (como por ejemplo, con empleados o equipos -servidores- ociosos la mayor parte del tiempo; b) Si el servicio es insuficiente se llegará a tener colas excesivamente largas, con los consiguientes costos sociales, de oportunidad, etc., ocasionados a quienes solicitan el servicio.

Para desarrollar los conceptos de estos modelos se tomará como ejemplo una hipotética empresa del medio ("Gomería Santa Rosa"), que está ubicada en la avenida de circunvalación Santiago Marzo de la ciudad de Santa Rosa a metros de la rotonda sur. Se dedica a la venta y reparación de neumáticos en general, para motocicletas, automóviles, camionetas o camiones.

La teoría de colas aplicada al caso particular de "Gomería Santa Rosa" indicará el tiempo promedio que esperan sus clientes antes de ser atendidos. Pero, si se planteara el objetivo de que los clientes esperen 5 minutos o menos para ser atendidos, no dará recomendaciones sobre cursos de acción conseguir tal tiempo de espera. O sea, que el modelo no posee un patrón general de optimización. A pesar de esto, en el punto 6 se incluye el análisis económico de las líneas de espera, el cual se lleva a cabo mediante modelos normativos que permiten optimizar el planteo, y tienen como referencia los distintos costos intrínsecos de un modelo de colas.

3.1.3. Elementos intervinientes

Un sistema de líneas o colas de espera es aquel en el cual los "clientes", provenientes de una población, llegan a una "estación" en procura de un servicio, esperan en una fila hasta que obtienen el "servicio" solicitado, y luego se retiran. Tales elementos constitutivos y la forma en que se relacionan se puede observar en la Figura 3.1. De ellos es importante distinguir entre **"cola"** (la fila que espera para obtener el servicio por estar ocupado el servidor) y **"sistema"** (que comprende la "cola" y el/los elemento/s que está/n recibiendo el servicio), especialmente al momento de calcular medidas de desempeño del modelo.

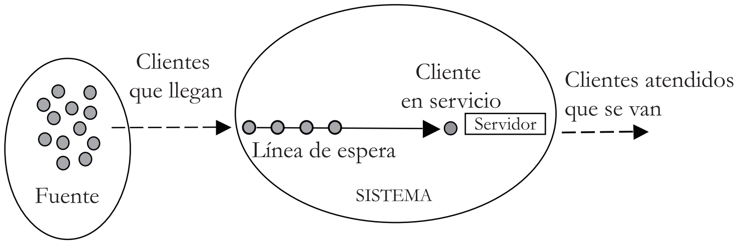


Figura 3.1. Sistema de línea de espera con un servidor

En general los clientes detestan las líneas de espera: provocan malestar por ser sencillamente una pérdida de tiempo. Por eso se opta por los servicios en que la espera es menor; precisamente una de las claves de triunfo del buscador *Web Google* fue tener el buscador que más rápido responde en la red (con lo que se minimiza la espera del usuario ante la pantalla).

Por esto, es necesario que quienes participan en la administración de organizaciones conozcan estos fenómenos, de manera de poder influirlos y obtener ventajas comparativas ante sus competidores y contribuir mejor que éstos a la satisfacción de las necesidades de los clientes.

En función de lo mencionado, se considera como Meta Final (al ser planteado como modelo normativo) obtener un balance económico entre costos por prestar los servicios y costos por la espera y recepción del servicio, de manera que el Costo Total sea mínimo. Este aspecto se desarrolla en el punto **3.6.**

Los casos más comunes de líneas de espera, llegar a agotar la variedad de situaciones que se pueden llegar a presentar, son: una fila de espera con varios servidores en paralelo; varios servidores en paralelo pero cada uno con su línea de espera, una fila de espera con clientes que serán atendidos por varios servidores en serie, y todas las combinaciones de estas situaciones que se puedan ocurrir.

Cualquiera sea la disposición de los elementos constitutivos del sistema de colas, se forma la línea de espera al no aprovecharse los tiempos ociosos del servidor, ya que cuando afluyen clientes le es imposible atender a una velocidad mayor de la observada como característica del sistema, y de esta forma no puede recuperar los tiempos perdidos. Esto se debe a que tanto los tiempos entre arribos como los de duración del servicio son variables aleatorias.

Existen algunas características que conviene considerar al formular un modelo que represente el funcionamiento de un fenómeno de espera. A continuación se describen las más destacadas.

3.1.3.1. Población de clientes

También denominada "Fuente", puede ser finita o infinita. Como el razonamiento y las fórmulas que de él derivan son mucho más sencillos si se trabaja con una población de número infinitamente grande, los estudios se inician con una población de clientes de tal tipo.

En el título **3.5**, del presente capítulo se verá una aplicación del modelo de colas cuya fuente tiene un número finito de clientes.

Para el caso de "Gomería Santa Rosa", cabe preguntarse cuál sería la población de clientes. Estaría definida por todos aquellos vehículos que necesiten de algún servicio en sus neumáticos; ya reparación o adquisición y colocación de neumáticos nuevos. Al suponer que el número de clientes es infinito se consideran, como potenciales clientes, los vehículos de la ciudad de Santa Rosa y otros que se encuentren de paso por la ciudad, por encontrarse el local de ventas ubicado sobre la ruta.

3.1.3.2. Distribución de arribos de clientes

Para poder definir un modelo matemático del sistema de colas de espera también debe conocerse el patrón estadístico con el cual los clientes arriban en busca de servicio.

Aunque tal patrón puede corresponder a cualquier distribución que refleje la aleatoriedad de las llegadas -y hasta tener comportamiento determinístico-, generalmente se supone que la llegada de los mismos responde a un proceso aleatorio de tipo poissoniano. Esto significa que la variable que representa al número de clientes arribados por unidad de tiempo (5 clientes por hora, 0,7 clientes por minuto, 46 clientes al día, etc.), se distribuye según la ley de probabilidades de Poisson, que la describe de manera aceptable.

O sea, se considera que las llegadas se producen aleatoriamente, con una media fija y conocida (parámetro necesario para la distribución de Poisson). En este sentido, cabe destacar los siguientes rasgos, característicos de un proceso de este tipo y que son aplicables a los fenómenos de espera:

• Los tiempos entre llegadas son independientes entre sí y del estado del sistema. La llegada de un cliente no influye en la probabilidad de llegada de otro cliente, característica conocida como amnesia estadística de la distribución de Poisson.

• La probabilidad de llegada en el intervalo h no depende del punto inicial del intervalo ni de la historia de llegadas que lo preceden. Sólo de la duración del intervalo.

El parámetro necesario para utilizar la distribución de Poisson es la media de arribos por unidad de tiempo, λ. Y su función de probabilidad define la probabilidad de x llegadas en un período específico, según la siguiente expresión, donde:

x= número de llegadas del período, cuya probabilidad de ocurrencia se quiere estimar.

λ= cantidad promedio de llegadas por período.

e= 2,71828.

$$p_{(x)} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad para\ x = 0,1,2,...$$

En la práctica, se deberían recolectar y tabular los datos, calcular la media y el Desvío Standard y realizar la prueba de bondad de ajuste de Chi-Cuadrado para ver si la distribución de las llegadas se ajusta a la distribución de Poisson. En general, se puede afirmar que si la varianza de los datos reales es un valor cercano a la media, se puede estar en presencia de una distribución de Poisson, mientras que, si el valor de la varianza es significativamente menor a la media, es más probable que ajuste mejor la Distribución Normal. Cualquiera de los casos merece la ratificación fundada en los procedimientos estadísticos mencionados.

3.1.3.3. Cantidad de servidores

El servicio se lleva a cabo a través de una o más instalaciones (estaciones) de servicio o servidores. Es común que los modelos muestren mejoras considerables en los indicadores de desempeño al aumentar el número de servidores; aunque, como es lógico, esto lleva a un aumento de los costos de operación. En los modelos que se verán a continuación se analizarán casos con un servidor o mayor número (finito) de éstos. Cuando se analice el modelo con múltiples servidores, los mismos deben proveer idéntico servicio al cliente. Contar con varios servidores que provean distintos servicios encadenados a través de los cuales pasen los clientes (en serie y en paralelo), responde al concepto de redes de colas el cual no es tratado en esta asignatura.

3.1.3.4. Distribución de los tiempos de servicio

Así como se necesita conocer la distribución de la cantidad de arribos para obtener indicadores del funcionamiento de un modelo de colas, se debe obtener la distribución de probabilidades de los tiempos de atención o duración del servicio. Para los tiempos de servicios la distribución de probabilidad más utilizada es la Exponencial; equivale a suponer tiempos de servicios variables y aleatorios. En el caso de "Gomería Santa Rosa" se cumple esta condición ya que los servicios pueden ser desde inflar un neumático a una moto hasta cambiar 16 neumáticos a un camión.

El parámetro de la distribución exponencial se conoce como μ, e indica el tiempo promedio de servicio cuando se calcula $1/\mu$ (media de la distribución). Para estimar el número medio de clientes servidos por unidad de tiempo (6 clientes servidos por minuto, 0,89 cliente servido por hora, etc.) se utiliza directamente el valor de μ.

Caben las mismas salvedades hechas para la distribución de Poisson en cuanto al ajustamiento de una distribución real a una teórica. Esto es que, si bien comúnmente la distribución Exponencial es la que mejor representa a la variable "Tiempo de servicio", puede aplicarse cualquier otra siempre y cuando se hagan y sean favorables las pruebas de bondad correspondientes.

3.1.3.5. Vinculación entre distribuciones Poisson y exponencial

Se describirá brevemente la relación existente entre las distribuciones Exponencial y Poisson en los fenómenos de espera. Es de hacer notar que el uso de una distribución define automáticamente a la otra. O sea: expresar que las llegadas se distribuyen según Poisson con velocidad media λ por unidad de tiempo, equivale a decir que los tiempos entre arribos se distribuyen de acuerdo a la distribución Exponencial Negativa con media $1/\lambda$. Similar razonamiento vale para los tiempos de servicio: al afirmar que éstos se distribuyen según la distribución Exponencial, se expresa que la cantidad de servicios por unidad de tiempo se distribuye según Poisson.

3.2. Características de operación; sistemas en estado estable; medidas de eficiencia

3.2.1. Cómo opera la situación modelada como cola

Tal como se consignó anteriormente, los clientes provenientes de una población se colocan en la línea de espera, y aguardan su turno para acceder a la prestación del servicio. También se describieron las formas que pueden adoptar tanto el patrón de arribos como el de servicio, así como las características que presentarían los elementos a cargo de prestarlo.

Se definirán ahora otros aspectos no menos importantes, que hacen al modelo tratado.

3.2.1.1. Disciplina de cola

Se refiere al orden según el cual se seleccionarán los clientes para recibir el servicio. Puede ser:

• Primero Entrado Primero Servido (PEPS) (En inglés, FIFO -*first in, first out*- o FCFS -*first come, first served*-)

• Último Entrado Primero Servido (UEPS) (En inglés, LIFO -*last in, first out*- o LCFS -*last come, first served*-), o atención "por pila".

• Servicio en Orden Aleatorio (SEOA) (En inglés, SIRO -*service in random order*-)

• De acuerdo a algún otro orden o procedimiento preestablecido

En general, cuando se trata con clientes persona se utiliza PEPS porque evita un factor irritante como es que los clientes llegados en un determinado momento sean servidos antes de los que les precedieron en su arribo al sistema.

Existen otros modelos de colas en los cuales se asignan prioridades a los distintos clientes, de acuerdo con las características del servicio que requieran (Ej. Sala de guardia de un nosocomio).

En modelos de múltiples servidores se debe analizar si los clientes forman una sola cola, en la cual (si se supone disciplina PEPS) el primero de la misma utiliza el primer servidor libre o, si por el contrario, se forma una línea de espera delante de cada servidor. Los modelos de múltiples servidores que se presentarán se basan en el primer supuesto, y se podría afirmar que es el más justo en el mantenimiento riguroso de la disciplina de cola elegida. Por ejemplo, si se elige PEPS con una sola cola que abastezca varios servidores se asegura el cumplimiento del método. Al utilizar varias colas debería consignarse que PEPS se aplica a la línea de espera, y no al sistema.

En el ejemplo de "Gomería Santa Rosa" se seleccionará PEPS, sin establecer prioridad alguna.

3.2.1.2. Sistema en estado estable

Los fenómenos de espera tienen dos etapas: una primera o período transitorio (de preparación y ajuste de operaciones) y una segunda o de estado estable. El período transitorio presenta distorsiones en las características típicas del fenómeno observado -lo cual hace recomendable su exclusión del análisis-. Tales alteraciones podrían ser, por ejemplo, un servidor que al iniciar sus operaciones encuentra que ya hay cola formada con anterioridad, o uno que cierra el acceso de nuevos clientes pero continúa atendiendo a aquellos que ya están en la cola.

El estado de transición termina cuando el sistema llega a operación normal, es decir a estado estable, en el cual los flujos de arribos y servicios interactúan de la manera que es más representativa de la realidad que se observa, sin alteraciones bruscas o extemporáneas.

Los modelos de línea de espera describen las características de operación de estado estable de la línea de espera.

3.2.2. Medidas de eficiencia o desempeño

A partir de los datos originales del problema se pueden calcular las siguientes medidas de desempeño o eficiencia de un modelo de colas.

- Cantidad promedio de clientes en la cola ***(Lc)***
- Cantidad promedio de clientes en el sistema ***(Ls)***
- Tiempo medio de espera en la cola ***(Tc)***
- Tiempo promedio de permanencia en el sistema ***(Ts)***
- Probabilidad de que se forme cola (Su expresión depende del tipo de modelo)
- Probabilidad de que no haya elementos en el sistema $(P_{(0)})$
- Probabilidad de que haya n elementos en el sistema en el instante t. $(P_{(n)})$

Los cálculos para obtener las distintas medidas de desempeño varían según las características de cada modelo de colas (número de servidores, distribuciones de probabilidad de arribos y servicios, etc.). Pero se han podido extraer algunas relaciones fundamentales entre tales medidas cuando se supone cantidad de clientes infinita; son las llamadas ecuaciones de flujo de Little (en homenaje a John D. C. Little, que fue quien las demostró):

• Tiempo promedio en el sistema = Tiempo promedio de espera en cola + Tiempo promedio de servicio ***(Ts =Tc + 1/μ)***

• Número promedio de clientes en el sistema = Número promedio de llegadas por unidad de tiempo, multiplicado por Tiempo promedio en el sistema ***(Ls= λ . Ts)***

• Número promedio de clientes en la cola = Número promedio de llegadas por unidad de tiempo, multiplicado por Tiempo promedio en la cola ***(Lc= λ . Tc)***

3.3. Distintos tipos de modelos. Cola simple, un solo canal, capacidad infinita

3.3.1. La tipificación de los modelos de colas

Lo desarrollado más arriba permite describir adecuadamente cualquiera de las situaciones que se pueden presentar, pero conviene hacer una salvedad en cuanto a la notación de los sistemas de colas. D. G. Kendall (1953) sugirió una notación abreviada que permite llegar a describir de igual manera un modelo de líneas de espera, aunque en forma resumida.

La notación se basa, originalmente en tres códigos, separados por barras inclinadas:

A/S/e

donde:

A indica el patrón de **A**rribos: si determinístico o aleatorio (y en su caso, qué distribución de probabilidades es aplicable); si es individual o en grupo.

S indica el patrón de **S**ervicios: si determinístico o aleatorio (y en su caso, qué distribución de probabilidades es aplicable).

e indica el número de **e**staciones destinadas al servicio (cantidad de servidores)

Entre los valores más usuales que pueden tomar tanto **A** como **S** están:

• M: distribución de Poisson para arribos/servicios o Exponencial para tiempos entre arribos/de servicio (la M proviene de Markov)

• D: arribos o tiempos de servicio constantes o determinísticos.

• G: indica arribos o tiempos de servicio con una distribución de probabilidad General con media y varianza conocida, o bien según Gauss.

• Ek: tiempos de arribo o servicio se distribuyen según una distribución Erlang o Gamma.

A. M. Lee (1966) extendió la notación de Kendall hasta 5 símbolos al incorporar otros parámetros del modelo como capacidad del sistema y disciplina de la cola. Finalmente, H. A. Taha (1968) incorporó un sexto símbolo para representar el tamaño de la población o fuente demandante. La nomenclatura agrega, entonces, para tener seis parámetros:

/n/d/p

donde:

n indica la Capacidad del sistema, en número de clientes que admite como máximo (finita/infinita). Si se omite, se asume que es Capacidad Infinita.

d indica la disciplina de la línea de espera. En qué orden serán atendidos los clientes: FIFO/PEPS, LIFO/UEPS, por prioridades, etc. Si se omite este parámetro se asume que la atención sigue una disciplina FIFO/PEPS.

p indica la cantidad de elementos en la población (o fuente) de donde provienen los clientes (finita/infinita). Si se omite, se asume que es número infinitamente grande.

3.3.2. El modelo M/M/1

Se desarrollará un modelo para determinar las medidas de desempeño cuando se utiliza un solo servidor que opera en estado estable. Para concordar con la nomenclatura que, según Kendall, se le asignaría (M/M/1), corresponde considerar las siguientes características de la situación:

• Existe un solo canal de atención para los clientes
• Existe una sola línea de espera
• Las llegadas siguen una distribución de Poisson
• Los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial
• La disciplina de la cola es PEPS
• Población de clientes infinita.
• La cantidad de clientes en el sistema puede ser infinitamente grande

Las demostraciones matemáticas con las cuales se deducen las fórmulas son complejas y existe bibliografía específica donde se puede consultar tal desarrollo. Dado que el propósito de este trabajo es ver cómo las mismas brindan las características de operación de un sistema de colas, se omitirán tales deducciones.

Medida de Desempeño	Fórmula	Medida de Desempeño	Fórmula
Cantidad promedio de clientes en la cola	$L_c = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1).p_{(n)}$ $= \frac{\rho^2}{1-\rho}$ $= \lambda.T_c$	Cantidad promedio de clientes en el sistema	$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n.p_{(n)}$ $L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ $L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$
Tiempo promedio de espera en la cola	$T_c = \frac{L_c}{\lambda}$ $T_c = T_s\rho$	Tiempo promedio de permanencia en el sistema	$T_s = T_c + \frac{1}{\mu}$ $= \frac{1}{\mu-\lambda}$
Probabilidad de no esperar	$p_{(0)} = 1-\rho$	Probabilidad de que se forme cola	$p_{(n\geq 1)} = 1-(1-\rho)$ $p_{(n\geq 1)} = \rho$
Probabilidad de que haya ***n*** elementos en el sistema en el instante ***t***	$p_{(n)} = \rho^n(1-\rho)$		

Tabla 3.1. Medidas de desempeño para un modelo M/M/1

En las fórmulas que se transcriben se utiliza el símbolo ρ(rho). Éste es un indicador de fundamental importancia para determinar si existe realmente un problema de formación de colas y, en consecuencia, decidir si es razonable seguir con los análisis o abandonarlos. Concretamente, valores de ρ superiores a 0,5 deberían ser motivo de preocupación y determinar que se calculen el resto de las medidas de desempeño. Esto es así, ya que representa la cantidad de clientes que están entrando al sistema por cada uno que se atiende en una determinada unidad de tiempo. También es denominado **factor de tráfico o factor de utilización** de la instalación de servicio; es decir, la fracción esperada de tiempo que los servidores individuales están ocupados.

Concretamente, se calcula $\rho = \lambda / (\mu \, . \, s)$, donde s es la cantidad de servidores[9]; en este caso, $s=1$. Y debe ser $\rho < 1$, ya que en caso contrario se estará ante una situación en la que la cola crece indefinidamente.

Las medidas de desempeño de un modelo M/M/1 se muestran en la Tabla 3.1.

Ejemplo 3.1. Aplicación del modelo M/M/1

Para el caso de "Gomería Santa Rosa" se tienen en cuenta los siguientes datos observados:

• Los clientes llegan según distribución Poisson a velocidad media de 7,50 clientes/hora.

9 Algunos autores consideran únicamente $\rho = \lambda / \mu$, fórmula en la que se asume $s=1$. La medida de desempeño calculada de esta manera pierde sentido, y debe ser reformulada, cuando se la aplica en modelos con $s > 1$.

• Los tiempos de servicio siguen distribución exponencial con media de 6,50 min/servicio.

• Población de clientes infinitamente grande.

• Se dispone de un solo empleado que realiza los servicios.

• La disciplina de cola es PEPS.

Se calculan las medidas de desempeño que constan en la Tabla 3.2.

Medida de Desempeño	Cálculo para "Gomería Santa Rosa"
Cantidad media de arribos	λ = **7,50** clientes/hora
Cantidad media de servicios	μ = 60/6,50 μ= **9,23** clientes/hora
Factor tráfico	ρ = 7,50 / (9,23 . 1) $\rho = 0{,}8125$
Cantidad promedio de clientes en la cola	$L_c = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ $L_c = \frac{0{,}8125^2}{1-0{,}8125}$ $L_c = 3{,}52$ clientes
Cantidad promedio de clientes en el sistema	$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$ $L_s = \frac{0{,}8125}{1-0{,}8125}$ $L_s = 4{,}33$ clientes
Tiempo promedio de espera en la cola	$T_c = \frac{L_c}{\lambda}$ $T_c = \frac{3{,}52}{7{,}50}$ $T_c = 0{,}469$ horas
Tiempo medio de permanencia en el sistema	$T_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$ $T_s = \frac{1}{9{,}32-7{,}50}$ $T_s = 0{,}578$ horas
Probabilidad de no esperar	$p_{(0)} = 1-\rho$ $p_{(0)} = 1-0{,}8125$ $p_{(0)} = 0{,}1875$
Probabilidad de que se forme cola	$p_{(n\geq 1)} = 1-(1-\rho)$ $p_{(n\geq 1)} = 0{,}8125$
Probabilidad de tener 2 clientes en el sistema en el instante ***t***	$p_{(2)} = \rho^2(1-\rho)$ $p_{(2)} = 0{,}8125^2(1-0{,}8125)$ $p_{(2)} = 0{,}1238$

Tabla 3.2. Medidas de desempeño para "Gomería Santa Rosa" (M/M/1)

Las medidas de desempeño del modelo de "Gomería Santa Rosa" indican que el sistema no es satisfactorio. En la cola hay un promedio de 3,52 clientes, que esperan por el servicio 0,469 horas promedio (unos 28 minutos) y tardan 0,578 horas (35 min.) hasta salir atendidos.

¿A partir del modelo descriptivo, qué cursos de acción se podrían tomar para mejorar el servicio? Ya se especificó que no se trata de un modelo normativo; sin embargo, a partir de la descripción que los resultados obtenidos hacen de la situación modelada se pueden establecer estrategias de mejora. Generalmente sobre λ no se puede actuar, ya que el decisor que se enfrenta a una situación como la descripta no está en condiciones de manipular la demanda del servicio. Por lo tanto se debería mejorar el proceso de servicio, y las alternativas serían:

• disminuir los tiempos promedios de atención mediante mejoras en la eficiencia del empleado que presta el servicio; lo que es lo mismo, aumentar la velocidad promedio de servicio μ.

• Aumentar la cantidad de servidores. En este caso se cambiaría de modelo de líneas de espera, y se deberían aplicar las especificaciones analíticas del mismo (que se desarrollarán en el título siguiente).

En la primera opción podrían aplicarse innovaciones tecnológicas, como utilizar un equipo de pistola neumática, para mayor agilidad en quitar y reponer neumáticos (tarea hoy realizada manualmente), o incorporar un ayudante del operario, mejorar las habilidades y destrezas de los empleados, etc. El administrador debe considerar si las mejoras en los indicadores de eficiencia provenientes de la incorporación de nueva tecnología o personal, justifican la inversión.

Análisis económico similar debe realizarse con la opción de aumentar la cantidad de servidores.

3.4. Modelo con cola simple, múltiples canales paralelos y capacidad infinita

3.4.1. Características del modelo

Se tipifica como **M/M/s** en la notación de Kendall. En general, observa estas particularidades:

• Los clientes que llegan esperan en una sola cola y ocupan el primer servidor que se libera

• La línea de espera tiene dos o más canales de servicio que operan en paralelo y prestan el mismo servicio

• Las llegadas siguen una distribución de Poisson

• Los tiempos de servicio de cada canal siguen una distribución exponencial

• Cada canal atiende μ clientes por unidad de tiempo, y este valor surge de calcular el promedio para todos los canales (velocidad media de servicio)

• Población de clientes infinitamente grande

• La disciplina de la cola es PEPS

• La cantidad de clientes en el sistema puede ser infinitamente grande

Las fórmulas para calcular las medidas de desempeño se detallan en la Tabla 3.3.

Puede observarse que las fórmulas utilizan frecuentemente la fracción λ/μ, que se ha consignado así para no utilizar el símbolo ρ . De esta manera se evitan inconvenientes, ya que si se definiera $\boldsymbol{\rho = \lambda / \mu}$, existiría coincidencia con tal concepto del modelo M/M/1 en cuanto a escritura, pero en este modelo no tiene el mismo significado y puede inducir a errores; por ejemplo, puede ser $\boldsymbol{\lambda / \mu > 1}$ sin que impacte en forma negativa sobre el comportamiento de la cola.

Medida de Desempeño	Fórmula
Probabilidad de que no haya clientes en el sistema	$p_{(0)} = \left[\dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^s}{s!} \dfrac{s}{s-\left(\lambda/\mu\right)} + \sum_{n=0}^{s-1} \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} \right]^{-1}$
Cantidad promedio de clientes en la cola	$L_c = p_{(0)} \cdot \dfrac{\lambda \mu \left(\lambda/\mu\right)^s}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2}$
Cantidad promedio de clientes en el sistema	$L_s = L_c + \left(\lambda/\mu\right)$
Tiempo promedio de espera en la cola	$T_c = \dfrac{L_c}{\lambda} \qquad T_c = p_{(0)} \cdot \dfrac{\mu \left(\lambda/\mu\right)^s}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2}$
Tiempo medio de permanencia en el sistema	$T_s = T_c + \dfrac{1}{\mu}$
Probabilidad de que se forme cola (esto es, que la cantidad de clientes en el sistema iguale o supere a la cantidad de canales)	$p_{(n \geq s)} = p_{(0)} \cdot \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^s}{s!} \cdot \dfrac{s}{s-\left(\lambda/\mu\right)}$
Probabilidad de que haya ***n*** elementos en el sistema en el instante ***t***	$n \leq s: \quad p_{(n)} = p_{(0)} \cdot \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!}$ $n > s: \quad p_{(n)} = p_{(0)} \cdot \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{s^{n-s}\,s!}$

Tabla 3.3. Medidas de desempeño para un modelo M/M/s

Ejemplo 3.2. Comportamiento bajo la hipótesis de modelo M/M/s

Se evalúa el diseño de una nueva forma de atención al público en “Gomería Santa Rosa”, para lo que ahora se tendrán en cuenta las siguientes características del servicio:

• Los clientes llegan según distribución de Poisson y su velocidad media de arribo es 7,50 clientes/hora.

• Se contrata 1 empleado extra, provisto con el equipamiento correspondiente, por lo que se dispone de 2 servidores idénticos.

• Los servicios se realizan según distribución exponencial con una media de 6,50 minutos por servicio en cada uno de los servidores.

- Población de clientes infinita.
- Disciplina de cola PEPS.

Los resultados obtenidos se observan en la tercera columna de la Tabla 3.4., que se muestran conjuntamente con los provenientes del modelo M/M/1, para facilitar su comparación.

Los indicadores de desempeño del modelo de "Gomería Santa Rosa" mejoran sustancialmente al agregar un operario. Las estimaciones indican ahora que con 2 servidores se reducirá en más de 3 clientes la longitud media de la cola (longitud promedio 0,16 clientes contra 3,52), la probabilidad de que se forme cola es mucho menor (0,8125 contra 0,2347), los tiempos de espera en la cola se reducen drásticamente, de 28 minutos promedio en el sistema con un servidor a aproximadamente 1,5 minutos en el otro caso. En general, puede decirse que todos los indicadores muestran un sistema mucho más eficiente para servir al cliente. El análisis que deberían hacer los administradores de "Gomería Santa Rosa" es el de contraponer la mejora de servicios con los costos que ésta trae consigo.

Medida de Desempeño	M/M/1	M/M/2
Factor tráfico	$\rho = 0{,}8125$	$\rho = 7{,}50 / (9.23\,.\,2)$ $\rho = 0{,}40625$
Cantidad promedio de clientes en la cola	$L_c = 3{,}52$ clientes	$L_c = 0{,}16$ clientes
Cantidad promedio de clientes en el sistema	$L_s = 4{,}33$ clientes	$L_s = 0{,}97$ clientes
Tiempo promedio de espera en la cola	$T_c = 0{,}469$ horas	$T_c = 0{,}0214$ horas
Tiempo promedio en el sistema	$T_s = 0{,}578$ horas	$T_s = 0{,}1297$ horas
Probabilidad de no esperar	$p_{(0)} = 0{,}1875$	$p_{(n<s)} = p_{(0)} + p_{(1)}$ $p = 0{,}4222 + 0{,}3431$ $p_{(n<s)} = 0{,}7653$
Probabilidad de esperar	$p_{(n\geq 1)} = 0{,}8125$	$p_{(n\geq 2)} = 0{,}2347$
Probabilidad de tener ***n*** clientes en el sistema en el instante	$p_{(2)} = 0{,}1238$	$n = 2$ $p_{(2)} = 0{,}1394$ $n = 4$ $p_{(4)} = 0{,}023$

Tabla 3.4. Medidas de desempeño para "Gomería Santa Rosa" (M/M/1 y M/M/2)

Debe destacarse que la aplicación de las fórmulas para múltiples servidores en cálculo manual puede llegar a ser tarea muy compleja (considérese un sistema de 30 o 40 servidores). Pero, sin tener que utilizar *software* específico aplicable a Teoría de las Colas, se puede armar una planilla electrónica que incluya un buen número de servidores y que se pueda reutilizar según las necesidades de quien debe decidir. Además, la mayoría de los textos bibliográficos permite acceder a aplicaciones que resuelven ese tipo de sistemas. Por ejemplo, Eppen (2000) incluye un disco compacto con una planilla de cálculo para Microsoft Excel, llamada Q1.xls, que realiza los cálculos en función de los parámetros ingresados.

3.5. Modelos de espera con población demandante finita

3.5.1. Características del modelo

Para este modelo la notación de Kendall ampliada es **M/M/1/∞/PEPS/N.** Del total ***N*** de elementos que hay en la población, cuando es utilizado el sistema hay ***1*** cliente en servicio y ***n - 1*** que esperan (si se considera que hay ***n*** clientes en el sistema).

En los modelos vistos hasta ahora se hizo un supuesto válido para la mayoría de los sistemas de colas: que la población tiene un número infinitamente grande de clientes. Bajo este supuesto la velocidad media de llegadas, ***λ***, se mantiene constante. Pero si la población solicitante está acotada a una cantidad finita de ***N*** elementos, el promedio de llegadas ***λ*** (tal como se definió hasta ahora) cambia a medida que cambia el número de clientes que hay en el sistema ***(n).***

Esto obligaría a aplicar un valor distinto de ***λ*** ante cada valor que adopte ***n*** (cantidad de clientes en el sistema), lo que convertiría el cálculo en un proceso sumamente engorroso. En cambio, se considerará que el concepto conocido como **velocidad media de llegadas se identifica con la frecuencia con que "cada unidad" llega o busca servicio.** O sea que, en vez de ajustar el valor de ***λ***, como sugeriría la descripción del sistema realizada en el párrafo anterior, **en este modelo *λ* indica el promedio de veces por unidad de tiempo que cada componente de la población requiere el servicio. En tal caso, también es fija dado que, se entiende, todos los clientes se comportan de manera similar.**

Lo explicado en el párrafo previo, visto desde la relación entre tiempo entre arribos y cantidad de éstos, lleva a definir a ***λ*** como **el inverso multiplicativo del tiempo transcurrido entre cada oportunidad en que cada unidad (cliente) requiere el servicio (*λ=1/Ta*).**

Por lo dicho anteriormente, se modifican algunas características del sistema en relación con M/M/1:

• El modelo tiene un solo canal de atención y una sola fila de espera

• La población de unidades que pudiera solicitar el servicio es finita.

• Cada unidad llega al sistema según distribución Poisson. Velocidad media de llegadas, $\boldsymbol{\lambda}$

• Los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial. La velocidad media de servicio es $\boldsymbol{\mu}$.

• La disciplina de la cola es PEPS

Las fórmulas para calcular indicadores de desempeño, se incluyen en la Tabla 3.5.

Medida de Desempeño	**Fórmula**
Probabilidad de no esperar	$p_{(0)} = \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n} \right]^{-1}$
Cantidad promedio de clientes en la cola	$L_c = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \left(1 - p_{(0)} \right)$
Cantidad promedio de clientes en el sistema	$L_s = L_c + \left(1 - p_{(0)} \right)$
Tiempo promedio de Espera en la cola	$T_c = \frac{L_c}{(N - L_s)\lambda}$
Tiempo medio en el sistema	$T_s = T_c + \frac{1}{\mu}$
Probabilidad de que haya ***n*** elementos en el sistema en el instante ***t***	$p_{(n)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n} \cdot p_{(0)}$

Tabla 3.5. Medidas de desempeño para un modelo M/M/1/∞/PEPS/N

Ejemplo 3.3. Número fijo de clientes de la gomería

"Acueductora SA" construye el acueducto del Río Colorado, y lanza una licitación para contratar el mantenimiento de tren delantero y neumáticos a 10 de sus retroexcavadoras. La administración de "Gomería Santa Rosa" debe decidir si se presenta o no a cotizar para hacer el trabajo y si contrata personal para realizar las reparaciones; cada empleado puede reparar una máquina a la vez. La empresa pone como condición que, una vez entregada la máquina a "Gomería Santa Rosa", el tiempo promedio de devolución (ya reparada) no puede exceder de 1,5 días.

Una estimación provista por la empresa indica que, en promedio, cada máquina demanda ser reparada cada 4 días y el servicio de cada máquina requiere de medio día de trabajo.

O sea que el modelo de "Gomería Santa Rosa", se planteará con las siguientes características de operación:

• La línea de espera tiene un solo canal de atención

• La población de unidades que pudiera solicitar el servicio es finita e igual a 10, lo que para el modelo se transforma en el dato $N=10$

• Las llegadas de cada unidad siguen una distribución de Poisson, con velocidad media de llegadas $\lambda=1/4$ máquina por día, que se obtiene de considerar que cada equipo requiere servicio cada 4 días en promedio

• La cantidad media de servicios por día es $\mu=2$, ya que $\mu = 1 / 0{,}5$ (la inversa del tiempo medio de servicio, que resulta de una variable que sigue una distribución exponencial)

• La disciplina de la cola es PEPS

El resultado de realizar los cálculos consta en la Tabla 3.6.

Medida de Desempeño	Fórmula
Probabilidad de no esperar	$P_{(0)} = 0{,}1217$
Cantidad promedio de clientes en la cola	$L_c = 2{,}09$ máquinas
Cantidad promedio de clientes en el sistema	$L_s = 2{,}97$ máquinas
Tiempo medio de Espera en la cola	$T_c = 1{,}19$ días
Tiempo medio de permanencia en el sistema	$T_s = 1{,}69$ días
Probabilidad de que haya ***2*** máquinas descompuestas en el instante ***t***	$P_{(2)} = 0{,}1711$

Tabla 3.6. Medidas de desempeño para el modelo M/M/1 /∞/PEPS/10

La conclusión que se extrae de los resultados obtenidos es que dada estas condiciones se podría aconsejar a la dirección de "Gomería Santa Rosa" que no firme el contrato propuesto, porque se estima que en promedio una máquina estará en el sistema 1,69 días, lo que excede la pauta fijada por Acueductora (1,5 días).

Ejemplo 3.4. Alternativa al número fijo de clientes de la gomería

Ahora considérese que la gerencia de Acueductora admite la posibilidad de firmar contrato por el mantenimiento de sólo 5 de las máquinas.

En este caso se cuenta con los siguientes datos:

• El sistema tiene un solo canal de atención y una fila de espera

• La población de unidades que pudiera solicitar el servicio es finita e igual a 5 $(N=5)$.

• Las llegadas de cada unidad siguen una distribución de Poisson, con velocidad media de llegadas $\lambda=1/4$

• Los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial con parámetro $\mu=2$

• La disciplina de la cola es PEPS

El único cambio producido es el número de clientes: en este caso 5 máquinas. La pregunta que surge es por qué no varía λ (que indica la cantidad media de llegadas por unidad de tiempo); si se disminuye a la mitad la población, se tiene una tendencia a pensar que la velocidad de llegadas disminuirá. La respuesta está en que permanece constante debido a que en este modelo **λ no representa la velocidad media de llegadas de clientes desde la población, sino la cantidad media de llegadas de cada máquina tomada individualmente,** por lo que **no depende del número total de máquinas** que pueden entrar al sistema ***(N-n).***

Al realizar los cálculos del nuevo modelo se obtiene la Tabla 3.7.

Medida de Desempeño	Fórmula
Probabilidad de no esperar	$P_{(0)} = 0{,}479$
Cantidad promedio de clientes en la cola	$L_c = 0{,}31$ máquinas
Cantidad promedio de clientes en el sistema	$L_s = 0{,}83$ máquinas
Tiempo medio de Espera en la cola	$T_c = 0{,}299$ días
Tiempo medio de permanencia en el sistema	$T_s = 0{,}799$ días
Probabilidad de que haya ***2*** máquinas descompuestas en el instante ***t***	$P_{(2)} = 0{,}1497$

Tabla 3.7. Medidas de desempeño para el modelo M/M/1/∞/PEPS/5

Como se puede observar, las medidas de desempeño mejoran considerablemente al disminuir el número de clientes. En este caso se puede prestar el servicio en las condiciones que requiere Acueductora, ya que se estima que en promedio una máquina estará 0,799 días fuera de servicio por problemas de tren delantero o neumáticos.

3.6. Análisis económico de las líneas de espera

3.6.1. Dos modos de analizar una misma situación problemática

Hasta ahora se vio que los modelos de espera en fila se utilizan como descriptivos de una situación de la vida real y aportan elementos de juicio para una toma de decisión en cuanto al diseño del sistema real para actuar sobre los indicadores de desempeño. También pueden ser abordados mediante el planteo de modelos normativos, y además brindan información que puede relacionarse con los costos (incurridos o implícitos) y posibilitan otro tipo de evaluaciones.

3.6.2. La incorporación de costos al modelo

En este caso se trata de diseñar el sistema de atención más adecuado económicamente. En tal sentido, debe recordarse que se forma línea de espera cuando las estaciones de atención que deben satisfacer la demanda proveniente de la población no tienen la suficiente capacidad de prestación del servicio. Como ya se expresó antes, se pueden identificar costos originados en dos hechos relacionados: **1**. por estar en el sistema (primero, esperando en la cola y, después, recibiendo el servicio), debido al hecho mismo de requerir la prestación del servicio; **2**. por prestar el servicio con más y/o mejores servidores, con la intención de minimizar el tiempo que los clientes pasan en el sistema.

3.6.2.1. Costos por esperar en la cola y estar recibiendo el servicio (Costo del cliente)

Se puede razonar que la cola de espera podría ser virtualmente eliminada si se proveyera abundante cantidad de servidores y/o se aumentara la capacidad individual de cada uno de ellos. De esta manera, se terminaría con el desagrado, la irritación y los frecuentes costos monetarios causados por la espera. Sin embargo, dado el carácter aleatorio de la situación, no hay garantía de que nunca se formará cola: en algún momento puede ocurrir un arribo masivo de clientes que obligue a esperar por su atención. Además, siendo rigurosamente matemáticos, en los cálculos de L_c y L_s participa, como numerador, $\rho = \lambda / \mu$, cuya única posibilidad de ser cero está cuando $\lambda=0$; o sea, si eliminan los arribos.

Cuando se trata de clientes externos a la organización que presta el servicio el problema puede separarse en dos casos distintos según se trate de realizar actividades que trasuntan un interés comercial o que sean prestaciones de servicios sociales a cargo de entidades sin fines de lucro. De tal manera, se tiene que:

a) En el primero de los casos, el costo implícito en las actitudes de los clientes es bastante difícil de estimar, ya que el mismo puede manifestarse de inmediato (por ejemplo, abandonar la cola al desistir de la espera) pero también puede traer consecuencias futuras a partir de la difusión que se haga de la mala atención recibida en la organización (puede provocar que ese cliente no regrese y se lo pierda, y que además impacte sobre la voluntad de otros potenciales clientes que no se verán atraídos por requerir un servicio deficiente).

b) En los sistemas de servicios el costo generado es de tipo "social", y en tal caso también es dificultosa su evaluación, habida cuenta que significa asignar un valor monetario a las implicancias que la mala atención tiene para la sociedad en su conjunto.

Si los problemas de espera ocurren en circunstancias intrínsecas de la organización, como sería en la prestación de un servicio interno dentro de una empresa (fotocopiados, carga y descarga de camiones, distribución de correspondencia interna o de insumos de utilización frecuente, etc.), en general es un poco más fácil costear el tiempo no aprovechado por causa de la cola y de la prestación del servicio. En tal caso, por interpretación de la productividad perdida debido a las ineficiencias del sistema de cola, se puede asignar un costo al tiempo de los clientes internos que en lugar de estar dedicados a sus tareas específicas están demorados en procura del servicio.

3.6.2.2. Costos por prestar el servicio (Costo del Servicio)

Por el lado de la prestación del servicio, la provisión de numerosos y/o mejores servidores para evitar la formación de las colas de espera acarrea costos de instalación, operación y mantenimiento. Éstos también, desde un punto de vista económico, no son deseables. En tales casos se puede contar con la información necesaria para identificar el costo por unidad de tiempo que el servidor opera; o bien conocer cuánto cuesta, en promedio, atender a un cliente.

3.6.2.3. Costos a tener en cuenta y variables de decisión

De manera que el problema de colas se enfoca ahora en encontrar el balanceo adecuado entre los costos opuestos mencionados: "Costo del Cliente" ***(CC)*** y "Costo del Servicio" ***(CS)***. Con mayor rigurosidad científica -y en atención al carácter estocástico del modelo bajo análisis- deberían designarse como "Costo Esperado del Cliente" y "Costo Esperado del Servicio", puesto que tanto la cantidad de arribos como los tiempos de atención son de tipo aleatorio.

El objetivo es, pues, obtener un sistema de colas que **minimice** el Costo Esperado Total ***(CT),*** constituido por la suma del Costo Esperado del Cliente y del Costo Esperado del Servicio.

Entonces, la ecuación general de "Costo Esperado Total" responde a

$CT = CC + CS$ (1)

Como en todo modelo normativo deben identificarse las variables de decisión, también en este caso corresponde precisar sobre qué elementos de los mencionados al describir un sistema de colas se podrá operar para conseguir dicho costo mínimo. En general, al administrar un sistema de colas se puede actuar sobre tres variables: número de servidores *(s),* velocidad media de atención de los servidores *(μ),* y/o -en menor medida, ya que no siempre se la puede modificar- cantidad media de arribos *(λ)* por unidad de tiempo.

Como modelo normativo de líneas de espera en este texto únicamente se considerará, **en un modelo M/M/1,** la posibilidad de **actuar sobre la velocidad media de servicio de la estación, como variable de decisión.** Queda a discreción del lector la indagación sobre las otras posibilidades citadas, mediante la consulta de bibliografía especializada.

Costo Esperado del Servicio

A efectos de poder determinar el valor óptimo de la variable de decisión, se considerará que hay una relación lineal entre los costos por atender a un cliente y la velocidad media de atención del servidor. Esto es, que la ecuación que representa al "Costo Esperado del Servicio", expresada en función de la velocidad media de servicio *(μ)* requiere identificar cuánto cuesta atender a cada cliente *(C_s)* y este importe se mantiene constante aunque varíe *μ*. Si bien este dato no siempre está disponible en forma directa, es factible su obtención a partir del costo del servidor por unidad de tiempo y de relacionar este dato con la cantidad media de servicios brindados por unidad de tiempo.

De tal manera, se tiene que

$CS = C_s \,.\, \mu$ (2)

Dado que el factor *μ* aplicado en la ecuación *(2)* esta referido a cantidad de clientes atendidos en una cierta unidad de tiempo, el costo resultante también se aplicará a tal unidad de tiempo.

En general, si se conoce el costo por prestar el servicio en la unidad de tiempo elegida para el análisis, dicho costo es ***CS,*** y en tal caso -para calcular ***CT***- no es necesario indagar el valor del factor C_s, ya que se lo hace constar directamente como lado derecho de la ecuación *(2)* sin discriminar ambos factores. Sin embargo, como se verá más adelante, la forma presentada en la ecuación *(2)* es necesaria para realizar algunos cálculos adicionales.

Costo Esperado del Cliente

En cuanto al "Costo Esperado del Cliente", estará en función de la cantidad de clientes que, en promedio, haya dentro del sistema y del costo por estar en dicha situación cada uno de tales clientes. El primero de estos conceptos, tal como se consignó al tratar las medidas descriptivas de desempeño del modelo de colas, está dado por la "Longitud media del sistema" ***(Ls),*** mientras que para el costo respectivo ya se mencionaron más arriba las distintas formas que habría para calcularlo o estimarlo.

Se puede plantear entonces la siguiente ecuación:

$$CC = C_c \cdot Ls \qquad (3)$$

El factor ***(Ls)*** que aparece en la ecuación ***(3)*** también se puede expresar en función de la cantidad de arribos ***(λ)*** que haya en la unidad de tiempo seleccionada para el estudio y de la cantidad de tiempo que cada uno de los clientes deba permanecer en el sistema (en cola y siendo atendido). Dicha equivalencia corresponde a una de las ecuaciones de Little, y oportunamente fue designada como ***Ts***. Por lo cual, al hacer los correspondientes reemplazos en la ecuación ***(3)*** se la reexpresa como

$$CC = C_c \cdot \lambda \cdot Ts$$

$$CC = C_c \cdot \lambda \cdot \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad (4)$$

Y ahora se reúnen las ecuaciones ***(2)*** y ***(4)*** para calcular el "Costo Esperado Total" y se tiene que

$$CT = C_c \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + C_s \cdot \mu \qquad (5)$$

La gráfica genérica de las ecuaciones ***(2), (4)*** y ***(5)*** es la que se muestra en la Figura 3.5.

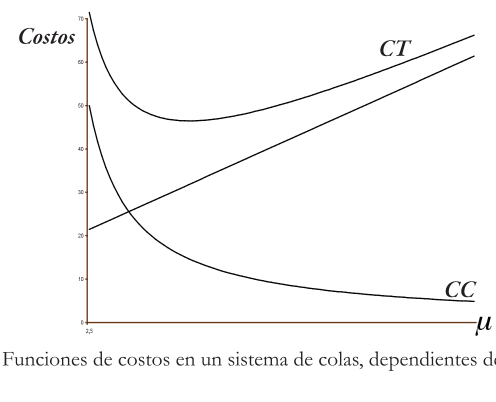


Figura 3.5. Funciones de costos en un sistema de colas, dependientes de la velocidad μ

3.6.2.4. Velocidad óptima de atención del modelo M/M/1

Dado que se supone la inmodificabilidad de la cantidad media de arribos al sistema por unidad de tiempo, se puede considerar que en la expresión ***(5)*** la única variable es $\boldsymbol{\mu}$ y es, además, la variable de decisión del modelo. Entonces, al obtener su primer derivada e igualarla a cero se tendrá el punto para el cual la función adopta un valor extremo; que en este caso será el mínimo de la función de "Costo Esperado Total".

Se obtiene de la siguiente manera.

$$\frac{\partial CC}{\partial \mu} = (-1) C_c \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} + C_s$$

$$0 = -\frac{C_c . \lambda}{(\mu - \lambda)^2} + C_s$$

$$\frac{C_c . \lambda}{(\mu - \lambda)^2} = C_s$$

$$\frac{C_c . \lambda}{C_s} = (\mu - \lambda)^2$$

$$\sqrt{\frac{C_c . \lambda}{C_s}} = \mu - \lambda$$

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{C_c . \lambda}{C_s}}$$

Y tal es la expresión a aplicar para obtener el **valor óptimo de la velocidad de atención en un sistema M/M/1 cuando se conocen tanto el costo por atender a un cliente promedio como el costo que tiene cada cliente por permanecer en el sistema.** Obvia consignar que de la raíz cuadrada sólo se debe tomar su resultado positivo ya que, para cumplir con la condición básica de análisis ($0 \leq \rho < 1$), debe ser $\boldsymbol{\mu > \lambda}$.

3.7. Ejercicios de Aplicación Práctica

Ejercicio 3.7.1.

Yuyito Parques y Jardines presta el servicio de reparación de máquinas de cortar césped utilizando un taller montado en sus instalaciones. Con la llegada de la primavera se impulsa nuevamente la actividad de reacondicionamiento de espacios verdes. Ante la inminencia de la mayor utilización de máquinas de corte, surgen las necesidades de los clientes para repararlas y realizarles el servicio técnico adecuado.

El gerente de *Yuyito Parques y Jardines* se ha planteado que, de acuerdo a sus costos y la imagen empresaria, la empresa debe estar en condiciones de dar una buena atención al cliente. Por tal motivo atienden de lunes a sábado durante todo el día.

Se considera que la empresa dará una buena imagen ante sus clientes si en el taller solamente se encuentran 2 máquinas incluyendo la que está siendo atendida. Analizando datos de años anteriores el gerente ha observado que, en promedio, solicitan reparación unas 19 máquinas por semana.

Además del gerente, del operario del taller y del personal que realiza tareas en la administración de la empresa, en el área de atención al público se desempeña una empleada que recibe los artefactos que solicitan reparación, completa un formulario con una breve reseña de lo descripto por el cliente, y deposita el implemento junto con el formulario en el "Pañol de elementos a reparar".

En el taller se desempeña un solo operario, quien retira del "Pañol de elementos a reparar" la próxima máquina a reparar. Lo hace siguiendo estrictamente el orden en que fueron recibidos los elementos y realiza su trabajo a una velocidad promedio de 4 servicios por día.

Un análisis metodológico de las actividades permite afirmar que tanto el proceso de recepción de máquinas como de prestación del servicio responden a fenómenos poissonianos.

a) Identifique, entre los elementos descriptos en el relato, aquellos constitutivos de un modelo de líneas de espera y que le serán de utilidad en los análisis que se solicitan a continuación.

b) Estime la cantidad promedio de máquinas que hay en el "Pañol de elementos a reparar" y el tiempo promedio que están en ese recinto.

c) Estime el tiempo que transcurre desde que una máquina es depositada en el "Pañol de elementos a reparar" hasta que está completamente reparada.

d) El gerente afirma que, en función de los datos observados, "la empresa esta cumplirá sin problemas el objetivo de atención al cliente que se ha propuesto". Comente brevemente con fundamentos si esta expresión está en lo cierto o no.

e) ¿Que probabilidad hay de cuando llegue una máquina para ser reparada haya 2 esperando ser atendidas?

f)El gerente evalúa la posibilidad hacer una promoción en la que conste que las máquinas comienzan a repararse apenas llegan, y requiere información que le sirva de apoyo ¿Qué probabilidad hay de no tener demoras en la espera para ser atendido?

Ejercicio 3.7.2.

Considere la situación de la empresa del ejercicio **3.7.1.**

Tenga en cuenta ahora que en el taller se cuenta con 2 empleados en condiciones idénticas de capacitación. Ellos prestan el mismo servicio, y atienden de a una máquina a la vez cada uno; al tomarlas del "Pañol de elementos a reparar" respetan su orden de llegada. Los operarios pueden reparar 3 máquinas diarias cada uno en promedio. La reducción en el rimo de reparación en relación con el caso anterior se debe se producen distracciones.

a) Determine si al contar con 2 operarios de taller la empresa puede cumplir con el objetivo que se ha propuesto para atención al cliente.

b) Estime cuánto tiempo pasa cada máquina en el "Pañol de elementos a reparar".

c) Suponga que entre los 2 empleados de taller surgen inconvenientes que provocan enemistades y se genera un clima laboral negativo. Como consecuencia de la nueva situación bajan su productividad y por día reparan un promedio de 1,50 máquinas cada uno. Evalúe cuáles serían las consecuencias para la empresa, realizando las pertinentes modificaciones al modelo.

Ejercicio 3.7.3.

Considere la situación de la empresa del ejercicio **3.7.1**.

La Gerencia evalúa descontinuar el servicio al público en general y dedicarse exclusivamente a atender a clientes fijos que tienen grandes parques y jardines en sus inmuebles. Los clientes a los que está en condiciones de proveer este servicio tienen un total de 10 máquinas similares.

Dado que el resto de la infraestructura de la empresa es totalmente aprovechable, el servicio para estos implementos sería prestado contando con un solo empleado de taller (el mismo de la situación descripta en el ejercicio **3.7.1.**)

a) Describa brevemente qué impactos tiene sobre el modelo esta nueva situación, en comparación con lo tratado en el ejercicio **3.7.1**..

b) Obtenga las medidas de desempeño de este nuevo modelo.

Ejercicio 3.7.4.

Frigorífico MCAD provee a terceros el servicio de faena de hacienda vacuna y porcina. Las categorías de hacienda vacuna que se procesan están tipificadas como:

- Vaca Buena
- Vaca Manufactura

- Toro Bueno
- Toro Manufactura
- Novillos
- Terneras y Terneros

Los animales porcinos se procesan una vez que se ha terminado con los vacunos y ya no queda hacienda de este tipo para procesar en el día.

Los animales ingresan al frigorífico en camiones y se los procesa inmediatamente ingresado siguiendo el criterio PEPS.

En promedio arriban 30 animales de hacienda vacuna por hora y 10 de hacienda porcina en la misma unidad de tiempo. El frigorífico está en condiciones de procesar 60 cabezas de hacienda vacuna y 30 de hacienda porcina por hora.

Las instalaciones se utilizan con 24 horas de trabajo diario efectivo aplicando 3 turnos de trabajo. No hay pérdidas de tiempo por el cambio de tipo de haciendo debido a que se cuenta con 2 líneas completas de faena: una para vacunos y otra para porcinos. Como ambas líneas son atendidas por el mismo personal, la hacienda porcina se procesa una vez finalizado el trabajo con la hacienda vacuna.

El mantenimiento de las máquinas y utensilios de faena se hace aprovechando el tiempo ocioso de cada línea.

Se ha observado que tanto los arribos como los servicios pueden ajustarse a Distribución Poisson.

a) Identifique en el enunciado, clientes, servidores, procesos de arribos, disciplina de la cola, y demás características de interés.

b) Consigne si las siguientes expresiones, referidas al enunciado presentado, son **V**erdaderas o **F**alsas. Fundamente brevemente la respuesta si es necesario.

1) El modelo antes descripto puede clasificarse como ***M/M/2.***

2) Como está planteado el enunciado, se puede confeccionar un modelo ***M/M/1*** y abarcar las faenas de los 2 tipos de hacienda.

3) Las actividades descriptas configuran un modelo ***M/M/1/∞/PEPS/2*** ya que se tienen dos tipos de hacienda: vacuna y porcina.

4) La cola del sistema de faena está conformada por los camiones esperando ser descargados.

c) Realice los cálculos necesarios a fin de determinar si el sistema tiene cola infinita.

d) Calcule las medidas de desempeño del sistema: ***Lc, Ls, Ts, Tc*.**

Ejercicio 3.7.5.

La Posada del Frac tiene inversiones en varios rubros económicos. Entre sus múltiples actividades y emprendimientos cuenta con un lavadero automático de automóviles. En estos momentos se evalúa el desempeño de actividades de esta empresa en relación con los clientes, y se han recolectado los siguientes datos:

• Los vehículos llegan siguiendo una Distribución Poisson a razón de 32 automóviles por día.

• El tiempo promedio que se requiere para lavar y limpiar un vehículo es de 10 minutos, y lo datos observados se distribuyen según una Distribución Exponencial.

• Los automóviles que llegan para recibir el servicio esperan en el estacionamiento del lavadero; cuando el mismo se completa la cola de espera se continúa en la calle, y son atendidos en riguroso orden de llegada.

• La jornada laboral diaria es de 8 horas.

• La empresa cuenta con una máquina automática de lavado.

a) Identifique en el enunciado, clientes, servidores, procesos de arribos, disciplina de la cola, y demás características de interés.

b) Estime cuál es el número promedio de automóviles esperando ser atendidos, y cuánto el tiempo de su espera (en horas).

c) Determine cuántos lugares debe tener el estacionamiento para que el 97% del tiempo no haya autos estacionados en la calle.

d) Llegar al lavadero y tener que esperar para ser atendidos provoca algún malestar en los clientes. Esto podría animarlos a cambiar por otra empresa que preste el servicio, por eso interesa conocer cuál es la probabilidad de no tener que esperar. Indique cuál es el valor de esta probabilidad.

e) Se considera la posibilidad de aprovechar espacios ociosos de la zona de estacionamiento para instalar un negocio complementario de venta de artículos accesorios para el automotor. A tal fin sería conveniente dedicar al estacionamiento lugar para no más de 2 vehículos. Por lo tanto, interesa conocer cuál es la probabilidad de que, en determinado momento, se encuentren más de 2 automóviles en el estacionamiento. Calcule este valor.

Ejercicio 3.7.6.

En base a lo especificado en el ejercicio **3.7.5**., considere ahora que *La Posada del Frac* quisiera contratar un seguro contra todo riesgo que le cubra la responsabilidad de los vehículos que están a su cargo. Se estima que el valor promedio de un vehículo es de $70.000, y que con la póliza la empresa quiere estar totalmente cubierta en el 95% de los casos.

a) ¿A cuánto ascendería la suma asegurada de la póliza?

Ejercicio 3.7.7.

En base a lo especificado en el ejercicio **3.7.5.**.

La empresa tiene en consideración una oferta de un proveedor de equipamiento industrial que le permitiría acceder, en condiciones financieras ventajosas, a una renovación de la máquina que posee actualmente. En su lugar instalaría 2 equipos de características similares a las actuales, que pueden atender 3 automóviles por hora..

a) Estime cuántos automóviles, en promedio, esperarán ser atendidos y por cuánto tiempo lo harán.

b) Calcule el número promedio de automóviles que estarían bajo responsabilidad del lavadero y el tiempo que transcurre desde que llegan al establecimiento hasta que concluye el proceso de limpieza.

c) Calcule cuál es la probabilidad de no tener que esperar.

d) Compare los resultados de los incisos a) b) y c) con los de iguales conceptos calculados al resolver el ejercicio 3.7.5.. Ya habrá observado Usted que los dos modelos tiene la misma capacidad instalada total, pero se diferencian en la modalidad de prestación del servicio. Extraiga conclusiones tendientes a determinar las diferencias entre ambas formas de atención al público.

Ejercicio 3.7.8.

En base a lo especificado en el ejercicio **3.7.5..**

Suponga que la empresa, en vez de hacer la permuta de máquinas propuesta en el ejercicio **3.7.7.**, se decide por incorporar un empleado para limpiar manualmente los vehículos. Esta persona haría la limpieza a razón de 4 automóviles por hora y se mantendría la máquina tal como se propuso en el planteo original. Sin realizar cálculos responda:

a) Qué sucede con el modelo? Como lo resolvería?.

b)Puede aplicar el modelo M/M/s?

Ejercicio 3.7.9.

En base a lo especificado en el ejercicio **3.7.5.**.

Contando con los indicadores de desempeño del modelo de líneas de espera original, la empresa pretende hacer un análisis económico de la situación.

A tal fin recolecta datos de los costos. La máquina lavadora se contrata a un proveedor, y se abona un canon de \$8,00 por vehículo que procesa. Una indagación entre los clientes a medida que pasaban por la línea de espera arrojó una estimación de \$100 por hora para el costo que los mismos asignaban a este hecho.

a) Estime cuál sería la velocidad óptima de atención del lavadero de manera que se minimice el Costo Total Esperado del servicio.

Ejercicio 3.7.10.

Considere detenidamente y en forma crítica las expresiones referidas a **Teoría de las colas** que se insertan a continuación.

a) Consigne si las expresiones son Verdaderas o Falsas. Fundamente brevemente la respuesta en caso de ser necesario.

1) El modelo M/M/1/∞/PEPS/N presenta un cambio en el significado de la velocidad de servicio en relación con el modelo M/M/1, y ahora expresa el tiempo de servicio del total poblacional considerado.

2) En un modelo M/M/s la incorporación de un nuevo servidor siempre producirá mejoras en el rendimiento general del modelo.

3) Los modelos de colas de espera se pueden utilizar siempre y cuando las variables "cantidad de arribos por unidad de tiempo" y "cantidad de servicios por unidad de tiempo" tengan distribuciones Poisson y Exponencial respectivamente. En caso de que alguna de las dos se ajuste a otra distribución de probabilidad (por ejemplo, cantidad de arribos conforme a una Distribución Normal) no se puede resolver el modelo.

3.8. Bibliografía

ANDERSON, D., SWEENEY, D. Y WILLIAMS, T. (1993). *Introducción a los modelos cuantitativos para Administración*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

DRESDNER, EVECSON, Y DRESDNER. *Técnicas cuantitativas aplicadas a las decisiones.* Buenos Aires.

EPPEN, G. D., GOULD, F. J., Y OTROS (2000). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa* - Creación de modelos de decisiones con hojas de cálculo electrónicas. México, Prentice-Hall.

HILLIER, F. Y LIEBERMAN, G. (1997). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México, McGraw Hill.

MATHUR, K. Y SOLOW, D. (2000). *Investigación de Operaciones - El arte de la toma de decisiones.* México, Prentice-Hall.

WINSTON, W. (1994). *Investigación de Operaciones.* México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Capítulo 4

Apoyo Multicriterio a la Decisión

4

4. Apoyo Multicriterio a la Decisión

4.1. Conceptos y nociones básicos del apoyo multicriterio a la decisión

4.1.1. La selección en presencia de criterios múltiples

En el ámbito de lo que se denominó "Ciencia de la Administración" se desarrollaron diversos métodos y modelos típicos para la búsqueda de óptimos, en los que se presenta un problema de maximización (o minimización) sujeto a restricciones cuya solución óptima conduce a la mejor elección.[10]

La práctica de tomar la decisión en base a un solo criterio u objetivo, si bien es aceptable en cuestiones puntuales, generalmente impide la intervención activa del decisor y las decisiones son rígidas en alto grado. Por ejemplo, en un modelo de apoyo a una negociación un enfoque basado en un solo criterio sería de escasa utilidad por los motivos citados, y un modelo que incorpore y explicite los diversos criterios de los negociadores permitiría la búsqueda de un consenso y daría flexibilidad a las tratativas. Otra dificultad práctica deriva de un hecho concreto: la realidad nunca es monocriterio. Por esto los enfoques tradicionales de toma de decisiones a lo sumo pueden, cuando son bien aplicados, generar dimensiones de trabajo para un análisis multicriterio más amplio.

En la vida diaria, tanto los individuos como las organizaciones tienen la necesidad de tomar decisiones para cubrir diversos imperativos.

[10] Entre los modelos para la decisión disponibles en la actualidad están: los modelos matemáticos clásicos de aplicaciones de la Investigación Operativa, Estadística, etc.; y los modelos relacionados con la Inteligencia Artificial y sus vinculaciones con Minería de Datos, Redes Neuronales, etc. Los enfoques correspondientes han tendido a analizar la obtención de un único objetivo mediante la programación matemática aplicada al planeamiento de acciones o árboles de decisión, por citar sólo dos ejemplos. Muchas veces los criterios de las partes intervinientes están enmascarados en alguna parte de la función a optimizar o de las restricciones.

En una simple compra se tienen en cuenta, sin llegar a agotar la lista: menor precio, mejor presentación, facilidad de mantenimiento del bien a adquirir y prestigio del fabricante. Para seleccionar un proyecto de inversión de entre varios, pueden considerarse: magnitud de la inversión, interés en términos estratégicos y/o de imagen, impacto social e impacto sobre el medio ambiente.

Se pueden reconocer diversas relaciones entre los aspectos mencionados anteriormente, las cuales suelen considerarse importantes para la toma de una decisión. Sin llegar a detallar la totalidad de tales relaciones, puede mencionarse que es bastante común que el precio o la magnitud de la inversión entren en conflicto con otros de los rubros citados: el proyecto mejor concebido desde el punto de vista ambiental puede no ser el menos costoso o el más fácil de administrar en el futuro ni el que mejor rendimiento brindará. También es común encontrar que los proyectos más rendidores son los más arriesgados. Y podría continuarse con una lista interminable de condiciones similares en las cuales se trata de asignar de la mejor manera un conjunto limitado de recursos y, además, que se puedan satisfacer las necesidades, intereses y expectativas de los involucrados en la decisión a tomar.

Usualmente, en situaciones de tal tipo las complicaciones que se presentan en la práctica de la toma de decisiones implican considerar: criterios múltiples y conflictivos, cuantificables y no cuantificables; el hecho de que no siempre se dispone de todos los datos necesarios para un estudio completo y exhaustivo; la existencia de intereses distintos; opiniones técnicas divergentes y expresadas en función de distintos metodologías de análisis, escenarios y/o procedimientos, etc.[11]

4.1.2. El papel del análisis multicriterio

Históricamente la forma en que se obtienen conceptos y conocimiento ha separado dos corrientes filosóficas y epistemológicas. A su vez, han influido sobre muchos campos científicos; entre ellos la ciencia de la toma de decisiones.

11 Casos como los descriptos ocurren cuando se deben resolver cuestiones tales como: planeamiento de la producción, logística de transporte, previsión de la demanda de bienes o servicios, análisis y formulación de políticas, construcción de obras públicas y evaluación de los impactos que provocan, priorización de las alternativas de exploración y explotación de recursos naturales, evaluación de programas de mejora de calidad o de aplicación de incentivos, etc.

Para el **racionalismo** el papel de la razón (del latín, *ratio*) es fundamental en la adquisición del conocimiento, ya que el mismo es obtenido *a priori,* independientemente de la experiencia.[12]

En contraste se encuentra el **empirismo** (o **decisionismo)**, que resalta el papel de la experiencia de los sentidos. Básicamente indica que no hay otra fuente de conocimiento que el conocimiento *a posteriori*, puesto que la razón por sí sola no provee conocimiento.[13]

De lo expuesto se infiere que, además de tener importancia el enfoque epistemológico en cuanto a basar la toma de decisiones exclusivamente en la experiencia o mediante el raciocinio para llegar a soluciones óptimas precisas, existe una multitud de factores a considerar.

Así, los problemas de decisión sobre sistemas complejos se ubican en la línea de la **racionalidad limitada** expresada por Simon, que critica a los modelos de maximización de utilidad esperada (basados en una **racionalidad omnisciente** o **perfecta**) pues en la práctica de la gestión administrativa es usual aplicar criterios diferentes en diferentes momentos. Las formas limitadas de racionalidad derivan de: a) incertidumbre sobre acontecimientos exógenos relevantes; b) desconocimiento e imposibilidad de exploración del total de alternativas disponibles; c) incapacidad de calcular valores exactos a los resultados y consecuencias.

Simon concluye que sólo se puede arribar a soluciones satisfactorias y suficientes para las aspiraciones que pueden llevarse a la práctica mediante una decisión final.[14] En una noción opuesta a la de optimización de las teorías clásicas, indica que la búsqueda de una solución se detiene cuando el decisor está satisfecho, aún si desconoce si una continuación de tal búsqueda podría mejorar la solución "satisfactoria" obtenida.

En refuerzo de la idea de aplicar enfoques multicriterio en la toma de decisiones deben considerarse los siguientes aspectos:

a. El trabajo con objetivos y criterios múltiples en forma simultánea frecuentemente implica que algunos pueden ser cuantificables y a otros no es fácil cuantificarlos.

12 Si bien el racionalismo asumió distintas formas desde el inicio de la filosofía occidental, se lo identifica principalmente con el filósofo y científico francés René Descartes. En el siglo XVII sostenía que lo que se conoce a priori -por razonamiento- es cierto sin ninguna duda, mientras que el conocimiento obtenido en base a los sentidos y la experiencia es, al menos, incierto en parte.

13 Los filósofos ingleses de los siglos XVII, XVIII y XIX: John Locke, David Hume y George Berkeley son sus principales exponentes.

14 Simon denominó satisficing a esta manera de decidir, al conjugar el verbo *satisfice*, que surge de unir las palabras inglesas *satisfy* (satisfacer) y *suffice* (ser suficiente).

b. Facilitar el aprendizaje a partir de un proceso de toma de decisiones transparente, donde cada uno de los actores pueda intervenir mediante la incorporación de sus opiniones y obtener nueva información y puntos de vista.

c. Procurar el consenso entre quienes interactúan, de manera que se tengan en cuenta los intereses de todos.

d. La subjetividad del decisor con respecto a sus preferencias personales, ya sea en aspectos de fácil medición como en los que no lo son.

e. Conseguir una solución "aceptable" antes que un "óptimo", principalmente cuando no existe una función objetivo clara, única y definitiva.

4.1.3. El Apoyo Multicriterio a la Decisión

Para el Apoyo Multicriterio a la Decisión el "óptimo" depende de cada punto de vista adoptado. En la inmensa mayoría de contextos decisivos reales no existe una solución ideal que agradaría simultáneamente y daría máxima satisfacción a todos los intereses involucrados en el problema.

Esa definición de "óptimo" remite a un concepto proveniente del área de la Economía, acuñado a fines del siglo XIX por Vilfredo Pareto. Éste, a partir de la observación y estudio de situaciones en las que varios agentes realizan elecciones diferentes y a menudo en conflicto, mostró que no todos los agentes podían obtener su máxima satisfacción al mismo tiempo. Dada una situación de reparto de los recursos escasos se llega a un momento en que, por el hecho de ser limitados esos recursos, lo que gane uno será obtenido a costa de la pérdida de satisfacción de otro. Y a tal tipo de situación se la denominó "óptimo de Pareto".

En el caso de la problemática multicriterio también se encuentra un conjunto de decisores que tienen distintos intereses y preferencias, en ambientes con recursos escasos, por lo que es perfectamente aplicable la noción de óptimo de Pareto. Entonces, lo que se procura conseguir es una solución de compromiso, también denominada Solución Óptima de Pareto, o Solución No Dominada, o Solución Eficiente.

En toda decisión, incluso en el ámbito individual, existe un compromiso entre todas las aspiraciones (imposibles de satisfacer en su totalidad), las cuales subsisten y subyacen como criterios de decisión. El análisis multicriterio modeliza el problema de manera realista y amplia, tiene transparencia y comunicabilidad, y su fundamentación lógica-matemática y psicológica del problema se centra en el reconocimiento de los valores de quien decide.

4.1.4. Cuestiones conceptuales del Apoyo Multicriterio a la Decisión

4.1.4.1. Glosario

Como en todo campo específico del conocimiento, existe terminología que al ser aplicada adquiere una significación especial en el contexto en que se la utilice. En este caso se definirá con precisión:

Atributos: hacen referencia a los valores con los cuales el decisor se enfrenta a un determinado problema, los cuales son susceptibles de ser medidos y expresados en función de las variables de decisión que haya en el modelo construido. Se constituyen en puntos de vista, a través de los cuales es posible analizar si se satisfacen las necesidades o intereses de quien debe tomar la decisión.

Objetivo: indica una dirección de mejora de los atributos considerados, y constituye la guía para que el modelo planteado proponga una solución a la situación problemática observada. Conviene también definir y distinguir de lo que se considera **meta**, que según Ackoff (1997) está identificada con un nivel aceptable de logro, acorde con un nivel de aspiración dado -o sea, alcanzable y mensurable en un corto plazo. Según dicho autor, la obtención de las sucesivas metas debería conducir al objetivo en un plazo mayor.

Criterio: son aquellos atributos relevantes para un problema decisional, y a través de los cuales serán observadas las alternativas para identificar en qué medida contribuyen a alcanzar el objetivo propuesto.

Alternativas: constituyen las diversas opciones que el decisor tiene a disposición para alcanzar el objetivo. Su nivel de cumplimiento se manifiesta en el modelo mediante las variables de decisión.

4.1.4.2. Requisitos metodológicos

En la práctica, el trabajo con el enfoque desarrollado en este capítulo requiere:

1. Dominio de los Métodos de Apoyo Multicriterio a la Decisión.

2. Procurar un sólido conocimiento del contexto: observación de los valores de los decisores, sus aspectos psicológicos, la cultura empresarial o sectorial, estudio de la evolución y posibles escenarios futuros, etc.

3. Análisis de los datos del problema mediante métodos multicriterio, a partir de una correcta estructuración del proceso decisorio. Este aspecto involucra:

a) Definición del problema: identificar adecuadamente la situación problemática real que requiere la toma de una decisión. Puede tratarse de decisiones estratégicas u operacionales, individuales o colectivas.

b) Objetivos/Criterios: clarificar lo que se intenta alcanzar con la decisión a tomar. Si existen al menos dos criterios (cuantitativos y/o cualitativos[15]) y que sean conflictivos, es posible aplicar esta metodología; en caso contrario, se trata simplemente de un problema clásico de optimización.

c) Alternativas: identificar las opciones disponibles para alcanzar el objetivo mediante selecciones inteligentes.

d) Consecuencias y decisiones vinculadas: Describir hasta qué punto cada alternativa atiende a cada objetivo o criterio, y como influye sobre las demás, previendo la interrelación y coordinación entre ellas.

e) *Tradeoffs* (intercambios o permutas): identificar las compensaciones entre compromisos de difícil consecución cuando no se pueden atender todos los objetivos simultáneamente. Con este término se definen las cantidades a sacrificar en un criterio para obtener una unidad de incremento en otro.

f) Incertidumbre y tolerancia al riesgo: analizar cómo se actuaría cuando existen incertidumbres que afectan a la decisión a tomar, así como la tendencia eventual que los decisores puedan tener ante el riesgo.

4. Síntesis con recomendaciones para la toma de una decisión.

5. Re-evaluación del proceso decisorio, de manera que se promueva el auto-aprendizaje para la futura toma de decisiones.

Como se podrá observar, lo detallado en los párrafos anteriores es simplemente una enumeración aplicada específicamente al tema que se desarrolla, a partir de los conceptos generales vertidos en oportunidad de desarrollarse el Capítulo 1 (Análisis cuantitativo, proceso de toma de decisiones, enfoque sistémico y modelización).

15 Los criterios cualitativos son los que, en buena medida justifican la aplicación de esta metodología. Para su incorporación al modelo creado se recomienda considerar su susceptibilidad de transformarse en juicios subjetivos mediante escalas que abarquen, en general, 7 ± 2 valores.

4.2. Apoyo multicriterio a la decisión: distintos tipos de análisis

4.2.1. ¿Cómo modelar las situaciones que presentan criterios múltiples?

La razón de ser de los métodos de Apoyo Multicriterio a la Decisión es la existencia de problemas mal estructurados: situaciones en las que las técnicas analíticas clásicas no aportan una buena solución. Tales situaciones manifiestan, al menos, alguna de las siguientes características:

1. Existen dos o más criterios de resolución del problema, y presentan conflictos entre sí;

2. No hay claridad en cuanto a las alternativas de solución ni en cuanto a los criterios a aplicar, y tampoco se comprenden bien las consecuencias que devendrán de seleccionar una alternativa bajo un determinado criterio.

3. Tanto los criterios como las alternativas se vinculan entre sí, de manera que la aplicación de uno de los primeros y/o la selección de una opción provocará efectos sobre el resto.

4. La resolución del problema depende de la interacción de varios actores, los que muchas veces tendrán puntos de vista e intereses discordantes entre sí.

5. No existe claridad en la definición de las restricciones del problema, y se las llega a confundir con los criterios a aplicar.

6. Algunos criterios son perfectamente cuantificables, pero otros no lo son -o para cuantificarlos se debe apelar a escalas de valores aplicadas según los juicios subjetivos de los actores.

7. La naturaleza propia de los datos disponibles y de cada criterio a aplicar influye sobre la forma de la escala de valoración a aplicar, que podrá ser cardinal, ordinal o verbal.

El reconocimiento de características como las mencionadas motivó la búsqueda[16] de formas de representar más fielmente las preferencias del/los decisor/es, aún cuando las mismas no se muestren totalmente consistentes. La modelización aplicada a tal efecto tiene amplia difusión como "decisión multicriterio". Sin embargo, la decisión en sí misma no es monocriterio ni multicriterio, sino simplemente una elección (seguida de acción) que no puede ser calificada de tal manera. Lo que se manifiesta como multicriterio es el modelo elaborado para colaborar en la toma de

16 Desde 1960 los métodos multicriterio se identifican como tales, al adoptar terminología y metodología propias. Despegan definitivamente en 1972 con la realización de congresos específicos del tema.

decisión; por tal motivo, es más adecuado observar el título de **"Apoyo Multicriterio a la Decisión"** (Roy, 1989).[17]

Existen dos ramas en las que se agrupan los diferentes métodos ideados para toma de decisiones en función de múltiples criterios: Métodos discretos y Métodos continuos.

4.2.2. Métodos Multicriterio Continuos

Estos métodos también se identifican con la Decisión MultiObjetivo. Entre ellos se cuentan la Programación por Metas[18] y el Simplex Multicriterio, generados a partir de la aplicación de conceptos de la técnica de Programación Lineal.

Su estructura general comprende a funciones reales y continuas ("funciones objetivo" o "funciones criterio") sujetas a un conjunto de restricciones bajo la forma de ecuaciones y/o inecuaciones que conforman una región factible en el espacio continuo de solución del modelo. La exploración sobre este conjunto de soluciones factibles, por utilización de diversas técnicas, genera el conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimas.

4.2.3. Métodos Multicriterio Discretos

Se concentran en problemas con espacios de decisión discretos, en los cuales las alternativas han sido predeterminadas de antemano.

Comprenden a dos grupos de métodos en función de la técnica aplicada para obtener un criterio único de síntesis: Métodos de agregación (correspondientes a la denominada "Escuela Americana") y Métodos enfocados en el ordenamiento (asimilados a la "Escuela Europea").

En el Apéndice de este capítulo se abarca en mayor extensión la composición del conjunto de métodos incluidos en este grupo. Por ahora simplemente se mencionará que en el mismo se inscribe el Proceso Analítico de Jerarquías (*Analytic Hierarchy Process*) de Thomas L. Saaty, más conocido por sus siglas PAJ o AHP (en inglés), y que se desarrollará en profundidad más adelante.

17 Roy distingue la "Toma de decisiones multicriterio" (que reconoce que las preferencias del decisor están perfectamente explícitas, por lo que basta con armar un buen modelo matemático para descubrir una solución) del "Apoyo multicriterio a la decisión" (en el cual se construye un marco de referencia para ayudar a la toma de decisiones).

18 *Goal Programming*, en inglés.

4.2.4. Métodos Multicriterio en contextos de negociación y decisión en grupos

Los métodos multicriterio no procuran obtener una solución óptima. En su lugar, ante cada situación particular de un integrante de una negociación, permiten: 1) evaluar las soluciones cuantitativa y cualitativamente; 2) posibilitar la gestación de nuevas soluciones.

En contextos de negociaciones y decisiones en grupos, el objetivo más importante es la convergencia entre las partes al aceptar las propuestas que consideran más aceptables para llegar a un acuerdo; que las situaciones sean percibidas como justas por todas las partes, y sean satisfactorias en función de la contribución global encontrada a partir de la combinación de distintas preferencias individuales mediante un intercambio de compromisos y compensaciones entre los miembros del grupo o de los negociadores.

4.2.5. Dimensión internacional y tendencias actuales

El Apoyo Multicriterio a la Decisión tuvo un desarrollo importante desde su aparición alrededor de 1970.

La importancia adquirida como ayuda para la toma de decisiones se refleja en: existencia de centenares de libros publicados a la fecha; creciente número de trabajos de aplicación e investigación; constitución de sociedades científicas en la materia (una internacional y varias regionales o nacionales); una publicación especializada (*Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*).

Prácticamente todos los métodos mencionados han dado lugar al desarrollo del *software* correspondiente para su aplicación, lo que a su vez se traduce en programación cada vez más amigable y cuya utilización no depende de conocimientos especializados. Se pueden citar: Electre (I a IV) para el método de igual nombre; PROMCALC, para aplicación de Prométhée y desarrollado en la Universidad Libre de Bruselas; Expert Choice, obra de Ernest Forman y Thomas Saaty como versión informática del AHP.

Existe también una continua evolución en la creación de métodos para explicitar las preferencias.

4.3. Métodos de decisión multicriterio discreta; normalización de criterios; ponderación preferencial

4.3.1. Esquema de trabajo

Sobre la base de los conceptos ya definidos de "Criterios" y "Alternativas", se puede esquematizar el trabajo con los métodos multicriterio, tal como se muestra en el Tabla 4.1.

		Criterios				
		C_1	...	C_j	...	C_n
	A_1	...		...		
Alternativas	...	**Matriz de decisión**		...		
	A_i			r_{ij}		...
	...	...				...
	A_m					...
		w_1	...	w_j	...	w_n

Tabla 4.1. - Esquema de trabajo de la Decisión Multicriterio Discreta.
Fuente: Barba-Romero, S. (1996) *Evaluación multicriterio de proyectos*; Tegucigalpa

Corresponde al respecto efectuar un par de definiciones que son de aplicación: evaluaciones de alternativas y pesos de los criterios.

Las evaluaciones de cada alternativa describen a cada una de éstas en función de cada criterio, y se reúnen para conformar la matriz de decisión. Se simbolizan en el esquema con r_{ij} .

Por su lado, los pesos de los criterios provienen de la importancia que el decisor asigna a cada uno de éstos, y han sido designados con w_j en el esquema.

4.3.2. Normalización

Este concepto se relaciona con la practicidad en la formulación de un modelo multicriterio, pues es común que las evaluaciones r_{ij} vengan medidas en cualquier tipo de escala conocida, tales como: Cardinal *ratio*, Cardinal intervalo, Ordinal, Nominal, Difusa o Probabilística.

Esto ocurre porque diferentes criterios aplicados en el problema se manifiestan en diferentes unidades de medida; por ejemplo, medidas de distancias (provenientes de distintos sistemas métricos), diferentes unidades monetarias (en tiempo y en lugar de emisión), índices de polución ambiental (expresados de distinta manera), etc.

También es posible que, aún cuando se trate de criterios considerados en igual unidad de medida, los valores que alcance cada uno de ellos sean totalmente diferentes en magnitud, lo cual arrojará alta discrepancia con los otros aplicados.

Finalmente, se debe requerir al decisor que provea alguna forma de ordenar sus preferencias. Esta tarea se ve altamente favorecida y facilitada cuando las opciones se presentan de manera normalizada.

Por todo lo expuesto, con la normalización se busca -cuando el método aplicado lo exija- hacer comparables las distintas evaluaciones cardinales r_{ij} de los distintos criterios.

Algunas formas de normalizar los valores son:

a) **Dividir por el "mejor" valor que alcanza el criterio**. El número divisor puede ser máximo o mínimo; depende del sentido en que se considere el criterio. Los valores resultantes quedarán expresados como porcentaje del máximo.

$$v_i = \frac{V_i}{máx\,V_i}$$

b) **Dividir por el recorrido o rango que alcanza el criterio.** El número divisor en este caso es la diferencia entre el máximo y el mínimo alcanzado por el criterio. Los valores resultantes quedarán expresados como proporción del valor real con respecto a dicho rango.

$$v_i = \frac{V_i}{máx\,V_i - min\,V_i}$$

c) **Restar del "mejor" valor el valor real o (restar el "peor" del valor real), y dividir por el recorrido o rango que alcanza el criterio**. El número divisor es el mismo del inciso b), mientras que el numerador lleva la diferencia "mejor - real" (o "real - peor"). Los valores resultantes quedan expresados como porcentaje del rango, con respecto a algún extremo.

$$v_i = \frac{máx\,V_i - V_i}{máx\,V_i - min\,V_i} \quad \text{o bien,} \quad v_i = \frac{V_i - min\,V_i}{máx\,V_i - min\,V_i}$$

d) **Dividir por la suma de valores que alcanza el criterio.** El número divisor será la sumatoria de todos los valores consignados para el criterio. Los valores resultantes quedarán expresados como porcentaje de la sumatoria de los valores adoptados por el criterio.

$$v_i = \frac{V_i}{\sum V_i}$$

4.3.3. Preanálisis de dominación

Este preanálisis permite reducir el conjunto de datos a manejar en el problema.

Es un proceso previo al trabajo de selección de la mejor alternativa. Se basa en el concepto de alternativa dominante, que identifica a aquella que siempre es preferible con respecto a otra, cualquiera sea el criterio que se les aplique para compararlas. Sus evaluaciones son mejores o, al menos, iguales que las de otra alternativa, a la cual se la refiere como "dominada".

Es evidente que una alternativa que aparece dominada nunca tendrá chances de ser seleccionada, mientras la aplicación de los criterios siga la ponderación que se ha planteado. Por este motivo, puede descartarse a priori.

4.3.4. Ponderación preferencial de los criterios

La consideración de los juicios personales, intereses y valores propios de cada uno de los decisores es intrínseca al método, y frecuentemente ocurre que diferentes criterios a aplicar tienen distinta relevancia para los decisores.

Tales diferencias de importancia relativa deben ser reflejadas en el modelo, motivo por el cual se les asignan pesos (o ponderaciones) a los criterios.

Existe toda una problemática teórica en cuanto a las distintas formas de asignar pesos, lo que ha originado amplia gama de métodos. Aquí se presentarán únicamente dos formas básicas:

a) **Ordenar los n criterios según importancia y subjetividad del decisor.** Se aplica cualquiera de las fórmulas siguientes, en las que r_j es el lugar que ocupa el criterio j-ésimo en el ordenamiento realizado. Estas formas de cálculo no tienen en cuenta la intensidad de la preferencia del decisor, por lo que son de sencilla aplicación, además de que la suma de los pesos asignados es igual a 1.

$$W_j = \frac{1/r_j}{\sum_{i=1}^{n} 1/r_i} \qquad W_j = \frac{(n-r_j+1)}{\sum_{i=1}^{n}(n-r_i+1)}$$

b) **Aplicar una asignación indirecta**. Esta es la modalidad adoptada por el Proceso Analítico de Jerarquías (PAJ) de Saaty. Se aplica una escala numérica (de 1 a 9) en la cual los valores tienen en cuenta la intensidad de la preferencia del decisor. Se debe cubrir solamente la mitad de los elementos de la matriz de pesos, ya que el resto se infiere simétricamente a partir de tales valores.

Para evitar que, el decisor incurra en inconsistencias al estimar los valores de la matriz de pesos, debe preverse un procedimiento de análisis de congruencia de los juicios emitidos. En dicho análisis pueden aplicarse diversos procedimientos matemáticos, como por ejemplo una media geométrica. En el caso del PAJ la verificación se hace contra una matriz generada aleatoriamente que permite obtener una medida de la consistencia con que ha operado el decisor.

4.4. Proceso Analítico de Jerarquías. Elementos fundamentales y proceso analítico

4.4.1. En qué consiste el Proceso Analítico de Jerarquías (PAJ)

Es una metodología de trabajo para ayudar en la toma de decisiones en situaciones complejas y no estructuradas (o débilmente estructuradas), en las que es necesario:

- Establecer la interrelación entre multitud de factores;
- Identificar, entre tales factores, aquellos que son realmente importantes;
- Determinar el grado en que cada uno de los factores afecta a los demás.

Las características mencionadas son típicas de los métodos multicriterio, por lo que permite resolver situaciones problemáticas donde la subjetividad del decisor toma vital relevancia al momento de expresar sus preferencias personales. La subjetividad se convierte en un aspecto importante, tanto para criterios que son de fácil medición como para aquellos que no lo son.

Para el caso de entornos grupales Saaty (1998)[19] propone realizar la agregación de opiniones para satisfacer la relación recíproca en la comparación de dos elementos. El proceso incluye el posterior cálculo de la media geométrica.

En todas las aplicaciones de la heurística prevalece la aplicación del pensamiento de Pareto y Simon: la forma de pensar más acertada consiste en buscar lo "aceptable" antes que lo "óptimo". En otras palabras, se estima que las buenas soluciones, en oposición a las soluciones óptimas, pueden ser útiles y satisfactorias. Filosofía particularmente apropiada para modelos cuya descripción es muy vaga; es decir, que no existe una función objetivo clara, única y definitiva.

Básicamente, el método requiere la aplicación de tres elementos fundamentales:

1. Construir **jerarquías**;
2. Establecer **prioridades**;
3. Verificar la **consistencia** lógica de los resultados obtenidos.

El método, diseñado para resolver problemas con criterios múltiples, organiza la información de una manera eficiente y gráfica, y posteriormente procede a descomponer y analizar por partes.

Se construye un modelo jerárquico donde se interrelacionan criterios, intereses en juego y resultados posibles. Según Saaty (*op. cit.*), "facilita la toma de decisión por medio de la organización de percepciones, sentimientos, opiniones y recuerdos en un marco que exhibe las fuerzas que influyen en una decisión".

La forma de trabajar refleja la fuerza de la intuición, la experiencia y la lógica de los elementos modelados, para luego sintetizar los diversos juicios en un solo resultado; y conduce a predecir resultados probables según tales juicios.

4.4.2. Proceso de modelización

En general, el proceso a aplicar sigue lo consignado en el capítulo 1 en los temas Análisis cuantitativo, proceso de toma de decisiones, enfoque sistémico y modelización):

19 En la obra de MARTÍNEZ, E. y Mauricio Escudey, *Evaluación y Decisión Multicriterio.*

1. Identificar la **situación problemática.**

2. Definir el **objetivo**, el cual procurará obtener una solución a la situación descripta en 1; puede incluir **subobjetivos,** si los hay.

3. Identificar **criterios**. Para el caso en que se los pueda desgranar en **subcriterios** que confluyen en un criterio de mayor nivel, se lo hace en este paso.

4. Identificar **alternativas**, de entre las cuales se seleccionará alguna que permita cumplir con el objetivo de manera que se satisfagan de la mejor manera los intereses de todos los participantes.

5. Cuando hay criterios que involucran Costos, Beneficios y Riesgos y las decisiones son por sí o por no, Saaty (*op. cit.*, pág. 20) propone como últimos pasos: 1) Análisis Costo-Beneficio en relación con la decisión a tomar; 2) Estudio marginal de las relaciones entre costos y beneficios.

El decisor opinará sobre la importancia relativa que cada criterio tiene para el logro del objetivo global (o a los subobjetivos que lo conforman, si los hubiera).

Asimismo, señalará la preferencia de cada alternativa de decisión, en términos de la medida en que contribuya a satisfacer a cada criterio.

4.4.3. El proceso analítico.

Una vez que el decisor y los cursos de acción han sido identificados, los principales pasos del método son los que se listan a continuación.

1. Representar el modelo mediante un árbol de jerarquías. El esquema básico a seguir es el que se muestra en la Figura 4.1., y puede volverse más complejo en la medida en que existan subcriterios que componen a uno o más criterios.

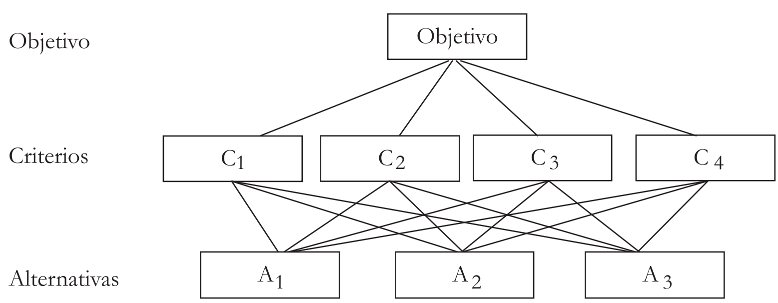


Figura 4.1. Árbol de jerarquías para una situación modelada con PAJ

2. Comparar de a pares atributos y alternativas. Este paso se aplica para determinar la importancia relativa de los criterios y también para comparar cómo satisfacen a los criterios las distintas alternativas. La comparación se hace entre elementos que forman parte de un mismo nivel del árbol de jerarquías; las alternativas (último nivel) se comparan de acuerdo a cada uno de los criterios del nivel precedente. Se utiliza una escala numérica con niveles de intensidad entre 1 y 9. Para conocer la forma de asignar valor a los juicios subjetivos, véase, el Apéndice "Escala de comparaciones pareadas en AHP" de este Capítulo.

3. Transformar las comparaciones en pesos y controlar la consistencia de las comparaciones del decisor. Se calculan los pesos relativos de los elementos de decisión y se hace control de congruencia entre los juicios. El control procura identificar si el decisor es coherente al hacer las asignaciones de pesos; es decir, que no incurra en contradicciones que puedan distorsionar los resultados que arroje el modelo. En caso de no existir transitividad entre las puntuaciones asignadas (falta de consistencia), puede ser necesario reexpresar las comparaciones. Aunque, opina Saaty, minimizar la inconsistencia no debería ser el objetivo principal del análisis, pues un conjunto de juicios erróneos en importancia y preferencias puede ser perfectamente consistente pero no conducir a la "mejor" decisión.

4. Aplicar los pesos para obtener puntajes a asignar a cada opción y realizar una selección provisoria. Se concluye con la estimación del orden de preferencias global, con indicación de cuál es la alternativa que mejor satisface los objetivos y criterios aplicados.

5. Ejecutar el análisis de sensibilidad. Como paso final, permitirá al decisor examinar la robustez de la decisión provisoria con respecto a cambios en los órdenes de preferencia e importancia asignados.

4.5. Aplicación del Proceso Analítico de Jerarquías. Cálculos y Análisis de sensibilidad

4.5.1. El proceso de cálculo

Para desarrollar en detalle las fases de aplicación del PAJ se utilizará una situación hipotética, referida a la utilización de criterios múltiples para la toma de decisiones.

Ejemplo 4.1. Selección de una máquina envasadora nueva.

Una empresa dedicada a la elaboración de alimentos secos debe seleccionar una nueva máquina para envasar su producción, para reemplazar la ya existente que se ha vuelto obsoleta. Para la compra se cuenta con un presupuesto reducido. Después de consultar a varios involucrados en la toma de la decisión se ha llegado a circunscribir la selección a un lote de tres modelos que existen en el mercado: Ánsar, Biguá y Caimán. Sin embargo, la decisión todavía tiene que recorrer un difícil camino, ya que se debe tener en cuenta una serie de atributos variados, vinculados con los equipos: Costos de compra y de mantenimiento, y aspectos que hacen a la calidad de la compra (confiabilidad de la marca, servicio posventa, velocidad de entrega y curva de aprendizaje de los futuros operarios).

1º paso: Construir el Árbol Jerárquico.
El árbol correspondiente a este problema es el que se observa en la Figura 4.2.

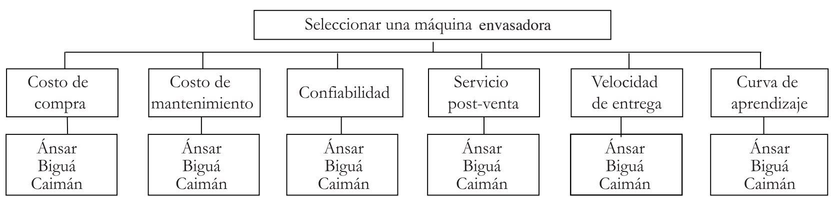


Figura 4.2. Árbol de jerarquías para la selección de una máquina de envasar

Pasos 2º a 4º. Procedimiento iterativo, para cada uno de los criterios
Para los seis criterios que deben aplicarse en este problema se detallan los cálculos en las Tablas 4.2. a 4.7. que siguen a continuación.

2º paso: Matriz de Comparaciones pareadas (MCP) de las alternativas. Su composición está en las primeras cuatro columnas de las tablas mencionadas. Ahí se observa que, al tener en cuenta el criterio "Costo de Compra", Biguá está calificado en relación 3 a 1 (es preferible "moderadamente") con respecto a Ánsar, y a su vez éste recibe una relación 2 a 1 (está preferido con una intensidad entre "igual y moderada") con respecto a Caimán. Finalmente, Biguá también es preferido a Caimán, aunque en este caso la relación se ha calificado como entre "fuerte y muy fuerte" y asignado la puntuación 6. Obsérvese también que las relaciones recíprocas se representan con el inverso multiplicativo, y la diagonal principal de la matriz sólo tiene unos, ya que al expresar la relación de cada alternativa con sí misma no hay otra posibilidad que consignar el juicio como "igual preferencia".

3º paso: Procedimiento de sintetización. Matriz normalizada ***(MCPN):*** Aparece en la parte central de las Tablas, bajo este título; sus elementos se calculan dividiendo cada elemento de la matriz **MCP** por la suma de los elementos de la columna en que está ubicado. El vector de prioridad de cada criterio ***(VP)*** indica el grado de ponderación asignado a cada alternativa al analizarla con el criterio aplicado; surge del promedio simple de los elementos de cada fila de la matriz ***MCPN***.

4º paso: Análisis de Consistencia, para reflejar la congruencia de los juicios del decisor. Se calculan cuatro conceptos:

1. Vector Suma Ponderada ***(VSP):*** cada elemento (cada fila) surge de multiplicar cada vector fila que compone **MCP** por el vector de prioridades ***VP*** y dividir el resultado por la prioridad calculada para esa fila (o alternativa). Ejemplo: para "Costo de Compra" de Biguá es:

$$VSP_{21} = (3 \cdot 0{,}222 + 1 \cdot 0{,}667 + 6 \cdot 0{,}111) / 0{,}667; \qquad VSP_{21} = 3$$

2. Se calcula $\lambda_{máx}$ como promedio simple de los elementos del vector ***VSP.***

3. $IC = \frac{\lambda_{máx} - n}{n - 1}$ representa el Índice de Consistencia para el criterio tratado, y n es la cantidad de elementos que tiene el vector.

4. El índice calculado se compara con un índice generado aleatoriamente ***(IA)*** mediante simulaciones por el propio Saaty, para expresar el Ratio de Consistencia ***(RC)*** del Criterio. Se calcula con $RC = IC / IA$. Se considera que se es consistente en los juicios cuando es $RC < 0{,}10$. (Ver en el Apéndice, Índices aleatorios de consistencia)

CRITERIO 1: COSTO DE COMPRA

	Matriz de Comparaciones Pareadas entre Alternativas (MCP)			Matriz Normalizada (MCPN)			Vector de Prioridad (VP)		Para Consistencia
	Ánsar	**Biguá**	**Caimán**						
Ánsar	1	1/3	2	0,222	0,222	0,222	**0,222**	**VSP**	3,000
Biguá	3	1	6	0,667	0,667	0,667	**0,667**		3,000
Caimán	1/2	1/6	1	0,111	0,111	0,111	**0,111**		3,000
Suma:	4,500	1,500	9,000					λ Máx	3,000
								IC	0,000
								Ratio cons.	0,000

Tabla 4.2. Procedimiento analítico para el Criterio 1

CRITERIO 2: COSTO DE MANTENIMIENTO

	Matriz Comparaciones Pareadas entre Alternativas (MCP)			Matriz Normalizada (MCPN)			Vector de Prioridad (VP)		Para Consistencia
	Ánsar	**Biguá**	**Caimán**						
Ánsar	1	2	4	0,571	0,615	0,444	**0,544**	**VSP**	3,084
Biguá	1/2	1	4	0,286	0,308	0,444	**0,346**		3,061
Caimán	1/4	1/4	1	0,143	0,077	0,111	**0,110**		3,017
Suma:	1,750	3,250	9,000					λ Máx	3,054
								IC	0,027
								Ratio cons.	0,046

Tabla 4.3. Procedimiento analítico para el Criterio 2

CRITERIO 3: CONFIABILIDAD DE LA MARCA

	Matriz Comparaciones Pareadas entre Alternativas (MCP)			Matriz Normalizada (MCPN)			Vector de Prioridad (VP)		Para Consistencia
	Ánsar	**Biguá**	**Caimán**						
Ánsar	1	3	1/6	0,136	0,273	0,127	**0,179**	**VSP**	3,062
Biguá	1/3	1	1/7	0,045	0,091	0,109	**0,082**		3,019
Caimán	6	7	1	0,818	0,636	0,764	**0,739**		3,225
Suma:	7,333	11,000	1,310					λ Máx	3,102
								IC	0,051
								Ratio cons.	0,088

Tabla 4.4. Procedimiento analítico para el Criterio 3

CRITERIO 4: SERVICIO DE POSVENTA

	Matriz Comparaciones Pareadas entre Alternativas (MCP)			Matriz Normalizada (MCPN)			Vector Prioridad (VP)		Para Consistencia
	Ánsar	**Biguá**	**Caimán**						
Ánsar	1	3	1/3	0,231	0,429	0,200	**0,286**	**VSP**	3,133
Biguá	1/3	1	1/3	0,077	0,143	0,200	**0,140**		3,049
Caimán	3	3	1	0,692	0,429	0,600	**0,574**		3,230
Suma:	4,333	7,000	1,667					λ Máx	3,137
								IC	0,069
								Ratio cons.	0,118

Tabla 4.5. Procedimiento analítico para el Criterio 4

CRITERIO 5: RAPIDEZ DE ENTREGA

	Matriz Comparaciones Pareadas entre Alternativas (MCP)			Matriz Normalizada (MCPN)			Vector Prioridad (VP)		Para Consistencia
	Ánsar	**Biguá**	**Caimán**						
Ánsar	1	3	4	0,632	0,667	0,571	**0,623**	**VSP**	3,034
Biguá	1/3	1	2	0,211	0,222	0,286	**0,239**		3,014
Caimán	1/4	1/2	1	0,158	0,111	0,143	**0,137**		3,007
Suma:	1,583	4,500	7,000					λ Máx	3,018
								IC	0,009
								Ratio cons.	0,016

Tabla 4.6. Proeedimiento analítico para el Criterio 5

CRITERIO 6: CURVA DE APRENDIZAJE

	Matriz Comparaciones Pareadas entre Alternativas (MCP)			Matriz Normalizada (MCPN)			Vector Prioridad (VP)		Para Consistencia
	Ánsar	**Biguá**	**Caimán**						
Ánsar	1	1/2	1/4	0,143	0,077	0,172	**0,131**	**VSP**	3,030
Biguá	2	1	1/5	0,286	0,154	0,138	**0,192**		3,061
Caimán	4	5	1	0,571	0,769	0,690	**0,677**		3,195
Suma:	7,000	6,500	1,450					λ Máx	3,096
								IC	0,048
								Ratio cons.	0,082

Tabla 4.7. Procedimiento analítico para el Criterio 6

5º paso: MCP para todos los criterios: De forma similar a lo realizado con las alternativas, ahora se comparan los criterios de a dos, hasta llegar a determinar su coherencia (consistencia). En el caso analizado el ratio de consistencia está dentro del límite considerado como bueno por Saaty, o sea que los decisores han sido razonablemente congruentes en sus apreciaciones. La Tabla 4.8. muestra los resultados de esta parte del trabajo.

CRITERIOS

	Matriz de Comparaciones Pareadas entre Criterios					
	Costo Comp	**Costo Mant**	**Confianza**	**Servicio PV**	**Entrega**	**Aprendizaje**
Costo Compra	1	2	9	5	8	5
Costo Manten	½	1	6	2	3	2
Confianza	1/9	1/6	1	1/2	1/2	1/3
Servic posventa	1/5	½	2	1	1	1/2
Veloc entrega	1/8	1/3	2	1	1	1/3
Curva Aprendiz	1/5	½	3	2	3	1
Suma:	2,136	4,500	23,000	11,500	16,500	9,167

Matriz Normalizada						Vector de Ponderaciones		Para Consistencia
0,468	0,444	0,391	0,435	0,485	0,545	**0,461**	**VSP**	6,2232
0,234	0,222	0,261	0,174	0,182	0,218	**0,215**		6,1419
0,052	0,037	0,043	0,043	0,030	0,036	**0,040**		6,1021
0,094	0,111	0,087	0,087	0,061	0,055	**0,082**		6,0388
0,059	0,074	0,087	0,087	0,061	0,036	**0,067**		6,0122
0,094	0,111	0,130	0,174	0,182	0,109	**0,133**		6,1568
							λ Máx	6,1125
							IC	0,0225
							Ratio consist.	**0,0181**

Tabla 4.8. Procedimiento analítico para todos los criterios

6º paso: Jerarquización global de prioridades. En primer lugar se reúnen los resultados obtenidos en los vectores de prioridad **(VP)** de cada criterio: se colocan las alternativas por filas y los criterios por columnas. En el Tabla 4.9. también se han transcripto, para facilitar la visualización de los elementos que intervienen en los cálculos, los factores de ponderación de los criterios calculados en el ***5° paso.***

A cada valor de las filas se le aplica el factor de ponderación de criterios que está al pie de la columna. El promedio ponderado que surge de sumar los productos obtenidos aporta un elemento al vector de prioridad global **(PG)**, y define el puntaje obtenido por cada alternativa.

	Costo Comp	Costo Mant	Confianza	Servicio PV	Entrega	Aprendizaje	PG
Ánsar	0,222	0,544	0,179	0,286	0,623	0,131	**0,310**
Biguá	0,667	0,346	0,082	0,140	0,239	0,192	**0,439**
Caimán	0,111	0,110	0,739	0,574	0,137	0,677	**0,252**
Ponderación	0,440	0,205	0,038	0,123	0,065	0,129	

Tabla 4.9. Vector de Prioridad Global y vectores aplicados en su cálculo

En el ejemplo desarrollado se concluye que se recomienda adquirir el modelo Biguá, que resulta con un factor de ponderación 0,439, superior a los obtenidos por las otras dos alternativas analizadas (0,310 y 0,252).

4.5.2. Análisis de sensibilidad.

Al igual que en otros modelos normativos, este tipo de análisis (también denominado de post-optimización) permite evaluar la estabilidad y robustez de la solución hallada ante cambios en algunos de los parámetros del modelo. En este caso, lo común es observar el impacto sobre los ordenamientos que surgen del Vector de Prioridades Global ante variaciones en los pesos asignados a los criterios.

Puede ser utilizado como elemento accesorio de gran utilidad cuando no es posible encontrar puntos de entendimiento entre las partes involucradas en el problema que hacen que se dificulte la tarea de asignar pesos a criterios y/o subcriterios.

4.6. Ejercicios de Aplicación Práctica

Ejercicio 4.6.1.

La Alta Gerencia de *Quantum* ***R&D*** evalúa la renovación de sus sistemas de información, a partir de un informe presentado por el Gerente de Nuevas Tecnologías. Este gerente ha confeccionado una lista de alternativas, según la cual, existirían en el mercado cuatro productos que contribuirían a satisfacer los objetivos de la empresa; designados como Proyectos A, B, C y D. Como consecuencia de un análisis previo, ha surgido que el proyecto D no cumple con las exigencias mínimas en cuanto al período de recupero y rendimiento de la inversión, que la Alta Gerencia pusiera previamente como requisitos ineludibles. Por tal motivo, se lo ha descartado y no se tendrá en cuenta en análisis posteriores.

Entre los factores que se considerarán para tomar la decisión final se pueden consignar:

• Importancia Estratégica: que cada proyecto tiene para el posicionamiento futuro de la empresa en el mercado, principalmente por la capacidad del sistema de información para brindar apoyo a una gerencia innovadora y proactiva;

• Riesgo: de obsolescencia que se correría al seleccionar un proyecto con tecnología que en un futuro cercano sea descontinuada por los proveedores, con la consiguiente pérdida de apoyo técnico y de posibilidades de crecimiento del sistema, dificultad de obtención de repuestos, etc.

• Consideraciones Financieras: Bajo este rubro se agrupan los ítems correspondientes a Rendimiento de la inversión, Período de recupero de la inversión, y Valor Actual Neto del Flujo de Fondos.

a) Consigne si las siguientes expresiones, referidas al **enunciado presentado**, son **V**erdaderas o **F**alsas. Fundamente brevemente la respuesta si es necesario.

1) Como resultado del análisis de dominación se ha resuelto considerar únicamente tres proyectos para conseguir el objetivo propuesto, ya que el proyecto D se ve superado por todos los demás en todos los criterios.

2) "Rendimiento de la inversión", "Período de recupero de la inversión" y "Valor Actual Neto del Flujo de Fondos" se pueden considerar como subcriterios.

3) "Riesgo de obsolescencia de la tecnología" es un atributo observado en la realidad, pero que no llega a constituirse en criterio ni subcriterio a los efectos del análisis.

4) El objetivo de este modelo será obtener el Sistema de Información que tenga el menor período de recupero de la inversión.

Ejercicio 4.6.2.

Con base en lo especificado en el ejercicio **4.6.1**. considere ahora las opiniones de la Alta Gerencia, responsable de la decisión final, respecto de cada proyecto y para el criterio Importancia Estratégica. Ha utilizado la escala propuesta por Saaty para confeccionar las siguientes matrices de comparaciones efectuadas.

Gerente W

	A	*B*	*C*
A	1	3	6
B		1	½
C			1

Gerente X

	A	*B*	*C*
A	1	2	4
B		1	½
C			1

Gerente Y

	A	*B*	*C*
A	1	7	3
B		1	2
C			1

Gerente Z

	A	*B*	*C*
A	1	4	3
B		1	1
C			1

a) Confeccione el esquema jerárquico correspondiente a la situación descripta.

b) Proponga una matriz que resuma la opinión de todos los gerentes.

c) En base a la matriz obtenida en el inciso **b)**, desarrolle el proceso necesario para establecer si las opiniones de los gerentes son consistentes.

d) Obtenga el Vector de Prioridad Global, y recomiende fundadamente cuál es el proyecto que se debe seleccionar en la renovación del Sistema de Información de la empresa. Para su respuesta utilice los siguientes Vectores Suma Ponderada, además del calculado por Ud. en el inciso **c)**.

$$\text{Consideraciones Financieras} \quad \begin{array}{c} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}593 \\ 0{,}341 \\ 0{,}066 \end{bmatrix} \qquad \text{Riesgo} \quad \begin{array}{c} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}123 \\ 0{,}320 \\ 0{,}557 \end{bmatrix} \qquad \text{Criterios} \quad \begin{array}{r} \textit{Consideraciones Financieras} \\ \textit{Riesgo} \\ \textit{Importancia Estratégica} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}548 \\ 0{,}211 \\ 0{,}241 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.6.3.

Quantum Ideas tiene en observación cuatro lugares alternativos para la instalación de una nueva sucursal de la empresa: Neuquén, Rufino, Tandil y Viedma. Los integrantes del directorio expresaron sus opiniones al respecto, mediante un modelo analítico de jerarquías. A continuación se muestra (incompleta) la matriz de comparaciones pareadas confeccionada por el presidente del Directorio con respecto al atributo "Facilidad de comunicaciones con la casa central".

Se armó el vector de prioridades (VP) de cada alternativa con respecto al atributo considerado, luego de aplicar la matriz de comparaciones normalizada.

Sobre el margen derecho, a su vez, se tiene el resultado de dos operaciones:

1. un vector VSP que surgió de multiplicar cada vector fila constitutivo de la matriz de comparaciones pareadas original por el vector de prioridades VP, y;

2. el resultado de dividir tal vector VSP por el coeficiente de ponderación VP_i correspondiente a cada ciudad cuyo vector fila se estaba utilizando.

	Neuquén	**Rufino**	**Tandil**	**Viedma**	**Prioridad (VP)**	**VSP / VP_i**
Neuquén	1	1/4	4	1/5	0,133	4.070
Rufino		1	6	7	0,560	5,692
Tandil			1	1/5	0,054	4,256
Viedma				1	0,253	5,022

a) Complete la matriz de comparaciones pareadas que comenzó a elaborar el presidente.

b) Detalle paso a paso los cálculos necesarios para afirmar fundadamente si al confeccionar dicha matriz se lo ha hecho en forma congruente.

c) Suponga que éste es el único criterio a aplicar en la elección de una ciudad para la nueva sucursal y la única opinión a tener en cuenta es la del Presidente del Directorio. Redacte un breve informe con su opinión como profesional asesor, en el que recomiende qué decisión tomar y, en caso de ser necesario, inserte una salvedad que tenga en consideración lo consignado al responder el inciso **b)**.

Ejercicio 4.6.4.

Considere cuidadosamente las oraciones incompletas que se insertan más abajo.

a) Señale con cuáles de las opciones listadas a continuación de las frases inconclusas éstas conforman una expresión válida (puede haber más de una que satisfaga la condición).

I. Resolver una situación problemática con el Proceso Analítico Jerárquico requiere ...

1) construir un modelo cuyo espacio de decisiones factibles es discreto.

2) homogeneizar las unidades de medidas utilizadas, mediante normalización de criterios.

3) estructurar una jerarquía de elementos intervinientes, de no más de tres niveles.

4) aplicar todo lo consignado en las expresiones anteriores.

5) aplicar nada de lo consignado en las expresiones anteriores.

II. Un modelo aplicado para resolver una situación problemática mediante PAJ ...

1) permite tomar decisión en base a las opiniones subjetivas de los decisores.

2) participa de la noción de "optimización".

3) alcanza soluciones eficientes (en los términos que lo expresan Simon y Pareto).

4) cumple con todo lo consignado en las expresiones anteriores.

5) no cumple con lo consignado en las expresiones anteriores.

Ejercicio 4.6.5.

Considere detenidamente y en forma crítica las expresiones referidas a Apoyo **Multicriterio a la Decisión** que se insertan a continuación.

a) Consigne si las expresiones son **V**erdaderas o **F**alsas. Fundamente brevemente la respuesta en caso de ser necesario.

1) Un óptimo de Pareto representa una situación en la que cualquier participante puede mejorar el resultado que obtuvo sin afectar el obtenido por los demás.

2) "Racionalidad limitada" es un concepto que, aplicado a la toma de decisiones en Administración, implica el planteo de modelos que procuran la obtención de óptimos.

3) En el análisis multicriterio es recomendable la "normalización de criterios", aunque no es obligatoria.

4) Cuando es difícil distinguir si un elemento a incluir en el modelo constituye un objetivo o una restricción se dice que se trata de un problema "débilmente estructurado".

Ejercicio 4.6.6.

Al encargado de compras de *Quantum Inversiones*, le solicitaron que gestione la compra de un vehículo para trasladar al presidente de la empresa. Debe analizar en cada una de las ofertas los siguientes aspectos: precio, comodidad, seguridad, calidad mecánica.

Del análisis efectuado, se obtiene la siguiente matriz de preferencias entre los atributos señalados como importantes para definir la compra.

	Precio	**Comodidad**	**Seguridad**	**Calidad**
Precio	1			1/7
Comodidad	3			
Seguridad	4	5	1	3
Calidad		1/5		

a) Complete la matriz de comparaciones pareadas confeccionada por el encargado.

b) Interprete y exprese que significan los valores 4 y 7 de la matriz según escala de Saaty.

c) Determine el vector de prioridades.

Ejercicio 4.6.7.

Un adolescente que ha finalizado sus estudios de nivel medio en la ciudad de Santa Rosa (LP) desea continuar con su formación académica en el área de la medicina. Ha evaluado tres Universidades Nacionales cercanas en las que puede comenzar una carrera (Córdoba, La Plata y Rosario), y ponderado en ellas la posibilidad de obtener becas de estudio, los amigos que se van a radicar en esas ciudades, y el costo de vida en cada lugar.

	Córdoba	**La Plata**	**Rosario**
Córdoba		4	
La Plata			7
Rosario	2		

a) Indique cuáles son los criterios y cuáles las alternativas de este problema.

b) Complete la matriz y determine las prioridades que la misma asigna a cada alternativa.

c) Indique si, según los valores de la matriz, existe consistencia en su razonamiento.

Ejercicio 4.6.8.

Tomás es un joven que ha egresado de la Universidad recientemente, y está a la búsqueda de su primer empleo como profesional. Se le presentan tres ofertas de trabajo (O1, O2 y O3) y debe determinar cuál acepta. Para poder evaluarlas y tomar la decisión más aceptable considera como aspectos relevantes a tener en cuenta: nivel inicial de remuneraciones (NIR); nivel de vida de la ciudad donde se ubica el empleo (NV); atractivo del trabajo (AT) basado en la proyección de progreso personal; proximidad del lugar de trabajo a familiares y amigos (PLT).

Las preferencias de Tomás en relación con los aspectos considerados como relevantes se expresan así:

- NIR tiene fuerte importancia con respecto a NV
- AT tiene entre igual y moderada importancia con respecto a NV
- PLT tiene entre moderada y fuerte importancia con respecto a de NV
- NIR tiene entre muy fuerte y extremada importancia con respecto a AT
- PLT tiene extremada importancia con respecto a AT
- NIR tiene moderada importancia con respecto a PLT.

a) Represente la jerarquía para este problema de decisión.
b) Arme la matriz de comparaciones de los criterios.
c) Calcule las prioridades que se le asignan a cada criterio.

Ejercicio 4.6.9.

Las siguientes matrices de comparaciones pareadas de las alternativas, para cada uno de los criterios planteados, expresan de qué manera cada oferta de trabajo satisface a cada uno de ellos. Considérelas con base en lo especificado en el ejercicio **4.6.8**.,

Nivel Inicial Remuner.

	O1	O2	O3
O1	1	3	4
O2	1/3	1	7
O3	1/4	1/7	1

Nivel de Vida

	O1	O2	O3
O1	1	1/2	1/3
O2	2	1	1/3
O3	3	3	1

Atractivo del trabajo

	O1	O2	O3
O1	1	1/4	5
O2	4	1	7
O3	1/5	1/7	1

Proximidad

	O1	O2	O3
O1	1	6	8
O2	1/6	1	3
O3	1/8	1/3	1

a) Calcule el vector de prioridad global e indique cual sería la oferta laboral a aceptar

4.7. Apéndice

4.7.1. Clasificación de los Métodos Multicriterio Discretos

En opinión de Barba-Romero (1996), estos métodos se podrían clasificar sobre la base de diferentes características que serían aisladamente incompletas como factores de clasificación. Como factores de análisis se podrían utilizar: la dimensión de la matriz de decisión, la forma de consignar los pesos y evaluaciones (ordinales, cardinales, o verbales), la forma en que el decisor debe operar sobre el modelo para aportar los datos requeridos (mediante estimaciones, comparación de alternativas, etc.), el tipo de resultado que ofrece (preordenamiento parcial o cardinalidad completa de las alternativas disponibles, etc.), etc.

Como alternativa, ese autor propone clasificar tanto en base a la operatividad como a la estructura de los métodos. En base a tal clasificación, y según la difusión y uso que experimentan los distintos métodos, en este texto se los ha reagrupado de esta manera.

4.7.1.1. Métodos Utilidad Multiatributo.

Incorpora la valoración del riesgo y la incertidumbre, a fin de construir una función que se desconoce, al expresar las preferencias del decisor en relación con un conjunto de atributos o criterios según la utilidad que le significan los mismos.

Teoría de la Utilidad Multiatributo[20] fue el primer método desarrollado coherentemente. Se emplea para determinar la importancia atribuida a un criterio en relación con otro y priorizar alternativas, a partir de la construcción de una función matemática. La importancia relativa entre los criterios se refleja en una "tasa de sustitución", además de tenerse en cuenta la independencia de los criterios, para reducir el problema a otros más sencillos.

4.7.1.2. Métodos de Relaciones de Superación.

Los enfoques más conocidos aplican los conceptos de concordancia y discordancia. Sobre la base de tales términos se establece una relación de superación, que permite establecer un preorden entre las alternativas no dominadas del problema.

Electre[21] fue el primer método desarrollado según esta modalidad de trabajo; ha tenido mejoras sucesivas que han llevado a las nuevas versiones conocidas (de la I a la IV, y otras más). Se basa en un ordenamiento parcial entre las alternativas para cada criterio y en la concordancia o discordancia en las relaciones de dominación. La Relación de Superación o Sobreclasificación *("surclassement", o outranking)* es construida por el decisor sobre la base de sus juicios y experiencia, y puede ser determinística o difusa *(fuzzy)* según el grado de incertidumbre existente.

Estas comparaciones binarias son criterio a criterio.

Inspirado en el método *Electre* surgió Prométhée[22], a través de desarrollos de Brans y Vincke, el cual se caracteriza por ser uno de los más intuitivos en cuanto a su modo de utilización.

20 *MAUT,* su sigla en inglés.

21 *Elimination and (et) choice translating algorithm*, por Roy, Benayoun y Sussman, 1966

22 *Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*

4.7.1.3. Métodos de Comparación de Alternativas.

Además de la información que aporta la matriz de decisión del problema, aplican otra demandada interactivamente al decisor por medio de comparaciones globales entre pares seleccionados de alternativas, a diferencia de las comparaciones criterio a criterio citadas más arriba.

En este caso, se asume que existe una función de utilidad multiatributo que no se explicita como en los métodos agrupados en el punto **3.**, sino que se confecciona indirectamente.

Comprende a los métodos desarrollados por Stanley Zionts, además del PAJ *(AHP o Analytic Hierarchy Process)* de Thomas L. Saaty.

4.7.1.4. Otros Métodos.

Métodos ordinales y lexicográficos. De sencilla aplicación, se distinguen por necesitar solamente una matriz de decisión consignada en forma ordinal; o sea, basada en un orden o preorden completo para cada criterio. Condorcet y Borda, entre otros, desarrollaron métodos con esta característica al considerar preferida una alternativa en función de las "victorias" obtenidas en confrontaciones bilaterales con las demás al aplicar cada uno de los criterios.

Métodos de ponderación lineal. Su característica distintiva es la construcción de una función de valor mediante la aplicación de una escala cardinal de pesos a las evaluaciones que se hacen de cada alternativa según el criterio aplicado. Opera mediante compensación a partir de una previa normalización de las evaluaciones.

Métodos de Concordancia. Se basan en la comparación binaria de alternativas, entre todas las del problema. Exigen que el decisor haga un preorden de las evaluaciones para cada criterio, y pesos en escala cardinal u ordinal. A *posteriori* se construye un coeficiente de concordancia mediante la suma de los pesos de los criterios en los que una alternativa es igual o superior a otra.

También se pueden agrupar aquí los métodos de **Distancia al Ideal** (que definen, para las evaluaciones un punto ideal que simultáneamente optimiza todos los criterios) cuyo exponente más importante es el método TOPSIS [23] de Hwang y Yoon, y el **de Permutación** (que

23 *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*

proviene de la escuela holandesa, y se basa en comparar cada permutación posible del orden de las alternativas, y seleccionar por máximo valor de concordancia).

4.7.2. Índices aleatorios de consistencia en AHP.

Orden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Índice aleatorio	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

Fuente: SANCHEZ, Ramiro*(2002); Implementation of Multicriteria Decision Aiding models; Cochabamba; Centro de Planificación y Gestión (CEPLAG), Universidad Mayor de San Simón.*

4.7.3. Escala de comparaciones pareadas en AHP.

Intensidad de importancia	Definición	Explicación
1	Igual	Dos actividades contribuyen de igual modo al objetivo.
3	Moderada	La experiencia y el juicio favorecen levemente a una actividad sobre la otra
5	Fuerte	La experiencia y el juicio favorecen fuertemente a una actividad sobre la otra
7	Muy fuerte o demostrada	Una actividad es mucho más favorecida que la otra; su predominancia se demostró en la práctica.
9	Extrema	Las pruebas que favorecen a una actividad más que a otra son del nivel de aceptación más alto posible.
2, 4, 6, 8	Para transar entre los valores anteriores	A veces es necesario interponer numéricamente un juicio de transacción puesto que no hay una palabra apropiada para describirlo.
Recíprocos de lo anterior	Si a la actividad ***i*** se le ha asignado uno de los números distintos de cero mencionados cuando se compara con la actividad ***j***, entonces ***j*** tiene el recíproco cuando se la compara con ***i***.	Una comparación que surge de la elección del elemento más pequeño como unidad, para estimar el mayor como múltiplo de esa unidad.
Racionales	Coeficientes que surgen de la escala	Si se forzara la consistencia obteniendo *n* valores numéricos para abarcar la matriz.
1.1 a 1.9	Para actividades vinculadas	Cuando los elementos son cercanos y casi no se distinguen: moderado es 1.3 y extremo es 1.9.

Extraída de SAATY (1995). Decision making for leaders: The analytic hierarchy process for decision in a complex world. Pittsburg, WRS Publications.

4.8. Bibliografía

ACKOFF, R. (1997). *Planificación de la empresa del futuro*. México, Limusa

ANDERSON, D., SWEENEY, D. Y WILLIAMS, T. (1993). *Introducción a los modelos cuantitativos para Administración*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

AUTRAN M., L. F. Y MACHADO M., A. M. (1998). *Da informação à tomada de decisão: agregando valor através dos métodos multicritério*. Río de Janeiro, Comdex Suceso-Rio'98.

AUTRAN M., L. F. (1999). *Seminario multicriterio.* Santa Rosa (LP), IX EPIO.

ÁVILA M., R. Y OTROS (2000). *El AHP y su aplicación para determinar los usos de las tierras.* Santiago de Chile. Oficina Regional FAO.

BARBA-ROMERO, S. (1996). *Evaluación multicriterio de proyectos*. Tegucigalpa, Unesco.

EPPEN, G. D., GOULD, F. J., Y OTROS (2000). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa* - Creación de modelos de decisiones con hojas de cálculo electrónicas. México, Prentice-Hall.

FORMAN E. Y SELLY, M. A. *Decision By Objectives (How to convince others that you are right).* Disponible formato PDF en http://www.expertchoice.com/ dbo/

GOODWIN, P. Y WRIGHT, G. *Decision Analysis for Management Judgment*. New York, Wiley, 2nd .

MARÍN , I. Y MORUZZI, H. (1994). *Taller AHP*. Salta, V EPIO.

MARÍN , I. (1995). Seminario "Mucho más sobre AHP". Bahía Blanca, VI EPIO.

MARTÍNEZ , E. Y MAURICIO ESCUDEY (ED.) (1998). *Evaluación y Decisión Multicriterio.* Reflexiones y experiencias. Santiago de Chile, Universidad de Santiago de Chile.

ROMERO, C. (1996). *Análisis de las decisiones multicriterio.* Madrid. ISDEFE-Ingeniería de sistemas. Disponible PDF, en http://www.isdefe.es/webisdefe.nsf.

SÁNCHEZ L., R. (2002); *Implementation of Multicriteria Decision Aiding models.* Cochabamba; Centro de Planificación y Gestión (CEPLAG) - Universidad Mayor de San Simón.

SIMON, H. A. (1992). *Rational Decision-Making in Business Organizations (Nobel Memorial Lecture, 1978).* Singapore, World Scientific Publishing Co.

TAHA, H. (1994). *Investigación de Operaciones.* México, Ed. Alfaomega.

ZALTA, E. N. (EDITOR). *Stanford Encyclopedia of Philosophy. Rationalism vs. Empiricism* en http://plato.stanford.edu/entries/rationalism-empiricism/ (visitada Abril/2009)

Capítulo 5

Programación Dinámica

5

5.Programación Dinámica.
5.1. Conceptos básicos. Principio de optimalidad
5.1.1. "Divide y vencerás"

Las metodologías de trabajo aplicables a la resolución de situaciones problemáticas que se desarrollarán en este capítulo presentan aspectos que las distinguen de técnicas específicas (como por ejemplo, la programación lineal) y que también se utilizan en la Investigación Operativa. Estas últimas se caracterizan porque se pueden aplicar de la misma manera a diversos problemas, mientras que en el caso de la programación dinámica se cuenta con un procedimiento sistemático basado en un enfoque de tipo general para la resolución de problemas.

En base a tal rasgo distintivo es que en programación dinámica la formulación matemática específica para cada caso de aplicación individual se debe desarrollar y adecuar al modelo elaborado. Es decir, no se cuenta con algoritmos ya definidos que permitan arribar a una solución, sino que es preciso formular "relaciones recurrentes" apropiadas para cada problema.

Por lo mencionado, el punto de partida para los análisis y desarrollos concretos de cada caso está dado por la observación detenida de las características del fenómeno, ahí se procurará identificar la existencia de rasgos típicos de las situaciones donde es posible la aplicación de la programación dinámica. Es aconsejable un adecuado grado de creatividad, desarrollo de las habilidades correspondientes, y conocimiento de la estructura general de este tipo de problemas para reconocer cuándo y cómo se la puede aplicar. Con tal condición a la vista se desplegarán algunos ejemplos de situaciones que pueden ser tratadas con esta metodología. Se hará una presentación simplificada, que ponga de manifiesto los aspectos más generales del método. En la bibliografía citada al final del capítulo el lector puede profundizar los conceptos y encontrar exposición de más ejemplos y aplicaciones correspondientes a situaciones más complejas.

Para definir si es factible la aplicación de la programación dinámica a una situación modelada, uno de los aspectos a tener en cuenta al hacer el análisis es si requiere de la toma de decisiones en forma parcial y sucesiva en base a una ordenación prefijada. Cuando se necesita tomar una serie de decisiones interrelacionadas y es posible dividir los grandes problemas en secuencias de problemas relacionados, de menor tamaño y (consecuentemente) con mayor facilidad para realizar los cálculos que permitan optimarlos individualmente, existen muchas posibilidades de aplicar la programación dinámica. De allí el título asignado a este parágrafo.

Si bien la designación "programación dinámica" evoca automáticamente la idea de cambios que se suceden cronológicamente, su aplicación no es exclusiva de modelos en los cuales haya decisiones relacionadas con el tiempo. Aquí encuadran los problemas de gestión de inventarios (como aprovisionamiento, producción y establecimiento de cantidades máximas y/o mínimas a almacenar en determinado período), aunque se modelarán otros en los cuales el tiempo no es un factor importante: tales los que genéricamente se han denominado como problemas de distribución de esfuerzo. Por esto quizás sea mejor la denominación "Programación de etapas múltiples", tal como propone Taha (1994: 404).

5.1.2. Glosario

La bibliografía especializada consigna que los sutiles conceptos a emplear en la técnica, así como las notaciones matemáticas poco conocidas, son fuente usual de confusión entre quienes no conocen el tema en detalle. Por eso, antes de avanzar en el desarrollo de los conceptos del tema será conveniente acordar, en base a las definiciones insertadas a continuación, el significado que tendrán algunos términos de uso común en la metodología.

Etapa (o fase). Fracción del problema con un conjunto de alternativas mutuamente excluyentes, entre las que se seleccionará la mejor. Cuando un problema complejo se subdivide en otros de menor tamaño el método de solución de programación dinámica crea una etapa por cada uno de tales subproblemas, y las etapas quedan sujetas a su resolución en un cierto orden.

Variable de decisión. Una variable que representa a las posibles decisiones que pueden llegar a tomarse en una etapa.

Decisión: opción para completar cada etapa. Conlleva la asignación de un valor concreto a la variable de decisión correspondiente.

Estado actual. La situación en que está el proceso al inicio de una etapa o fase y que especifica las condiciones en las que se debe tomar la decisión correspondiente. Cuando se la toma se pasa desde el estado asociado con una etapa hacia el asociado con la siguiente.

Variable de estado. Una variable representativa de la situación (condición o estado) en que se encuentra el proceso en un determinado momento; básicamente, al inicio de una etapa o a su finalización (o inicio de la siguiente).

Función de transformación para etapas. Es una regla o ecuación que relaciona la variable de estado de una etapa con la variable de estado de la etapa anterior y con la decisión adoptada. Es la expresión matemática a aplicar para que la variable de estado de una etapa se transforme y esté en condiciones de ser aplicada en la etapa siguiente.

Rendimiento inmediato. Valor representativo del aporte (o contribución) que una decisión tomada en una etapa hace, por sí misma, al rendimiento global de todo el proceso.

Función de rendimiento. Es un valor (ganancia, pérdida, costo, etc.) asociado al valor adoptado por la variable de decisión en una etapa cualquiera en conjunto con otras etapas para las cuales ya se calculó su rendimiento inmediato. La función de rendimiento resume el rendimiento o resultado total para todas las etapas evaluadas incluida la tratada actualmente.

Proceso Finito: tiene un número finito de etapas y de estados asociados a cada etapa.

Política: Se constituye por el conjunto (secuencia) de las decisiones adoptadas en cada una de las etapas. Especialmente cuando se trata de modelos determinísticos.

Subpolítica: Es un subconjunto del conjunto de decisiones que constituyen una política.

Estrategia: En modelos aleatorios es el equivalente al término "política".

Subestrategia: En modelos aleatorios es el equivalente al término "subpolítica".

Política (o Estrategia) Óptima: es la que conduce al mejor rendimiento global, consecuencia de la reunión de los rendimientos asociados a cada decisión y calculados mediante la función de rendimiento.

5.1.3. Características de las aplicaciones de programación dinámica

A medida que se desarrollaba el primer título de este capítulo se mencionaron algunas características propias de las situaciones que pueden modelarse y resolverse con aplicación de la programación dinámica. Aquí se presentarán en detalle y ordenadamente aquellos aspectos que son comunes y distinguen a la mayoría de tales situaciones.

1. El problema puede dividirse en etapas; cada etapa requiere una decisión. Esta posibilidad deviene de la factibilidad de fraccionar un problema complejo en un conjunto de problemas cuya resolución puede, generalmente, facilitarse al encararlos en forma individual.

2. Cada etapa tiene un número de estados asociados con ella. Tal como se consignó en el glosario, esto significa que en cualquier etapa se cuenta con información sobre las condiciones (situación, o estados) en que se tomará la decisión para pasar a la siguiente.

3. La decisión tomada en cualquier etapa indica cómo se transforma el estado de la etapa actual en el estado correspondiente a la etapa siguiente. La decisión a tomar en cada etapa persigue transformar el estado asociado a ella en otro que tendrá aplicación en la etapa siguiente. Esta relación de transición permite representar el modelo mediante redes (como las ya vistas en otro capítulo), lo cual facilita la interpretación de los procesos involucrados y sus consecuencias.

4. Dado el estado actual, la decisión óptima para cada una de las etapas restantes no debe depender de estados previamente alcanzados o de decisiones previamente tomadas. Esto es: que la eficiencia de una subpolítica cualquiera depende del estado en que se encuentra el proceso y de las etapas restantes, independientemente de las decisiones y estados previos. Esta particularidad es la que se ha designado como "principio de optimidad", y será descripto en detalle posteriormente, en el parágrafo respectivo.

5. Se diseña un procedimiento de resolución que, en base a las respectivas decisiones óptimas en cada etapa para cada uno de los estados posibles, obtenga una solución óptima para el problema completo. O sea que, en cada etapa y ante cada estado posible se cuenta con la mejor decisión, que da información sobre qué hacer ante cada circunstancia que pudiera aparecer. Esta información es útil al momento de practicar análisis de sensibilidad.

6. El proceso de resolución se inicia al encontrar la subpolítica óptima para la última etapa. La base de arranque del proceso es prescribir la decisión óptima para cada estado posible en la última etapa, generalmente a partir de una solución trivial. Esta afirmación tan contundente tiene correspondencia biunívoca con la metodología de resolución denominada "recurrente en retroceso". Podría llegar a aplicarse una "resolución recurrente en avance" (tal como se describe en el Apéndice de este capítulo), con lo cual cambia ligeramente algún concepto involucrado en la definición aunque no su esencia ni los resultados obtenidos.

7. Si los estados del problema se han clasificado en una secuencia de *N* etapas, una fórmula recurrente debe relacionar los rendimientos (costo o recompensa) obtenidos en las etapas *N* a *n* con los obtenidos en las correspondientes etapas subsiguientes (*n-1* hasta *1*). Esto se consigue con la utilización de una fórmula única aplicable en cada una de las etapas. Las variaciones en la fórmula y en sus resultados para cada etapa surgen porque debe tener en cuenta los valores de la variable de decisión y de la variable de estado respectiva. Se dispone de una relación recurrente que identifica la subpolítica óptima para la etapa ***n*** dada la subpolítica óptima para la fase ***n+1.***

5.1.4. Optimidad

Richard Bellman sentó las bases de la programación dinámica en 1957, y expresó lo que llamó "Principio de Optimidad"[24]. Como se consignara anteriormente, el Teorema (o principio) de Optimidad, especifica que **"dado el estado actual, la decisión óptima para cada una de las etapas restantes no debe depender de estados previamente alcanzados o de decisiones previamente tomadas"**. En términos más sencillos se lo puede expresar con la frase **"Una política óptima sólo puede estar formada por subpolíticas óptimas".**

24 El término "optimidad" proviene de una traducción que se realizara para la obra de Kaufmann (1967: 107) al no disponerse del vocablo castellano equivalente al francés "optimalité" y al inglés "optimality"; también suele traducirse como "optimalidad". Asimismo, dicho autor critica la asignación de calidad de "principio" a un desarrollo meramente matemático, considerando como más apropiada la designación de "teorema".

La explicación de tal definición se basa en los cálculos recurrentes que se aplican en el procedimiento. En cada etapa **se determina, para cada estado posible, la mejor política para abandonar tal estado y completar el proceso.** Esa determinación tiene en cuenta que las etapas precedentes se han concluido y los resultados obtenidos en ellas se aprovechan en la etapa subsiguiente. En tales circunstancias, **en cada etapa se utiliza información de resumen** de la/s etapa/s anterior/es.

Dicho resumen involucra a todos los r**endimientos de todas las etapas ya consideradas.** En la utilización del resumen **no interesan las decisiones específicas ya tomadas** en todas las etapas anteriores.

Las decisiones futuras se adoptan en forma óptima sin necesidad de apelar a decisiones ya tomadas. Entonces, para una política óptima -independientemente de las decisiones tomadas para llegar a un estado particular en una etapa particular- las decisiones restantes deben constituir una política óptima para abandonar ese estado.

5.1.5. Nomenclatura y formulación

Ya se consignó en párrafos anteriores que en Programación Dinámica no existe un algoritmo de uso general que sea aplicable inmediatamente a cada caso particular que se resuelve. Por tal motivo, tampoco se cuenta con expresiones matemáticas (variables y funciones) estandarizadas. Sin embargo, a partir de las características señaladas como típicas de las situaciones en que esta metodología es útil, se pueden reseñar algunas formulaciones bastante uniformes.

La formulación básica de un problema de Programación Dinámica, una vez identificadas las etapas y los estados, se apoya en la relación recurrente que permite avanzar en el proceso de solución hasta el final. Si bien tal relación recurrente, en general, es propia de cada uno de los problemas tratados, es factible utilizar una notación aplicable a la mayoría de ellos. A continuación se incluye la empleada por Hillier y Lieberman (1997: 432).

N **:** representa el número de etapas de todo el modelo.

n **:** identifica a la etapa que se está tratando en un momento determinado (etapa actual).

s_n: la variable de estado representativa de la situación para la etapa n. Si se observa a la totalidad de las etapas y sus circunstancias y relaciones como un todo y con un enfoque sistémico, puede decirse que esta variable representa al estado del sistema en la etapa n.

x_n: la variable de decisión para la etapa n.

x_n^* : valor óptimo de la variable de decisión x_n cuando el estado de la etapa es s_n.

$f_n\ (s_n,\ x_n)$: representa la contribución que hacen a la función objetivo las etapas $n, n+1, \ldots, N$ cuando el estado de la etapa n es s_n, la decisión en tal etapa es x_n y en las etapas subsiguientes se toman decisiones óptimas. Esta definición vale cuando se aplica recurrencia "en retroceso" (la más tratada en la bibliografía); como se verá en el apéndice, cuando se aplica recurrencia "en avance", cambian algunos de los conceptos involucrados.

$f_n^*\ (s_n) = f_n\ (s_n,\ x_n^*)$: valor óptimo total para la función de rendimiento para la etapa n y todas las etapas posteriores cuando la variable de decisión x_n adopta su valor óptimo ante el estado s_n. Cabe la misma salvedad que en el concepto anterior en cuanto a recurrencia "en avance", dado que para su cálculo se aplicará cualquiera de las siguientes expresiones según que el objetivo perseguido por el problema sea de maximizar o de minimizar, respectivamente, el valor de una función. Y donde, a su vez, la expresión incluida entre corchetes, $f_n\ (s_n,\ x_n)$, al ser valorizada tiene en cuenta la función $f_{n+1}^*\ (s_{n+1})$. Por lo que siempre se enlazan todas las resultantes desde la etapa actual hasta la última que forma parte del sistema: $f_n^*\ (s_n) = \underset{xn}{máx}\ [f_n\ (s_n,\ x_n)]$, o bien $f_n^*\ (s_n) = \underset{xn}{mín}\ [f_n(s_n,\ x_n)]$

5.1.6. Ventajas y desventajas de la resolución mediante Programación Dinámica

Esta metodología presenta ventajas con respecto a otras técnicas de tratamiento de problemas similares en cuanto a la cantidad de cálculos que necesario realizar para llegar al óptimo.

Los problemas en que es aplicable la Programación Dinámica, en general se caracterizan por necesitar muchos cálculos, especialmente porque la cantidad de alternativas a evaluar debe determinarse mediante un análisis combinatorio. Por tal motivo, a medida que aumentan el número de etapas o de estados es muy posible que aumente desmesuradamente la cantidad de cálculos a realizar si se procede mediante "simple inspección". Podría ocurrir que no sea factible -en términos de cálculo- la enumeración de todas las combinaciones posibles debido a que, tal vez, cada una de ellas define la política para todo el problema.

Cuando se utiliza una metodología de trabajo que se basa en la enumeración total, las combinaciones no factibles no pueden ser descubiertas en forma anticipada, con lo que se corre el riesgo de hacer cálculos de más. Y en el caso de las combinaciones factibles (y por lo tanto, útiles a los fines de la resolución) no se utiliza la información disponible para eliminar toda referencia futura a aquellas que nunca pueden llegar a formar parte de la solución óptima.

En oposición a lo mencionado, la metodología de enumeración parcial aplicada por la Programación Dinámica hace que la cantidad de tales combinaciones se reduzca considerablemente.

Por otra parte, al tratarse de especificaciones generales sobre el procedimiento a observar en la resolución, es posible efectuar las adaptaciones de cálculos que sean convenientes. De esta manera, a partir de la creatividad de quien modela y de la versatilidad de los procedimientos ideados, la Programación Dinámica es una metodología aplicable en situaciones muy diversas.

En algunos casos concretos como el "problema de distribución de esfuerzos" las situaciones a modelar no pueden resolverse mediante algoritmos específicos (por ejemplo, Programación Lineal) por carecer de algunos elementos necesarios para su aplicación. Sin embargo, la Programación Dinámica hace posible su resolución, justamente por poder adaptarse a tales circunstancias, como podría ser la falta de linealidad o proporcionalidad en los rendimientos. Como desventaja en este caso concreto debe citarse que es útil solamente para asignar un solo recurso (o esfuerzo), mientras que el algoritmo específico puede hacerlo con varios.

5.2. Distintos tipos de Programación Dinámica

5.2.1. Selección de una dimensión de análisis para una clasificación

Una separación en dos grandes grupos puede hacerse cuando se tiene en cuenta el efecto de fenómenos aleatorios o no.

En tal sentido, si ante un estado del sistema en una etapa ***n*** cualquiera se adopta una decisión tal que el estado para la siguiente etapa queda completa y unívocamente determinado, se trata de un modelo de Programación Dinámica Determinística (o determinista).

Por otra parte, en un modelo de Programación Dinámica Aleatoria (o Estocástica) cuando se toma una decisión dado un estado de una etapa cualquiera, para determinar cuál será el siguiente estado del sistema es necesario aplicar una distribución de probabilidad. Esto ocurre cuando el rendimiento de al menos una de las decisiones es aleatorio; esta aleatoriedad puede provenir de la existencia de rendimientos inciertos asociados a diversos estados, o bien de estados que son de ocurrencia incierta aún cuando tengan perfectamente determinados sus rendimientos.

También pueden presentarse discriminaciones entre los modelos con respecto a la forma de la función objetivo (si su propósito es maximizar o minimizar, y a su vez si para el cálculo de la función de rendimiento global se aplicará suma o producto de los resultados parciales) y al tipo de variables aplicadas (discretas o continuas). Sin embargo estas clasificaciones, si bien pueden aportar claridad para el tratamiento a aplicar en el proceso, su efecto principal está en relación con la mayor o menor dificultad de los cálculos a aplicar.

5.2.2. Caso determinístico

5.2.2.1. Particularidades del caso determinístico

Tal como se citó anteriormente, la característica dominante de estos problemas es que se conoce con certeza cuál será el estado al que se arribará al tomar una decisión en una determinada etapa que está en un cierto estado conocido.

Si bien existen otras formulaciones que se pueden idear en base a la experiencia y conocimientos de quien tiene a cargo el modelado, básicamente se pueden identificar tres tipos distintos de problemas que permiten obtener su solución mediante Programación Dinámica Determinística: el problema de la diligencia, el problema de distribución de esfuerzos, y el planeamiento y control de inventarios y producción.

Este tipo de problemas se puede representar mediante redes orientadas, como las vistas en algún capítulo anterior. Cada nodo identifica a los estados que pueden existir al inicio o final de una etapa, mientras que los arcos indican la forma en que se puede vincular el estado vigente en una etapa con otro que es aplicable a la etapa siguiente. Ubicados un nodo inicial y uno final, los intermedios se van alinean verticalmente de manera que todos los estados correspondientes a una misma etapa quedan sobre una misma línea vertical. Hay que recordar que cada arco sólo es aplicable a la transición entre una etapa y la siguiente; por esto, es obvio que no puede haber arcos que se extiendan más allá de la primera columna de nodos contigua.

Si bien en una red como la citada es posible registrar en detalle y paso a paso las ecuaciones utilizadas y los cálculos resultantes necesarios para la resolución, puede ser mucho más práctico acompañarla con una tabla en la que se insertan los cálculos auxiliares e identifican aquellos que son útiles para progresar en la solución por constituir valores óptimos.

5.2.2.2. Un clásico: el problema de la diligencia

Para introducir la metodología de planteo y resolución de los problemas de Programación Dinámica se utilizará un ejemplo que ha sido profusamente utilizado en la bibliografía, pero que no por eso deja de tener un importante efecto esclarecedor del proceso a seguir.

El caso original fue ideado por un profesor de la Universidad de Stanford, y consistía en definir el mejor camino para un aventurero que se dirigía desde la costa Este de Estados Unidos al Lejano Oeste, mediante la selección de las diligencias que se dirigían a distintas puntos intermedios del país antes de llegar a su destino final, de manera que el viaje fuera lo más seguro para él. Aquí se presentará un ejemplo un poco más adecuado a la realidad actual de la región.

Ejemplo 5. 1. La ruta más corta.

El ejemplo mencionado en el título anterior bien puede resolverse por aplicación del algoritmo de ruta más corta que se viera oportunamente en otro capítulo; y de hecho esa forma de calcular los valores comparte algunos conceptos con los aplicados en Programación Dinámica.

En este caso se supondrá que el "Club de Raidistas Esfuerzo Máximo" promueve entre sus integrantes la realización de excursiones en bicicleta por las rutas del país. En estos momentos organizan un *raid* que unirá Santa Rosa (La Pampa) con Tandil (Buenos Aires) en cinco jornadas de pedaleo. El emprendimiento se basa totalmente en el esfuerzo propio de los asociados, y para abaratar costos los recorridos intermedios obligan a pasar por ciudades donde existan clubes similares que les provean comida y alojamiento.

La Figura 5.1. muestra un croquis que da idea aproximada de la distribución geográfica de las distintas ciudades así como de las diferentes rutas que pueden recorrerse para llegar desde un extremo a otro de la travesía. Las ciudades de inicio, fin e intermedias donde puede hacerse escala antes de continuar han sido señaladas con letras (en cada uno de los nodos) a fin de que sea más fácil su referencia al momento de efectuar los cálculos.

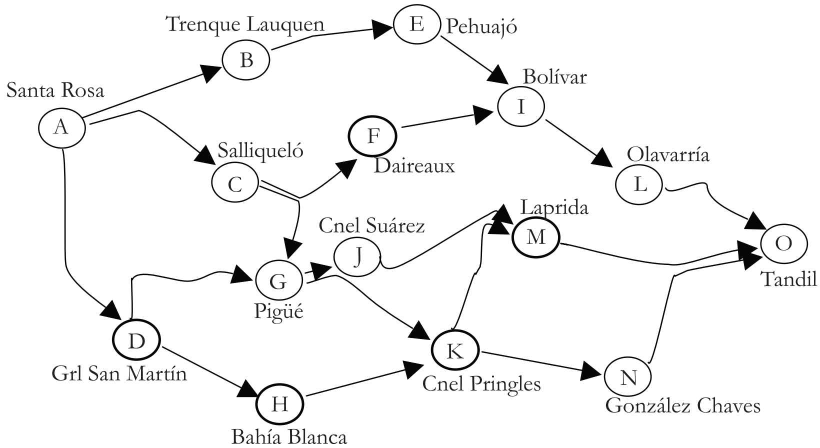


Figura 5.1. Esquema de ubicación de las ciudades a visitar en el *raid*

Una de las formas de definir la ruta a seguir, de manera que se recorra la menor cantidad de kilómetros, es la del trazado exhaustivo de todos los posibles caminos entre A y O. Esta forma de trabajar puede llegar a ser excesivamente extenuante y costosa cuando se cuente con una red mucho más compleja que la correspondiente a este ejemplo.

Al analizar los distintos puntos geográficos que se pueden tocar en cada momento se observa que es posible armar una red para identificar cada una de las etapas que tendrá el modelo a confeccionar de manera que se lo resuelva mediante Programación Dinámica Determinística.

Esta representación se muestra en la Figura 5.2., donde los nodos representan a cada ciudad que se tocará en el recorrido, los arcos indican las posibles formas de pasar de un estado del sistema (Estar en una determinada ciudad) a otro estado distinto en la etapa siguiente (Cambiar de ciudad), y los números consignados sobre los arcos indican la cantidad de kilómetros que hay que recorrer para ir de una ciudad a la próxima.

Para una mejor representación del modelo se han indicado las cinco etapas a recorrer (en números romanos al pie del gráfico) y las variables intervinientes en cada etapa: s_n, para la variable de estado representativa de las distintas ciudades que pueden alojar a los excursionistas en cada etapa; y x_n, la variable de decisión para la etapa n *(n= 1, 2, ..., 5)*. El estado del nodo terminal de la red se ha indicado como s_T.

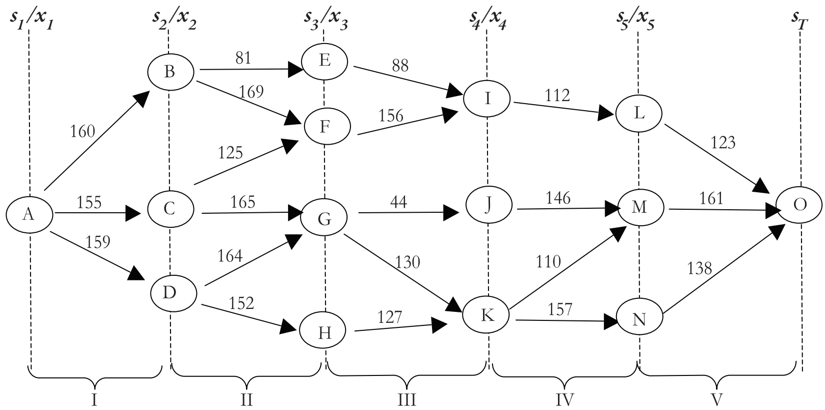


Figura 5.2. Representación del Ejemplo 5.1. como red

Formulación.

Se considerará **política óptima** a aquella que contenga todas las sucesivas elecciones de tramos de ruta que minimicen la distancia total a recorrer.

El único dato con que se cuenta en este caso es la cantidad de Kilómetros que median entre las ciudades con clubes amigos. Podrían haber existido costos reflejados de diversa manera según las distintas rutas alternativas; ellos, a su vez, podrían formar parte de distintos objetivos a cumplir.

A partir de la expresión $f_n^*(s_n) = \min_{xn} [f_n(s_n, x_n)]$, ya presentada anteriormente, se puede concretar en una función el objetivo de este problema, además de ser aplicable dicha expresión para los cálculos de recurrencia.

La función a minimizar, y que interviene en el lado derecho de la ecuación, expone el cálculo recurrente, y se compone de dos partes:

a) un valor (en el ejemplo, kilómetros recorridos en la etapa) que es el rendimiento inmediato (que se simbolizará con v_{sx_n}) por elegir la opción x_n en la etapa n; y

b) el mínimo valor futuro (a representar con $f^*_{n+1}(x_n)$) correspondiente a las etapas $n+1$ y posteriores (que son los kilómetros a recorrer desde la próxima etapa inclusive hasta llegar al destino final). En símbos, $f_n(s_n, x_n) = v_{sx_n} + f^*_{n+1}(x_n)$ es la ecuación de recurrencia.

La ecuación $f_n^*\ (s_n)$ representa el mínimo valor (en Km.) que corresponde a la mejor política global para las etapas restantes cuando se elige la opción x_n y se está en el estado s_n en la etapa n.

La última expresión, aplicada a la "Etapa I" permite expresar el objetivo del problema. Así, se tiene que en tal circunstancia hay un solo estado posible (estar en la ciudad ***A***) y existirá una opción óptima para todo el problema tomada en la etapa $n=1$. Por esto se procurará hallar la ruta desde *A* hasta *O* que minimice el valor de la expresión $f_1^*\ (A)$. Y se la puede resumir en $f_1^*(A) = \sum_{i=1}^{N} v_{si} \cdot x_i$ por tratarse de una función objetivo de suma acumulativa.

Lo básico de la Programación Dinámica es la separación del problema en otros de menor tamaño que pueden ser optimados por separado, y que conserven entre sí la interrelación de las decisiones a tomar. En este caso se procederá a resolver etapa por etapa, con comienzo por la última (la V) que correspondería al momento en que los ciclistas han llegado a la anteúltima ciudad del recorrido y deben transitar el tramo final de ruta hasta su destino definitivo.

Etapa V. Cuando resta ejecutar la última etapa el camino está perfectamente determinado por el "estado actual" y el "destino final". En este caso corresponden a "estar en las ciudades ***L, M*** o ***N***" y "llegar a la ciudad ***O***", respectivamente.

Tal como se indicó anteriormente, se trabajará en forma tabular junto con la red graficada, para facilitar la interpretación de los resultados obtenidos. En esta etapa los cálculos son directos y la solución bastante trivial, ya que para cada estado actual el rendimiento inmediato por trasladarse hasta el estado ***O*** arroja automáticamente el acumulado desde dicho origen hasta el final de la red.

La Tabla 5.1. muestra los valores considerados para los cálculos de la etapa V, así como el nuevo estado resultante ante cada estado inicial de la etapa.

n=5

s	$f_5^*(s)$	x_5^*
L	123	***O***
M	161	***O***
N	138	***O***

Tabla 5.1. Resumen de cálculos para la etapa V

Etapa IV. Las opciones son: si se está en la ciudad ***I*** pasar a la ciudad ***L***; si se está en ***J*** pasar a la ciudad ***M***; o, si se está en la ciudad ***K*** pasar a las ciudades ***M*** o ***N***. A diferencia de lo ocurrido en la etapa anterior, para esta última alternativa los cálculos serán un poco más complicados.

O sea que se puede pasar del estado ***I*** al ***L*** con un recorrido de 112 Km. (v_{IL}), para lo cual a vez se tiene un valor adicional mínimo de 123 (según lo consignado en la Tabla 5.1. para $s=L$, con $f_5^*(L)=123$), por lo que para el estado ***I*** es $f_4^*(I)=235$.

De manera similar, desde ***J*** se puede pasar a ***M*** con distancia total mínima 146 + 161, pues se acumula lo correspondiente al tramo ***M-O*** ya visto, y entonces el valor total es $f_4^*(J)=307$.

Finalmente, desde el estado ***K*** se comparan las distancias por pasar a los estados ***M*** o ***N***. Se tiene que $v_{KM}=110$ y $f^*_5(M)=161$, con un valor total de ***271 Km***. para esta decisión; y $v_{KN}=157$ y $f^*_5(N)=138$, que para esta decisión da valor total es ***295 Km***. Corresponde elegir el tramo ***KM,*** ya que da el menor valor total si se está en el estado ***K***.

La Tabla 5.2. resume los cálculos detallados en párrafos anteriores. Se deja constancia de que para evitar confusiones se han colocado guiones en las opciones en que no existe factibilidad, cuando en realidad el valor correspondiente debería ser infinitamente grande (para evitar su inclusión en la solución al ser comparado con otros valores).

n=4	s	$f_4(s_4,x_4)=v_{sx_4}+f_5^*(x_4)$			$f_4^*(s)$	x_4^*
		$x_4=L$	$x_4=M$	$x_4=N$		
	I	235	---	---	235	***L***
	J	---	307	---	307	***M***
	K	---	271	295	271	***M***

Tabla 5.2. Resumen de cálculos para la etapa IV.

Etapa III. En esta etapa hay cuatro estados iniciales: las ciudades ***E, F, G*** y ***H***. De manera similar a lo hecho en la etapa anterior, se deben evaluar la siguientes alternativas de decisión:

En el estado

E: si $x_3=I, f_3(E,I)=v_{EI}+f_4^*(I)$. O sea, $f_3(E,I)=88+235;\ f_3(E,I)=323$

En el estado

F: si $x_3=I, f_3(F,I)=v_{FI}+f_4^*(I)$. O sea, $f_3(F,I)=156+235; f_3(F,I)=391$

En el estado
G: si $x_3=J, f_3(G,J)=v_{GJ}+f^*_4(J)$. O sea, $f_3(G,J)=44+307; f_3(G,J)=351$

si $x_3=K, f_3(G,K)=v_{GK}+f^*_4(K)$. O sea, $f_3(G,K)=130+271; f_3(G,K)=401$

El mínimo valor total ***(351)*** cuando se está en el estado ***G*** indica elegir $x_3=J$.
En el estado
H: si $x_3=K, f_3(H,K)=v_{HK}+f^*_4(K)$. O sea, $f_3(H,K)=127+271; f_3(H,K)=398$

El resumen de todos estos cálculos se muestra en la Tabla 5.3.

		$f_3(s_3,x_3)=v_{sx_3}+f^*_4(x_3)$				
n=3	***s***	$x_3=I$	$x_3=J$	$x_3=K$	$f^*_3(s)$	x^*_3
	E	323	---	---	323	***I***
	F	391	---	---	391	***I***
	G	---	351	401	351	***J***
	H	---	---	398	398	***K***

Tabla 5.3. Resumen de cálculos para la etapa III

Etapa II. Al retroceder una nueva etapa en el proceso recurrente se tienen ahora tres estados posibles: las ciudades ***B, C,*** y ***D***. Las alternativas de decisión se evalúan como ya se vio.
En el estado
B: si $x_2=E, f_2(B,E)=v_{BE}+f^*_3(E)$. O sea $f_2(B,E)=81+323; f_2(B,E)=404$

si $x_2=F, f_2(B,F)=v_{BF}+f^*_3(F)$. O sea, $f_2(B,F)=169+391; f_2(B,F)=560$

En este caso conviene seleccionar $x_2=E$ ya que conlleva el menor camino a recorrer hasta el final de la ruta.
En el estado

C: si $x_2=F, f_2(C,F)=v_{CF}+f^*_3(F)$. O sea, $f_2(C,F)=125+391; f_2(C,F)=516$

si $x_2=G, f_2(C,G)=v_{CG}+f^*_3(G)$. O sea, $f_2(C,G)=165+351; f_2(C,G)=516$

Cuando se está en el estado ***C*** es indistinto adoptar cualquiera de las dos alternativas para asignar valor a la variable.
En el estado ***D***:
si x_2=G, f_2 (D,G)=v_{DG} +f_3^* (G).O sea, f_2 (D,G)=164+351; f_2 (D,G) =515

si x_2=H, f_2(D,H)=v_{DH} +f_3^* (H). O sea, f_2 (D,H)=152+398; f_2(D,H) = 550

La comparación de estos valores indica que la elección es x_2=***G***, ya que da el menor valor total cuando se está en el estado ***D***.
El resumen de todos estos cálculos se muestra en la Tabla 5.4.

n=2		$f_2(s_2,x_2) = v_{SX2} + f_3^*(x_2)$					
	s	x_2=E	x_2=F	x_2=G	x_2=H	$f_2^*(s)$	x_2^*
	B	404	560	---	---	404	***E***
	C	---	516	516	---	516	***F o G***
	D	---	---	515	550	515	***G***

Tabla5.4. Resumen de cálculos para la etapa III

Etapa I. Finalmente, la aplicación de la recurrencia en retroceso lleva a considerar la situación en el nodo inicial de la red, cuando el único estado lo constituye la ciudad ***A***.
En este caso, las comparaciones son sobre los siguientes valores:
Cuando
x_1 =B, f_1 (A,B)=v_{AB} +f_2^* (B). O sea, f_1 (A,B) =160+404; f_1 (A,B)=564

Cuando
x_1=C, f_1 (A,C)=v_{AC} +f_2^* (C). O sea, f_1(A,C) = 155 + 516; f_1 (A,C) = 671

Cuando
x_1 =D, f_1 (A,D)=v_{AD} +f_2^* (D). O sea, f_1 (A,D)= 159 + 515; f_1 (A,D) = 674
La Tabla 5.5., resume todos los cálculos realizados en esta etapa.

n=1		$f_1(s_1,x_1) = v_{SX1} + f_2^*(x_1)$				
	s	x_1=B	x_1=C	x_1=D	$f_1^*(s)$	x_1^*
	A	564	671	674	564	***B***

Tabla 5.5. Resumen de cálculos para la etapa I

Conclusión del ejemplo. Como de los tres valores calculados para el estado ***A*** se debe tomar el menor de ellos y se está en el principio de la red, simultáneamente se tiene la menor distancia que hay que recorrer en la ruta desde ***A*** hasta ***O***, ya que se ha obtenido $f^*_1(A)=564$. Ya se mencionó al principio del ejemplo, que se buscaría minimizar $f^*_1(A)$.

Como en todo modelo normativo, resolver el problema implica identificar el valor óptimo (consignado en el párrafo anterior), y especificar el valor de las variables de decisión en el óptimo.

En este caso, el repaso de las distintas tablas confeccionadas, recorridas en el sentido inverso a su presentación, describirá automáticamente la ruta óptima a seguir entre Santa Rosa y Tandil. Este proceso final de recolección de resultados se resume en la tabla 5.6.

Del análisis de dicha tabla se desprende que se parte de Santa Rosa *(A)*, se debe pasar a Pellegrini *(B)*, luego a Pehuajó *(E)*, posteriormente a Bolívar *(I)* y hacer la próxima escala en Olavarría *(L)* antes de arribar al destino final, Tandil *(O)*.

La tabla entrega información adicional, como identificar para cada punto intermedio la distancia que falta para completar el recorrido en forma óptima. También se verifica el cumplimiento del Teorema de Optimidad de Bellman, ya que todos los tramos de ruta seleccionados para la política óptima han sido, a su vez componentes de subpolíticas óptimas; se puede verificar que el tramo ***BF*** (descartado al evaluar el impacto que las decisiones de la etapa II tendrían sobre la función objetivo) no aparece en la política óptima pues la subpolítica óptima a ejecutar es ***BE.***

Tabla	Etapa n	Estado s	Decisión x_n^*	$f_n^*(s)$
5.5.	I	***A***	***B***	564
5.4.	II	***B***	***E***	404
5.3.	III	***E***	***I***	323
5.2.	IV	***I***	***L***	235
5.1.	V	***L***	***O***	123

Tabla 5.6. Recolección de resultados del ejemplo 5.1.

5.2.2.3. Otro caso: la distribución de esfuerzos.

Es bastante común encontrar en la literatura, y es adecuado a diversas situaciones reales, el denominado problema "de distribución de esfuerzos"; que también suele llamarse "del morral" o "de la mochila". Estas dos últimas frases son elocuentes en cuanto a la representación de lo que el modelo pretende conseguir: a partir de "un todo" disponible (la capacidad de la mochila o morral, o el total de un recurso o esfuerzo con que se cuenta) se procura distribuir el mismo entre diversos destinos alternativos que requieren fracciones de tamaño variado de aquel "todo" y, a su vez, realizan aportes de diversa importancia a un objetivo planteado que se busca optimizar.

Un problema de este tipo puede plantearse con las siguientes expresiones matemáticas:

Optimizar $Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$

sujeto a la condición $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b$

con todas las variables enteras y no negativas, y donde $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$ son funciones no lineales conocidas de una sola variable, y b es un número entero no negativo conocido.

Ejemplo 5. 2. Inversiones alternativas.

En este caso se supondrá que se tiene una suma máxima de $6.000 para invertir entre cuatro sucursales de una empresa que procura obtener el mayor rendimiento total de la inversión efectuada. Son diversos los rendimientos que se obtienen en cada sucursal y ante cada monto invertido. Los rendimientos (tanto por uno) para el período a planificar, para cada monto invertido (en miles de pesos) constan en la Tabla 5.7. Cabe consignar que, para simplificar, las variables en análisis adoptarán importes enteros de miles de pesos, pero también podría haberse tratado como un problema con variables continuas para lo cual también corresponde plantear de otra manera las ecuaciones de recurrencia.

Monto Invertido	Rendimientos			
	Sucursal 1	Sucursal 2	Sucursal 3	Sucursal 4
0	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,20	0,18	0,26	0,20
2	0,37	0,37	0,48	0,38
3	0,51	0,55	0,67	0,53
4	0,61	0,72	0,83	0,65
5	0,68	0,90	0,95	0,75
6	0,71	1,07	1,04	0,83

Tabla 5.7. Rendimeinto de inversiones según monto y sucursal

Formulación.

A efectos de poder aplicar la metodología ya vista es necesario identificar tanto las etapas como los estados que se pueden presentar en cada una de ellas.

Una forma aceptable de razonar es cuestionarse qué es lo que se pretende conseguir. Esta pregunta apunta directamente al objetivo del problema (recordar lo visto en Modelización en el Capítulo 1).

Aquí se busca **maximizar el rendimiento global** de la inversión, entonces las decisiones que se tomen deberán aportar a dicha maximización, y las variables que indiquen el nivel de inversión a realizar en cada sucursal serán las **variables de decisión**. Como cada variable de decisión corresponde a una etapa del problema de Programación Dinámica, esto define automáticamente dichas **etapas o fases: las distintas sucursales destinatarias de los fondos.**

A continuación queda por definir qué estados puede presentar cada etapa. Como en cada sucursal se invertirá una parte del total, el **monto restante que todavía no se invirtió será el estado** o situación que condicionará a la próxima decisión.

Si se aplica a este caso concreto la formulación genérica que se presentó anteriormente, se puede expresar que se busca:

Maximizar $Z = r_1(x_1) + r_2(x_2) + ... + r_N(x_N)$

sujeto a la condición $x_1 + x_2 + ... + x_N \leq b$

en la que $r_n(x_n)$ es una medida del desempeño (rendimiento) que se obtiene al asignar x_n unidades monetarias en la etapa (sucursal) n. Al inicio de tal etapa se estará en presencia del estado s_n que, como se dijo antes, representa el monto disponible para invertir en dicha etapa (sucursal).

A semejanza de lo aplicado en el ejemplo anterior, ahora la expresión de recurrencia será

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n = 0,1,...,s_n} f_n(s_n, x_n).$$

A su vez, la función de la que se toma el máximo (lado derecho) se desagrega en la siguiente:

$$f_n(s_n, x_n) = r_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)$$

O sea, el rendimiento que tienen los x_n pesos invertidos en esta etapa, más el mejor rendimiento -ya calculado en etapas evaluadas anteriormente- que tienen en conjunto los restantes pesos hasta completar el total que había disponible al iniciar la etapa.

Proceso de cálculo.

En este caso es indistinto el orden de la selección de una sucursal u otra para asignar los fondos, pero se continuará con la resolución mediante recurrencia en retroceso como en el otro ejemplo. Por eso se seleccionará una etapa (la última a recorrer) de manera que sea sencilla su resolución, y a medida que se avance en el proceso de cálculo se agregarán las etapas de a una hasta que en el último paso se incorpore la etapa (o sucursal) número 1.

De esta manera, no se sabrá en cada paso cuánto se invierte en cada sucursal, sino que simplemente quedará indicado provisoriamente con la variable que lo identifica. Al finalizar el recorrido de las etapas y volver sobre los pasos se determinará el nivel óptimo a asignar a cada variable de decisión de manera que la inversión global obtenga el máximo rendimiento.

Si bien es posible llevar tablas similares a las aplicadas en el ejemplo de la red de recorrido mínimo, aquí se utilizarán matrices triangulares para obtener los rendimientos de cada paso. De esta forma se facilita la exposición de los cálculos intermedios, si bien no es tan clara la observación de los valores óptimos resultantes.

De cualquier manera, la facilitación de los cálculos no debe implicar que se pierdan de vista los conceptos básicos en los cuales se apoya y que fueran debidamente explicados al mencionar las características de cualquier problema de Programación Dinámica.

Etapa IV. Como en el otro ejemplo ya visto, hay una solución trivial al considerar una sola sucursal (la 4) en la cual invertir los fondos disponibles. Los resultados correspondientes a cada opción se obtienen en forma directa de la Tabla 5.7., y la Tabla 5.8. muestra su resumen.

s_4	$f_4^*(s_4)$	x_4^*
0	0,00	0
1	0,20	1
2	0,38	2
3	0,53	3
4	0,65	4
5	0,75	5
6	0,83	6

Tabla 5.8. Cálculos para la sucursal 4

Etapa III. A partir de esta etapa se aplicará la matriz mencionada antes, para combinar el rendimiento inmediato por invertir en la sucursal de esta etapa (la 3) junto con lo mejor de la etapa posterior ya vista ***(f_4^* (s_4))***. Estos valores se transcriben para encabezar las columnas tercera a novena de la tabla 5.9.

Esa tabla también contiene -en la segunda columna- los rendimientos que tendrían, respectivamente, las inversiones desde \$0 a \$6000 en la sucursal 3 sin tener en cuenta cuánto se decide invertir en las otras sucursales.

El resto de los valores de la tabla forman una matriz triangular en la que cada intersección de fila y columna se completa con la suma de los rendimientos encontrados en la columna y fila respectiva, siempre y cuando la suma de los montos invertidos no supere al máximo de 6 (mil). Así, el valor 0,91 de la matriz triangular representa el rendimiento que tendrían \$1000 invertidos en la sucursal 3 (indicado en el extremo izquierdo de la fila) y \$ 4000 invertidos en la sucursal 4 (según la cabecera de la columna).

O sea: para saber a qué estado corresponde cada rendimiento se parte del tal valor y se buscan en fila y columna los valores de las variables x_3 y x_4, que en el caso analizado provienen de una inversión total de 1+4=5 (mil pesos). Todos los rendimientos de un determinado estado quedan sobre la misma diagonal que asciende de izquierda a derecha.

Esta forma de obtener los valores para completar la matriz triangular refleja el proceso de la optimización por tramos, característico de la Programación Dinámica.

El recuadro sobre el sector derecho muestra las subpolíticas óptimas. Indica cuáles son las mejores opciones (que incluye su asociación con los rendimientos futuros de la sucursal 4) cuando en esta etapa se enfrentan los estados (dinero disponible) de 0 a 6 (en miles de pesos). Provienen de comparar todos los valores obtenidos en una diagonal de la matriz (ascendente de izquierda a derecha) y elegir de ellos el mejor; por ejemplo, ***0,48*** tomado para $s_3=2$ es el mayor valor de entre ***0,48, 0,46*** y ***0,38***, que corresponden a los pares $(x_3=2; x_4=0)$, $(x_3=1; x_4=1)$ y $(x_3=0, x_4=2)$, respectivamente.

Una vez obtenido ese mejor valor en la matriz, la búsqueda hacia la izquierda de la fila que lo contiene lleva a identificar el valor de la variable de decisión ($x_3=2$ en este caso). Este valor se muestra en la última columna del cuadro de la derecha.

		Miles de pesos invertidos en sucursal 4 (x_4)						
		0	1	2	3	4	5	6
x_3	Rendim.	**0,00**	**0,20**	**0,38**	**0,53**	**0,65**	**0,75**	**0,83**
0	**0,00**	0,00	0,20	0,38	0,53	0,65	0,75	0,83
1	**0,26**	0,26	0,46	0,64	0,79	0,91	1,01	
2	**0,48**	0,48	0,68	0,86	1,01	1,13		
3	**0,67**	0,67	0,87	1,05	1,20			
4	**0,83**	0,83	1,03	1,21				
5	**0,95**	0,95	1,15					
6	**1,04**	1,04						

Cuadro resumen		
s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0,00	0
1	0,26	1
2	0,48	2
3	0,68	2
4	0,87	3
5	1,05	3
6	1,21	4

Tabla 5.9. Cálculos para la inversión en sucursal 3

Etapa II. Para tomar decisión en esta etapa los resultados inmediatos por invertir en la sucursal 2 se deben considerar en conjunto con lo mejor de las etapas posteriores ya vistas *(f_3^* (s_3))*. Estos últimos valores se obtienen de la columna central del Cuadro Resumen de la tabla 5.9.; para los primeros se debe apelar nuevamente a la Tabla 5.7.

En la tabla 5.10. se conforma una nueva matriz triangular, para los cálculos correspondientes a la inversión en la sucursal 2 y las que se harían en las sucursales 3 y 4 en forma conjunta.

Los valores insertados en la matriz y el cuadro respectivo se interpretan según lo ya visto en la etapa III, con la debida adecuación al nuevo estado y valores de las funciones intervinientes.

		Miles de pesos invertidos en sucursales 4 y 3 ($x_4 + x_3$)						
		0	1	2	3	4	5	6
x_2	Rendim.	**0,00**	**0,26**	**0,48**	**0,68**	**0,87**	**1,05**	**1,21**
0	**0,00**	0,00	0,26	0,48	0,68	0,87	1,05	1,21
1	**0,18**	0,18	0,44	0,66	0,86	1,05	1,23	
2	**0,37**	0,37	0,63	0,85	1,05	1,24		
3	**0,55**	0,55	0,81	1,03	1,23			
4	**0,72**	0,72	0,98	1,20				
5	**0,90**	0,90	1,16					
6	**1,07**	1,07						

Cuadro resumen		
s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0,00	0
1	0,26	0
2	0,48	0
3	0,68	0
4	0,87	0
5	1,05	0, 1 o 2
6	1,24	2

Tabla 5.10. Cálculos para la inversión en sucursal 2

Etapa I. En esta etapa se concluye con la asignación de los fondos disponibles, cuando se han recorrido las cuatro sucursales (etapas) del problema.

En la tabla 5.11. se inserta la matriz triangular correspondiente, así como el cuadro resumen de valores óptimos para cada estado.

Obsérvese que se han resuelto los cálculos para cada uno de los estados posibles de la variable s_1. Es así porque en el planteo del problema está consignada una restricción $(x_1 + \dots + x_n \leq b)$ que prevé que se puede invertir una cantidad menor que el total disponible. Si la condición fuera que deben invertirse los fondos en su totalidad, en esta etapa el único estado posible sería $s_1 = 6$, y en consecuencia deberían completarse únicamente los valores que aparecen en la última diagonal de la matriz.

		Miles de pesos invertidos en sucursales 4, 3 y 2 $(x_4 + x_3 + x_2)$						
		0	1	2	3	4	5	6
x^1	Rendim.	**0,00**	**0,26**	**0,48**	**0,68**	**0,87**	**1,05**	**1,24**
0	**0,00**	0,00	0,26	0,48	0,68	0,87	1,05	1,24
1	**0,20**	0,20	0,46	0,68	0,88	1,07	1,25	
2	**0,37**	0,37	0,63	0,85	1,05	1,24		
3	**0,51**	0,51	0,77	0,99	1,19			
4	**0,61**	0,61	0,87	1,09				
5	**0,68**	0,68	0,94					
6	**0,71**	0,71						

Cuadro resumen		
s_1	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
0	0,00	0
1	0,26	0
2	0,48	0
3	0,68	0 o 1
4	0,88	1
5	1,07	1
6	1,25	1

Tabla 5.11. Cálculos para la inversión en sucursal 1

Conclusiones. Como ésta es la etapa que cierra el proceso, en el cuadro resumen el valor de x^*_1 hallado a la derecha del mejor valor acumulado indica cuál es la inversión a hacer en la sucursal 1 para que se maximice el valor de la función objetivo. Además, al recorrer el camino hacia atrás se encuentran los montos a colocar en cada una de las otras sucursales.

Así, se tiene que $f^*_1(s_1) = 1{,}25$ para $x^*_1 = 1$ y $s_1 = 6$. Si se busca 1,25 en la matriz se encuentra que está en la columna encabezada por $x_4 + x_3 + x_2 = 5$, que es la cantidad de fondos que quedan disponibles para las otras sucursales y cuyo $f^*_2(s_2) = 1{,}05$.

Ahora se sabe que $s_2 = 5$ y $f^*_2(s_2) = 1{,}05$. En el cuadro resumen de la Tabla 5.10. se obtiene la referencia que indica que en esa etapa se asigna $x_2 = 0$ o $x_2 = 1$ o $x_2 = 2$.

En la matriz, 1,05 está en la columna encabezada por $x_4 + x_3 = 5$, que es la cantidad de fondos que quedan disponibles para las otras sucursales y cuyo $f^*_3(s_3) = 1{,}05$ cuando $x_2 = 0$.

También 1,05 está, en la matriz, en la columna encabezada por $x_4 + x_3 = 4$, que es la cantidad de fondos que quedan disponibles para las otras sucursales cuando $x_2 = 1$ y cuyo $f^*_3(s_3) = 0{,}87$.

Finalmente, 1,05 también corresponde a $x_4 + x_3 = 3$, que es la cantidad de fondos que quedan disponibles para las otras sucursales cuando $x_2 = 2$ y cuyo $f^*_3(s_3) = 0{,}68$.

Lo descripto en los tres párrafos anteriores indica que existen soluciones alternativas; es decir que, ante distinta distribución de la inversión conducen a igual rendimiento global. A continuación se analiza cada una de ellas.

Se conoce que $s_3=5$ y $f^*_3(s_3)= 1,05$. En el cuadro resumen de la Tabla 5.9. se obtiene la referencia que indica que en esa etapa se asigna $x_3 = 3$. Al buscar 1,05 en la matriz se encuentra que está en la columna encabezada por $x_4 = 2$, que es la cantidad de fondos que deben invertirse en la sucursal 4. Esta última cantidad podría salir también del cálculo $s_3 - x_3 = 2$, ya que está terminado el proceso de recolección de datos en avance hasta la última etapa.

Ahora se sabe que $s_3=4$ y $f^*_3(s_3)= 0,87$. En el cuadro resumen de la Tabla 5.9. se obtiene la referencia que indica que en esa etapa se asigna $x_3 = 3$. Si se calcula $s_3 - x_3 = 1$ se obtiene $x_4 = 1$.

Para la tercera alternativa, dado que $s_3=3$ y $f^*_3(s_3)= 0,68$, en el cuadro resumen de la Tabla 5.9. se obtiene la referencia que indica que en esa etapa se asigna $x_3 = 2$. Nuevamente, del cálculo $s_3 - x_3 = 1$ se obtiene $x_4 = 1$.

En la Tabla 5.12. se resumen todas las alternativas, las decisiones y sus consecuencias.

Sucursal	Invertir $ (miles)	Rendimiento por $1 invertido	Invertir $ (miles)	Rendimiento por $1 invertido	Invertir $ (miles)	Rendimiento por $1 invertido
1	1	0,20	1	0,20	1	0,20
2	0	0,00	1	0,18	2	0,37
3	3	0,67	3	0,67	2	0,48
4	2	0,38	1	0,20	1	0,20
Total	6	1,25	6	1,25	6	1,25

Tabla 5.12. Resumen de decisiones para todas las soluciones alternativasdel ejemplo

5.2.2.4. Tercer caso: la planificación de reemplazos y mantenimientos de equipos

La Programación Dinámica es aplicable para establecer una política de gestión de equipos sujetos a utilización, desgaste, tareas de mantenimiento, etc., en función de su comportamiento futuro esperado según su antigüedad, modalidad de uso, etc.

Ejemplo 5. 3. Decisiones de conservación o reemplazo

Para el caso hipotético a resolver a continuación se supondrá que un competidor que pretende salir del mercado le ha ofrecido en venta a *Quantum Rodados* - empresa dedicada al alquiler de cuatriciclos en un área recreativa de la ciudad- un lote de tales vehículos. Los mismos cuentan en la actualidad con dos años de antigüedad, y la decisión se tomará en base a los costos totales aplicables a cada móvil en concepto de operación, mantenimiento, lucro cesante por rotura, costo de renovación, y valor de recupero. La experiencia que la empresa tiene en el rubro le permite construir la siguiente tabla donde constan los conceptos citados, para cada cuatriciclo, a través de cada año de operación, Se sabe que en cada año está la opción de mantener o renovar el cuatriciclo, excepto al final del cuarto año en que es obligatoria su renovación. La planificación abarca un período de cinco años, pasados los cuales se procederá a la venta de todo el parque de vehículos cualquiera sea el estado en que se encuentren.

Años de operación	**1**	**2**	**3**	**4**	
Costos operación y mant.	1500	1700	1900	1750	
Lucro cesante por rotura	250	275	350	300	
Valor residual al final del año	3200	2300	1500	500	
Costo de adquisición equipo nuevo					**5000**

Tabla 5.13. Datos para el planteo del ejemplo5.3

Formulación.

Tal como se hizo en los ejemplos anteriores, el primer paso consiste en identificar tanto las etapas como los estados que se pueden presentar en cada una de ellas.

El objetivo del problema busca **minimizar el costo total** de cada cuatriciclo. Las decisiones a tomar según tal objetivo requieren **variables de decisión** (una por cada etapa del problema de Programación Dinámica) que indiquen qué hacer en cada **etapa (al final de cada año)**: mantener o renovar el vehículo, dado que tales decisiones implican incurrir en tales costos.

A continuación se definen los estados que pueden presentarse en cada etapa. Esto está relacionado con las variables definidas y ayuda a refinar su especificación, ya que al final de cada año los vehículos agregan un año más de operación y con ello varían los costos involucrados.

Concretamente se busca:

Minimizar $Z = c_1(x_1) + c_2(x_2) + ... + c_N(x_N)$

expresión en la que $c_n(x_n)$ es una medida del desempeño (costo incurrido) al adoptar para x_n el valor "Reemplazar" o "Conservar" en la etapa $\boldsymbol{n}$. Al inicio de tal etapa se estará en presencia del estado s_n (cuatriciclo con una cierta antigüedad).

En este caso la expresión de recurrencia será

$$f_n^*(s_n) = \min_{x_n = 0,1,\ldots,s_n} f_n(s_n, x_n)$$

A su vez, la función de la que se toma el mínimo (lado derecho) se compone así:

$$f_n(s_n, x_n) = c_n(x_n) + f_{n+1}^*(x_n)$$

O sea, el costo (efecto inmediato) de la decisión x_n en esta etapa, más el mejor costo -ya calculado en etapas evaluadas anteriormente- que tienen en conjunto las restantes decisiones.

Para mostrar la venta obligatoria de los cuatriciclos al final del quinquenio se incorpora una etapa adicional a las necesarias para representar cada año del horizonte de planeamiento.

Representación como red.

Al igual que en muchos otros problemas, la representación gráfica del mismo puede resultar de ayuda para su resolución. Aquí es adecuada una red como la de la **Figura 5.3.**. Los valores sobre los arcos representan el costo total por pasar de un estado a otro, y en los nodos se codifica el estado del cuatriciclo: primer carácter, antigüedad del vehículo; A, "años"; P, "período"; último carácter, número de período al final de la etapa.

Así, 2AP0 indica que el ciclomotor tiene "**2 A**ños, en el **P**eríodo **cero**", y 3AP1 que tiene "**3 A**ños en el **P**eríodo **1**". Como tales estados constituyen una secuencia lógica en la vida del vehículo se los vinculó con un arco con valor 2250, que surge de sumar los $1900 de operación y mantenimiento para llegar a los 3 años de operación y los $350 estimados como lucro cesante en tales circunstancias.

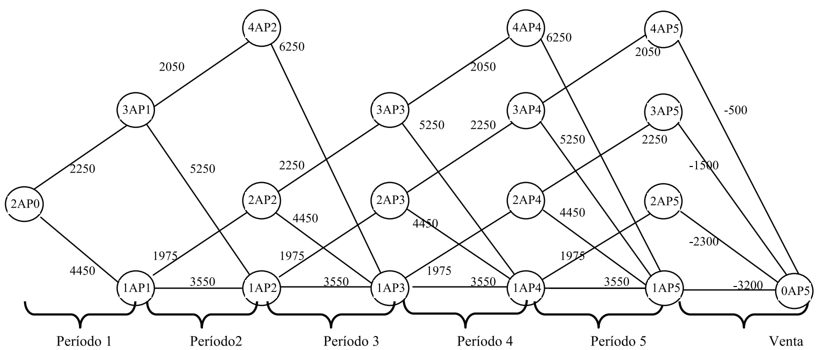


Figura 5.3. Representación como red del ejemplo 5.3

Proceso de cálculo.

A continuación se presentan en forma tabular cada uno de los pasos seguidos para la resolución del ejemplo, si bien con menor cantidad de comentarios que en los casos anteriores, ya que el razonamiento básico es similar en todos ellos y solamente varían los matices propios de la situación a resolver.

Las tablas muestran en las filas los orígenes (o estados iniciales de la etapa) y en las columnas los posibles destinos (o estados finales) según la decisión tomada.

Como siempre, comienza el análisis por la que, visualmente, es la última etapa o fase; en este caso, la Venta cualquiera sea el estado de los equipos, posterior al período a planificar.

Etapa Venta (5 bis). Tal como ya se ha comentado, aquí la decisión para pasar al estado s_{n+1} es trivial y significa quedarse con equipos de cero años al final del Período 5 (estado 0AP5). Desde cada uno de los estados iniciales posibles (s_n) se trazan las mejores opciones (x^*), identificadas con el menor costo posible; en realidad, los valores resultantes son negativos pues reflejan el neto entre costos y valor de recupero por la venta del bien usado, y este último es mayor que el primero.

	s_{n+1}	**0AP5**		**0AP5**				
s_n	$f^*_{n+1}(x_n)$	0		$v_{s,x} + f^*_{n+1}$		**Mejor**	x^*	Alt
4AP5	$v_{sn,x}$	-500		*-500*		**-500**	0AP5	
3AP5	$v_{sn,x}$	-1500		*-1500*		**-1500**	0AP5	
2AP5	$v_{sn,x}$	-2300		*-2300*		**-2300**	0AP5	
1AP5	$v_{sn,x}$	-3200		*-3200*		**-3200**	0AP5	

Tabla 5.14. Resolución de última etapa del ejemplo 5.3.

Etapa Período 5. En este caso se tienen cuatro estados iniciales posibles desde los cuales arribar a los cuatro estados finales (iniciales de la etapa anterior). Algunas conexiones no son válidas -como por ejemplo pasar de **4AP4 a 4AP5**, lo cual significaría tener el equipo con igual antigüedad (4) pero un año más tarde- por eso se las indica con costo *M* extremadamente indeseable para el problema de manera que no queden excluidas de la solución.

	s_{n+1}	**4AP5**	**3AP5**	**2AP5**	**1AP5**	**4AP5**	**3AP5**	**2AP5**	**1AP5**			
s_n	$f^*_{n+1}(x_n)$	-500	-1500	-2300	-3200	$v_{s,x} + f^*_{n+1}$	$v_{s,x} + f^*_{n+1}$	$v_{s,x} + f^*_{n+1}$	$v_{s,x} + f^*_{n+1}$	**Mejor**	x^*	Alt
4AP4	$v_{sn,x}$	M	M	M	6250	*M*	*M*	*M*	*3050*	**3050**	1AP5	
3AP4	$v_{sn,x}$	2050	M	M	5250	*1550*	*M*	*M*	*2050*	**1550**	4AP5	
2AP4	$v_{sn,x}$	M	2250	M	4450	*M*	*750*	*M*	*1250*	**750**	3AP5	
1AP4	$v_{sn,x}$	M	M	1975	3550	*M*	*M*	*-325*	*350*	**-325**	2AP5	

Tabla 5.15. Resolución de la etapa 5 del ejemplo 5.3.

Etapa Período 4. Al igual que en la etapa anterior se tienen 4 decisiones posibles, aunque en este caso únicamente a partir de tres estados iniciales.

	s_{n+1}	4AP4	3AP4	2AP4	1AP4	4AP4	3AP4	2AP4	1AP4			
s_n	$f^*_{n+1}(x_n)$	3050	1550	750	-325	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	**Mejor**	x^*	Alt
3AP3	$v_{sn,x}$	2050	M	M	5250	*5100*	*M*	*M*	*4925*	**4925**	1AP4	
2AP3	$v_{sn,x}$	M	2250	M	4450	*M*	*3800*	*M*	*4125*	**3800**	3AP4	
1AP3	$v_{sn,x}$	M	M	1975	3550	*M*	*M*	*2725*	*3225*	**2725**	2AP4	

Tabla 5.16. Resolución de la etapa 4 del ejemplo 5.3

Etapa Período 3. En esta fase las decisiones se han reducido a tres opciones posibles, también a partir de tres estados iniciales. La tabla muestra una particularidad: para el estado inicial **2AP2** ambas decisiones posibles arrojan igual costo acumulado (indicado con un asterisco en la columna "Alt")

	s_{n+1}	3AP3	2AP3	1AP3		3AP3	2AP3	1AP3				
s_n	$f^*_{n+1}(x_n)$	4925	3800	2725		$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$		**Mejor**	x^*	Alt
4AP2	$v_{sn,x}$	M	M	6250		*M*	*M*	*8975*		**8975**	1AP3	
2AP2	$v_{sn,x}$	2250	M	4450		*7175*	*M*	*7175*		**7175**	3AP3	*
1AP2	$v_{sn,x}$	M	1975	3550		*M*	*5775*	*6275*		**5775**	2AP3	

Tabla 5.17. Resolución de la etapa 3 del ejemplo 5.3.

Etapa Período 2. A medida que se acerca la situación inicial del problema se reduce la cantidad de estados iniciales, que en este caso son sólo 2, uno de los cuales ofrece solución alternativa en sus decisiones posibles.

	s_{n+1}	4AP2	2AP2	1AP2		4AP2	2AP2	1AP2				
s_n	$f^*_{n+1}(x_n)$	8975	7175	5775		$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$		**Mejor**	x^*	Alt
3AP1	$v_{sn,x}$	2050	M	5250		*11025*	*M*	*11025*		**11025**	4AP2	*
1AP1	$v_{sn,x}$	M	1975	3550		*M*	*9150*	*9325*		**9150**	2AP2	

Tabla 5.18. Resolución de la etapa 2 del ejemplo 5.3.

Etapa Período 1. Corresponde a la definición de cuál será la decisión inicial en este problema.

	s_{n+1}	3AP1	1AP1		3AP1	1AP1				
s_n	$f^*_{n+1}(x_n)$	11025	9150		$v_{s,x}+f^*_{n+1}$	$v_{s,x}+f^*_{n+1}$		**Mejor**	x^*	Alt
2AP0	$v_{sn,x}$	2250	4450		*13275*	*13600*		**13275**	3AP1	

Tabla 5.19. Resolución de la etapa 1 del ejemplo 5.3.

Ahora se debe construir toda la ruta de subpolíticas óptimas desde la etapa 1 hasta la última, de manera de proponer el curso de acción que minimice el costo total de la política de gestión de los cuatriciclos de dos años de antigüedad que le ofrecen en venta a *Quantum Rodados*.

En el gráfico de la **Figura 5.4**., se muestra este recorrido con un trazo más fuerte.

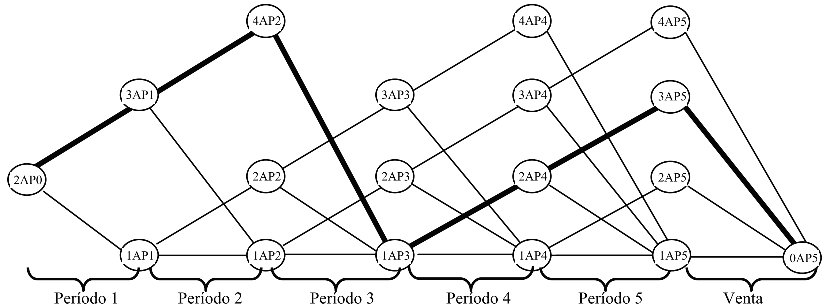


Figura 5.4. Política óptima para el ejemplo 5.3.

La solución, que permite verificar el cumplimiento del Teorema de Optimidad, indica que el Óptimo costo total es: 13.275, mediante aplicación de la siguiente política.

3AP1	**Conservar en la etapa número 1**
4AP2	**Conservar en la etapa número 2**
1AP3	**Reemplazar en la etapa número 3**
2AP4	**Conservar en la etapa número 4**
3AP5	**Conservar en la etapa número 5**
0AP5	**Vender en la etapa número 5 bis (Venta)**

5.2.3. Caso probabilístico

5.2.3.1. Situaciones en las que es aplicable la Programación Dinámica Estocástica

Los casos que se pueden tipificar de esta manera participan de todas las características detalladas al principio del capítulo. Por lo tanto, permiten modelar tales situaciones mediante la aplicación de Programación Dinámica. Como característica adicional el rendimiento de al menos una de las decisiones del proceso presenta resultados inciertos, ya sea porque:

a) los estados finales posibles son inciertos y pueden obtenerse mediante la aplicación de alguna distribución de probabilidades que se supone conocida; y/o

b) lo incierto es el rendimiento asociado a cada estado posible.

Obviamente, de lo mencionado en el párrafo anterior se desprende que no se estudiarán en esta oportunidad aquellas situaciones en las cuales se cuenta con información cierta y en donde es posible anticipar los estados venideros y las consecuencias de las decisiones (caso determinístico ya visto), ni tampoco los que se desenvuelven en incertidumbre total (que se analizan específicamente bajo el título de "Teoría de las Decisiones").

En el caso bajo análisis, en cada etapa se parte de un valor asignado a la variable de estado y, a diferencia de lo que caracterizaba a la Programación Dinámica Determinística, la transición hacia un nuevo estado no solamente depende de la decisión tomada, sino también de un acontecimiento sobre el que no puede ejercerse una acción completa: el azar.

En función de tales características existen procesos en los que el azar sobreviene una vez tomada la decisión (que se denominan de Decisión-Azar) como puede ocurrir, por ejemplo, cuando se encara un proyecto de inversión. Puede darse el caso que a partir de su ejecución se llegue a diferentes situaciones según las reacciones que haya de los competidores y potenciales clientes, o por cambios en la legislación o comportamientos de proveedores, cuyas consecuencias, si bien pudieron ser previstas con anticipación, no lograron evaluarse con precisión.

También es posible que en cada etapa del programa dinámico ocurran simultáneamente las decisiones y los eventos aleatorios. Este proceso se denomina de Azar-Decisión, y es aplicable a los modelos de gestión de inventarios en que las decisiones se toman en períodos fijos con la finalidad de que tal gestión sea óptima. En estos casos simultáneamente con la decisión de reponer existencias se producen disminuciones de las mismas en base a comportamientos no previstos con exactitud por depender de la forma en que los clientes requieren tales inventarios, o mermas por pérdidas y roturas de stock almacenado.

5.2.3.2. Representación del modelo y adecuación del Teorema de Optimidad

Para la resolución de los programas dinámicos aleatorios se pueden utilizar tablas como las ya vistas en el caso determinista, o a redes en las cuales a partir de un número finito de estados posibles (representados en nodos de la red) la toma de decisiones y la influencia de factores de azar (graficados en los arcos) lleva a nuevos estados. La distinción con lo visto en el caso determinístico estará en que cuando los elementos a graficar estén vinculados con aspectos que puede dominar el decisor se insertarán nodos cuadrados y arcos con líneas discontinuas, mientras que aquellos con características aleatorias contendrán nodos circulares y arcos con líneas llenas.

Si bien los conceptos enunciados por Bellman -y ya desarrollados en este texto- tienen plena vigencia en Programación Dinámica Estocástica, se seguirá lo propuesto por Kaufmann (1967): en este caso se reemplazará el término "política" por "estrategia" habida cuenta que, al no conocerse con certeza el comportamiento futuro del sistema bajo análisis, no es posible establecer con exactitud el conjunto de opciones disponibles ni el estado de la Naturaleza en que será posible tomar la decisión.

Por lo expuesto conviene reexpresar el Teorema de Optimidad en los siguientes términos: **Una estrategia óptima sólo puede estar formada por subestrategias óptimas.** Al igual que en el caso determinístico, cada decisión futura se adopta en forma óptima sin necesidad de apelar a decisiones ya tomadas: no interesan las decisiones específicas ya tomadas en etapas anteriores sino un resumen de los rendimientos obtenidos en ellas.

Los rendimientos mencionados en el párrafo anterior, por provenir de expresiones en las cuales participan elementos aleatorios, se evaluarán en función de **Esperanzas Matemáticas**. En este caso el procedimiento de cálculo es similar al aplicado en Teoría de las Decisiones y, como tal, **el caso estocástico de la Programación Dinámica obliga a su resolución mediante recurrencia en retroceso** (a diferencia de la situación determinística, que también permite la recurrencia en avance).

Las situaciones que se modelarán aquí comienzan con un estado inicial de desconocimiento sobre cuál de las situaciones se presentará al inicio, y las conclusiones recomendarán distintos cursos de acción (estrategias) para cada una de las posibles situaciones iniciales. Esto marca una diferencia con los árboles de decisión, donde en primer lugar se consignaba la selección de alternativas y las ramas subsiguientes consideraban tanto los sucesos aleatorios como las sucesivas decisiones para -al final de las evaluaciones- recomendar la selección de una estrategia óptima para la situación problemática.

Con nomenclatura similar a la ya aplicada se tiene que: en la etapa n se puede adoptar la decisión x_n a partir del estado sn para pasar a cualquier estado i $(i= 1, 2, ...,S)$ que es posible encontrar en la etapa $n+1$. Cada una de las decisiones que pueden tomarse en la etapa n contribuye a la función de rendimiento con un valor v_i. Por ser un caso aleatorio el cambio hacia cada uno de los S estados posibles tiene una probabilidad p_i de ocurrencia.

Una vez más cabe consignar que la fórmula recurrente que permite resolver el problema dependerá de la forma global que tenga la función objetivo planteada. En general, la siguiente es una forma válida de plantearla, si se considera que se busca el óptimo (máximo o mínimo) de la esperanza de los rendimientos inmediatos de todas las etapas desde la actual hasta la última:

$$f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^{S} p_i [v_i + f^*_{n+1}(i)] \quad \text{, en la cual } f^*_{n+1}(i) = \underset{x_{n+1}}{\text{ópt}}\, f_{n+1}(i, x_{n+1})$$

Ejemplo 5. 4. Decisiones de estrategias de mercado

Se analizarán los posibles cursos de acción de una hipotética empresa que se dedica a servicios de cadetería en la ciudad de Santa Rosa. En función de decisiones ya tomadas con anterioridad la empresa tiene un desarrollo en marcha, aunque desconoce cuál será su posición en el mercado dentro de algunos meses. Por lo tanto considera tres escenarios posibles de inicio para su plan bienal, que corresponden a las siguientes situaciones:

Dominante: con claro liderazgo en el rubro, reúne al 30% de los consumidores de un mercado bastante atomizado. (A los efectos prácticos se la denominará "Situación ***A***")

Expectante: sin llegar a dominar el mercado, capta una buena parte del mismo y escolta al líder. En este caso, atiende al 25% de los potenciales clientes de la ciudad. (Situación ***B***)

Relegada: la gestión no ha podido situar en posición relevante a la empresa y por lo tanto ha sido superada por una buena cantidad de competidores. Su participación en el mercado es de apenas el 10% del total. (Situación ***C***)

Cada una de estas situaciones eventuales merece un análisis diferente en cuanto a las posibles acciones futuras, cuyas consecuencias tendrían efecto durante el primer año del plan. Así,

1. Si se diera la situación ***A*** la empresa no está dispuesta a resignar su liderazgo y por tal motivo reinvertiría la totalidad de fondos disponibles para continuar en dicha posición, además de comprometer a los integrantes de la organización en un agresivo plan de mejora de la calidad de los servicios que presta.

2. Si ocurriera que la empresa iniciara este proceso desde la

situación ***B*** las alternativas se reparten entre intentar alcanzar el liderazgo con un plan similar al considerado para la situación ***A*** o tratar de mantenerse en la posición de escolta mediante un plan menos exigente.

3. Finalmente, si se partiera desde la situación ***C*** los recursos con que contaría la empresa no serían muy numerosos. Por tal motivo, puede intentar mantenerse con la cuota de mercado que ha captado. Una alternativa es procurar financiación externa y emprender un plan de expansión y mejora de sus servicios con la intención de acceder a una posición expectante del tipo ***B***.

Si se buscara que luego de un año la posición fuera Dominante (como en los casos de los incisos 1. y 2.) se podría llegar a ***A'*** , lo cual permitiría obtener un 11% del total del mercado, adicional a lo que se tiene. Sin embargo -entre otros factores- cabe la posibilidad de que la competencia encare también planes expansivos. Los estudios sobre el eventual comportamiento de la demanda futura indican que hay una probabilidad 0,60 de que se llegue al porcentaje citado, y probabilidad 0,40 de que el incremento en la cantidad de clientes sea del 1% y por consiguiente la empresa ocupe la situación ***B'*** (Expectante) en el inicio de la próxima etapa del plan, un año más tarde.

Por su parte, si se busca llegar a una posición Expectante, por factores externos puede llegar a aumentar la participación en un 13% del mercado con una probabilidad 0,35 y ubicarse en ***A'***, o crecer sólo un 5% (cuya probabilidad de ocurrencia es 0,55) y llegar a ***B'*** sin haber cambiado de situación; o - peor aún- se estima, con una probabilidad 0,10, que puede perderse el 8% de los clientes del mercado y quedar la empresa en la situación ***C'*** en una posición relegada con respecto a la competencia.

Si la empresa se propusiera mantener su cuota de mercado en posición Relegada como en el caso del inciso 3. y, por factores no manejables internamente en la toma de la decisión, el plan es demasiado exitoso (para lo cual se estima una probabilidad 0,80) se podría ganar un 12% del mercado, aunque si el mismo fallara por causas adversas de similar origen el incremento de la clientela sería nulo, y existe una probabilidad 0,20 de que esto ocurra.

Las mismas situaciones ***A, B*** y ***C*** pueden constituir los estados que se presenten dentro de un año. En previsión de tales hechos se hacen estimaciones similares en cuanto a comportamiento de la empresa y de los factores exógenos que la condicionarían. Para abreviar en la presentación del caso tales estimaciones han sido representadas directamente sobre la red de la Figura 5.5., donde sobre cada arco se consigna el impacto que se tendría sobre el mercado (en porcentaje adicional del total de clientes) y -separada por una barra inclinada- la probabilidad de que tal hecho ocurra.

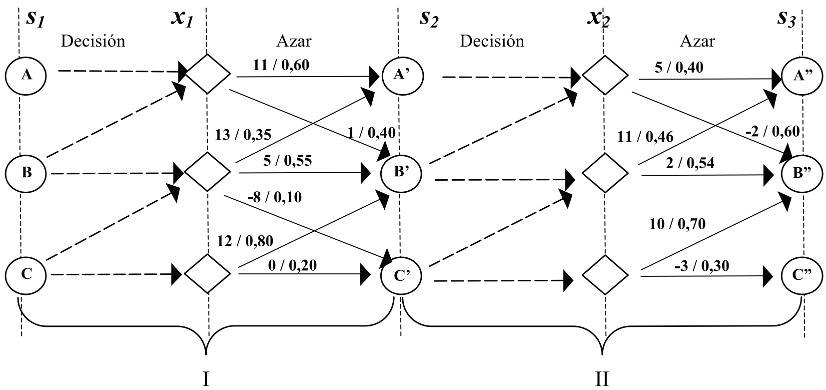


Figura 5.5. Representación del Ejemplo 5. 4. como red.

Formulación.

Para adecuar el planteo simbólico que se presentó más arriba, en este caso debe tenerse en cuenta que se dispone de dos etapas. Entonces los valores posibles de $\boldsymbol{n}$ serán ***1*** y ***2***, mientras que las decisiones a adoptar se simbolizarán con $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ respectivamente, para pasar del estado $\boldsymbol{s_1}$ al $\boldsymbol{s_2}$ y del $\boldsymbol{s_2}$ al $\boldsymbol{s_3}$. Como en cada etapa o fase se tienen tres posibles situaciones para la empresa se las simbolizará con ***A, B*** o ***C***, acompañadas del superíndice prima o segunda según corresponda a cada etapa. Las participaciones adicionales de mercado que pueden obtenerse como consecuencia de cada transición tomarán un valor $\boldsymbol{v_i}$ distinto según cuál sea la decisión. En cuanto a las probabilidades $\boldsymbol{p_i}$ de ocurrencia de tales rendimientos, también están volcadas en la red tal como ya se ha descripto.

Resolución.

Etapa II. Se reitera que en este caso **se debe** resolver mediante recurrencia en retroceso. Por esto en primer lugar se calcula la esperanza matemática correspondiente a cada una de las situaciones de inicio de la fase II, en función de la decisión a tomar y de las probabilidades de ocurrencia de los respectivos estados finales para dicha etapa terminal.

1. Situación inicial *A'*. Al igual que en el caso determinístico, la solución es bastante trivial, ya que el valor que se obtiene para la fórmula de recurrencia es el mismo que corresponde en forma directa como rendimiento inmediato para la decisión que se tome en esta etapa. En este caso para la decisión el único destino posible (valores para la variable de estado en el momento final del proceso) es *A": $s_2 = A', x_2 = A''$*. Lo diferente aquí es que, por ser un caso aleatorio, se puede terminar en dos puntos distintos de la red al tomar una decisión; por eso corresponde calcular la esperanza matemática de los rendimientos correspondientes a tales estados finales, en función de su probabilidad de ocurrencia.

Para el caso, la fórmula ya presentada,

$$f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^{S} p_i [v_i + f^*_{n+1}(i)]$$,obtiene tal valor

mediante: $f_2(A', A'') = p_{A''} \cdot v_{A''} + p_{B''} \cdot v_{B''}$. Que al reemplazarse adecuadamente los valores correspondientes, arroja: $f_2(A', A'') = 0,40 . 5 + 0,60 . (-2)$. De donde el valor esperado para el porcentaje de clientes ganados cuando se decide obtener una posición dominante en el mercado y ya se está en tal posición al iniciar el segundo año del proyecto es $f_2(A', A'') = 0,80$. Este valor es $f^*_2(A') = \underset{x_2}{ópt} f_2(A', x_2)$.

O sea, $f^*_2(A') = 0,80$.

2) Situación inicial *B'*. Se procede de manera similar a la explicada, salvo que en este caso existen dos alternativas de elección, por lo que deben considerarse tanto la intención de ubicarse en ***A"*** como la de ir a ***B"***. Para el primer caso los resultados a obtener son exactamente los mismos del inciso anterior ya la situación final sería la misma con idénticas probabilidades y rendimientos: $f_2(B', A'') = 0,80$. Cuando se analiza la posibilidad de mantenerse en situación Expectante es $f_2(B', B'') = p_{A''} \cdot v_{A''} + p_{B''} \cdot v_{B''}$, que se aplica con $f_2(B', B'') = 0,46 . 11 + 0,54 . 2$. Y que en resumen deja $f_2(B', B'') = 6,14$, que a su vez es el mejor valor esperado para el estado ***B'***, por lo que se constituirá en el valor de referencia para la próxima etapa a analizar:

$f^*_2(B') = 6,14$.

3) Situación inicial *C'*. Con este caso se terminan de analizar las opciones de la etapa o fase II. También aquí existen dos alternativas de elección: ***B"*** y ***C"***. Para el primer caso valen los cálculos del inciso anterior: $f_2(C', B'') = 6,14$. Para analizar la posibilidad de mantenerse en situación

Relegada se calcula el valor de $f_2(C', C'') = p_{B''} \cdot v_{B''} + p_{C''} \cdot v_{C''}$. Mediante los reemplazos correspondientes se tiene que $f_2(C', C'') = 0{,}70 \cdot 10 + 0{,}30 \cdot (-3)$. Y así se llega a $f_2(C', C'') = 6{,}10$. Como este resultado es menor que el otro calculado para el estado ***C'*** el valor de referencia para la próxima etapa a analizar es:

$f_2^*(C') = 6{,}14.$

Etapa I. Se conocen los valores obtenidos para la etapa II, y ahora se deben calcular los correspondientes a la etapa (fase) I como contribución inmediata y considerarlos en conjunto con los valores óptimos de la etapa II.

Igual que en el caso determinístico se concatenan los respectivos resultados según las fórmulas vistas, para cada estado posible.

Si se está en la situación A: Para pasar de ***A*** a ***A'*** (única acción posible), la fórmula $f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^{S} p_i [v_i + f_{n+1}^*(i)]$ permite valorar la función de rendimiento para dicha decisión, mediante $f_1(A, A') = p_{A'} \cdot [v_{A'} + f_2^*(A')] + p_{B'} \cdot [v_{B'} + f_2^*(B')]$,

Tras los reemplazos se tiene: $f_1(A, A') = 0{,}60 \cdot [11 + 0{,}80] + 0{,}40 \cdot [1 + 6{,}14]$.

En definitiva, $f_1(A, A') = 9{,}94$; que es lo mismo que decir

$$\boxed{f_1^*(A) = 9{,}94}$$

Conclusión: si la empresa se encuentra en la situación ***A*** en el momento actual tiene la esperanza de captar 9,94% de los clientes del mercado si toma las decisiones que se sugerirán en la solución detallada del problema.

Si se está en la situación B: Por su parte, desde la situación ***B*** la empresa puede intentar llegar a ***A'*** o a ***B'***, y para cada alternativa corresponde analizar cuál será su valor esperado:

1) Al aplicar la fórmula ya vista, $f_1(B, A') = p_{A'} \cdot [v_{A'} + f_2^*(A')] + p_{B'} \cdot [v_{B'} + f_2^*(B')]$.

Este valor ya se obtuvo cuando el estado actual era ***A***, y es $f_1(B, A') = 9{,}94$.

2) Con la segunda alternativa se puede derivar en tres situaciones distintas en forma aleatoria:

$$f_1\,(B, B')=p_{A'}\,.[v_{A'}\;\;+f_2{}^*(A')\,]+p_{B'}\;.\,[v_{B'}\;+f_2{}^*(B')]+p_{C'}\,.\,[v_{C'}\;+f_2{}^*(C')].$$

O sea, $f_1\,(B, B') = 0{,}35\,.[13 + 0{,}80\,]+0{,}55\,.[5 + 6{,}14]+ 0{,}10\,.\,[(-8) + 6{,}14].$
Que una vez resuelta arroja el valor $f_1\,(B, B') = 10{,}77.$

De los dos valores obtenidos debe tomarse el mejor a los fines del objetivo del problema, por lo que se tiene

$$\boxed{f_1{}^*(B) = 10{,}77}$$

Es decir que, si la empresa se encuentra en la situación ***B*** en el momento actual, el porcentaje de clientes adicionales que se espera captar en dos años es 10,77.

Finalmente, si la empresa se encuentra en la situación *C* puede proponerse llegar a ***B'*** o a ***C'***. Se analizará el valor esperado para cada alternativa.

1) Para la primera opción se cuenta con los cálculos que se hicieron al analizar la situación ***B:*** $f_1\,(C, B') = 10{,}77$.

2) Para el segundo caso debe calcularse su valor esperado de manera similar a lo ya visto:
$f_1\,(C, C') = p_{B'}\,.\,[v_{B'}\;+f_2{}^*(B')\,]+p_{C'}\;.\,[v_{C'}\;+f_2{}^*(C')].$ Este valor es

$f_1\,(C, C') = 0{,}80\,.[12 + 6{,}14\,] + 0{,}20\,.\,[0 + 6{,}14].$ O sea, $f_1\,(C, C') = 15{,}74.$

De los dos valores obtenidos debe tomarse el mejor a los fines del objetivo del problema, por lo que se tiene

$$\boxed{f_1{}^*(C) = 15{,}74}$$

Es decir que, si la empresa se encuentra en la situación ***C*** en el momento actual, el porcentaje de clientes adicionales que se espera captar en dos años es 15,74.

Conclusiones. A modo de resumen de lo visto hasta aquí puede confeccionarse la Tabla 5.20., donde constan todas las decisiones que podrían tomarse ante las diversas situaciones. Es decir que, a diferencia de lo que ocurre en la Programación Dinámica Determinística, en este caso de Programación Dinámica Aleatoria se cuenta con una estrategia de acciones condicionales (las cuales varían con cada estado s_n que se puede presentar) y en la que cada decisión a recomendar sólo es aplicable una vez que se haya observado el efecto de un evento aleatorio.

Etapa	Si la situación inicial es	Conviene elegir	Rendimiento esperado (% mercado)
I	Dominante	Dominante	9,94
	Expectante	Expectante	10,77
	Rezagado	Rezagado	15,74
II	Dominante	Dominante	0,80
	Expectante	Expectante	6,14
	Rezagado	Expectante	6,14

Tabla 5.20. Resumen de decisiones para cada etapa del ejemplo 5.4.

Del análisis de la tabla se concluye, una vez más, que es verificable el cumplimiento del Teorema de Optimidad, dado que las estrategias óptimas sugeridas aplicables a la totalidad del problema contienen a las respectivas subestrategias óptimas obtenidas en las Etapas I y II (para esa fase sus rendimientos son directos).

5.3. Los árboles de decisión en la toma de decisiones multinivel

La toma de decisiones en varios niveles requiere de la ejecución de un "proceso de decisión". Éste involucra a un conjunto o serie de decisiones concatenadas. A diferencia de lo analizado hasta aquí en este capítulo, aún cuando cada decisión tiene asociado un resultado (ganancia o pérdida) que depende de la decisión adoptada, en este caso el otro condicionante conjunto está dado por circunstancias externas al proceso.

Ya se vio que en Programación Dinámica las condiciones para cada etapa (o fase de la secuencia) dependen del estado que surgió de una decisión anterior. En el caso de los árboles de decisión las circunstancias que rodean externamente a la elección de la opción se denominan "Estados de la Naturaleza".

El problema se puede representar con un árbol de decisión cuando se tiene un conjunto finito de opciones y los estados de la Naturaleza tienen una determinada probabilidad de ocurrir. Si el árbol de decisión no es demasiado grande proporciona un medio útil para resumir las posibilidades de acción y sus potenciales consecuencias.

La utilización de los Árboles de Decisión corresponde al tema Teoría de la Decisión, por lo que no se darán aquí mayores precisiones.

5.4. Ejercicios de Aplicación Práctica

Ejercicio 5.5.1.

Estudio contable *Quant* disponible de seis equipos de auditores formados por profesionales especialmente entrenados en temas específicos. Estos equipos pueden repartirse en cuatro clientes diferentes para realizar trabajos solicitados por empresas dedicadas a distintas industrias y especialidades. En función de la formación profesional y experiencia de los integrantes de cada equipo varía la eficiencia en los resultados del trabajo, acorde a la industria a la cual son asignados para realizar los trabajos de auditoría.

Los equipos no pueden ser divididos, por lo que se deben asignar números enteros a cada empresa. Los honorarios de *Quant* están en función directa de la eficiencia que se pueda exhibir ante el cliente, por lo que se han establecido coeficientes de rendimiento para cada asignación, los cuales se muestran en la tabla siguiente.

Número de equipos asignados	Empresa a la que se asignan los equipos			
	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	4	6	2	5
2	5	8	7	6
3	9	9	14	12
4	11	10	15	13
5	15	11	17	14
6	16	13	18	16

a) Identifique conceptualmente: etapas del modelo, variables de estado y variables de decisión para cada una. Consigne cuál es la función objetivo y cuáles las restricciones.

b) Obtenga la política óptima de asignación de los equipos de auditores para poder maximizar los ingresos para la consultora.

Ejercicio 5.5.2.

Frigorífico *Quantum Ham* elabora hamburguesas para un cliente que ha solicitado la provisión de 200 cajas mensuales, con 1200 hamburguesas cada una, en cada uno de los próximos 7 meses.

Las hamburguesas pueden almacenarse por un máximo de 4 meses, con el consiguiente costo por congelamiento, aunque después de dos meses el producto sufre algunas mermas. Esta circunstancia influye en los resultados de la venta del producto, lo mismo que la disminución de los costos de producción por las economías de escala, dado que la operación se ha pactado a un precio fijo por caja.

A efectos de simplificar el planteo, suponga que el frigorífico puede trabajar únicamente para elaborar cuatro tamaños de lote de producción en un mes determinado. La tabla siguiente muestra el ingreso neto para tales escalas de producción.

Tamaño de lote (cajas)	Ingreso Neto
200	\$12.000
400	\$30.000
600	\$45.000
800	\$57.000

a) Determine la política óptima de producción de hamburguesas del frigorífico para los próximos 7 meses.

Ejercicio 5.5.3.

En el Estado de *Quantinia* está el embalse sobre el río *Quantus,* que produce electricidad para toda la región y abastece de agua para riego a la zona aledaña. En función de las demandas estimadas de electricidad y agua para riego, y de las lluvias en la cuenca superior del río (que alimentan al embalse) se establecen periódicamente los programas de operación de la Central Hidroeléctrica.

Dados los usos alternativos del agua, por cada Kw/h generado se tienen costos no solamente por la operación y mantenimiento de la usina, sino también los costos sociales derivados de la reducción de la oferta de agua para riego (impacto en la actividad económica local, nivel de ocupación de mano de obra y otros recursos, etc.). Por tal motivo, se busca minimizar el Costo Total Esperado de la electricidad producida.

A efectos de trabajar con un modelo simplificado se supondrá que deben planificarse los próximos 2 meses de operación, a partir de tres posibles situaciones iniciales de lluvias conocidas: excesivas, normales y escasas. Cada una de estas situaciones permite ofrecer, respectivamente, 800 Mw/h o 500 Mw/h en el primer caso, 500 Mw/h o 300 Mw/h en el segundo, y 300/h Mw o 200 Mw/h si la lluvia fue escasa.

Las posibles situaciones futuras pueden ser cuatro tipos diferentes: lluvias abundantes o escasas, cada una con la posibilidad de alta o baja demanda de agua para riego.

La siguiente tabla resume el costo (\$/Mw-h producido) según la cantidad ofrecida y el estado de la Naturaleza que ocurra en la realidad, así como las respectivas probabilidades de ocurrencia.

MES 1

Estado	Lluvia abundante y riego alta		Lluvia abundante y riego baja		Lluvia escasa y riego alta		Lluvia escasa y riego baja	
Mw/h	**Costo**	**Prob.**	**Costo**	**Prob.**	**Costo**	**Prob.**	**Costo**	**Prob.**
800	12	0,6	10	0,4	22	0,3	2	0,7
500	8	0,5	8	0,5	10	0,4	8	0,6
300	8	0,4	7	0,6	9	0,7	8	0,3
200	6	0,2	5	0,8	1	0,8	9	0,2

MES 2

Estado	Lluvia abundante y riego alta		Lluvia abundante y riego baja		Lluvia escasa y riego alta		Lluvia escasa y riego baja	
Mw/h	**Costo**	**Prob.**	**Costo**	**Prob.**	**Costo**	**Prob.**	**Costo**	**Prob.**
800	12	0,8	10	0,2	22	0,4	2	0,6
500	8	0,6	8	0,4	10	0,6	8	0,4
300	8	0,5	7	0,5	9	0,6	8	0,4
200	6	0,4	5	0,6	1	0,5	9	0,5

a) Diseñe una red en la que se muestre la posible evolución de las variables en el tiempo, y que permita aplicar Programación Dinámica para definir las estrategias óptimas de operación de la usina.

b) Obtenga las estrategias óptimas de operación de la usina. Considere que para el segundo mes únicamente se tendrán en cuenta estados iniciales con lluvia abundante y lluvia escasa el mes anterior.

Ejercicio 5.5.4.

Considere detenidamente y en forma crítica las expresiones referidas a **Programación Dinámica** que se insertan a continuación.

a) Consigne si las expresiones son Verdaderas o Falsas. Fundamente brevemente la respuesta en caso de ser necesario.

1) Para poder aplicar Programación Dinámica a un modelo confeccionado sobre una situación problemática es necesario que ésta pueda fraccionarse en partes que luego se resuelven todas en forma simultánea.

2) Un programa dinámico aleatorio únicamente puede tener resolución mediante la técnica denominada "de recusión en avance".

3) Aunque se denomine "dinámica" esta metodología de trabajo es aplicable a las más diversas situaciones, independientemente de que mode-len situaciones que transcurren en el tiempo o no.

4) Cada vez que se toma una decisión en una etapa la variable de estado le asigna un valor a la variable de decisión de la etapa siguiente.

5) Las funciones objetivo de programas dinámicos pueden ser de suma acumulativa, de resultados que se multiplican entre sí, y de cualquier otro tipo que requiera el problema a resolver.

5.5. Apéndice

5.5.1. La resolución mediante recurrencia en avance

En este capítulo se mencionó que en el caso de Programación Dinámica Aleatoria, como se procura evaluar distintos valores esperados para cada alternativa de decisión, sólo es posible efectuar los cálculos recurrentes en retroceso. Así, una vez definidas las distintas etapas o fases que componen el problema, el cálculo de los distintos valores para la función de rendimiento comienza en la etapa más cercana al final del proceso (si el problema reflejara evolución cronológica podría decirse "desde aquella más alejada en el tiempo").

5.5.1.1. Casos en los que es factible aplicar una fórmula recurrente en avance

Cuando el programa dinámico es del tipo determinístico existe la posibilidad de hacer los cálculos en cualquiera de las dos direcciones.

Para ejemplificar cómo se procede con la ecuación recurrente en avance se tomará una red ya trazada, representativa de una situación problemática cualquiera -en la que hay que minimizar el costo total- y con los respectivos rendimientos inmediatos (costos) ya volcados sobre la gráfica. Esta situación es la que muestra la Figura 5.6.

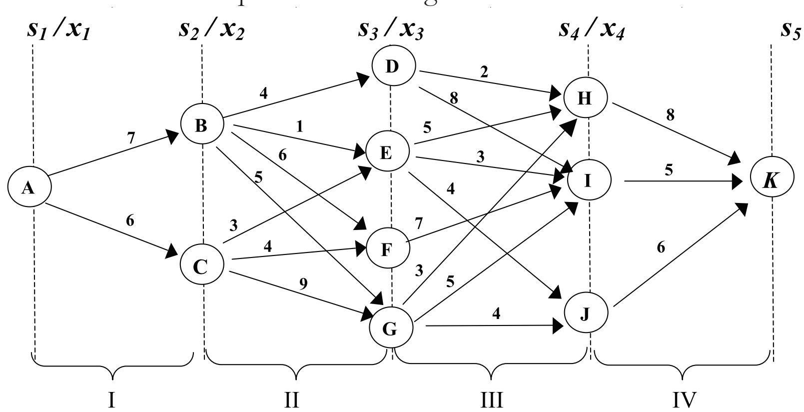


Figura 5.6. Red correspondiente al Ejemplo del Anexo 5.5.1.

Formulación.

Si bien podrían utilizarse las expresiones aplicadas al describir la recurrencia en retroceso, se alterará levemente la nomenclatura para representar con más fidelidad las condiciones en que se desenvuelve el cálculo.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
4							**Red en forma matricial**							
5		Destino	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	
6	Origen	**A**		7	6									
7		**B**				4	1	6	5					
8		**C**				M	3	4	9					
9		**D**								2	8	M		
10		**E**								5	3	4		
11		**F**								M	7	M		
12		**G**								3	5	4		
13		**H**											8	
14		**I**											5	
15		**J**											6	
16		**K**												
17														
18														
19	**Etapa 1**	s_n	**A**				**A**							
20	s_{n+1}	$f^*_n(x_n)$	0				$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	**Mejor**	Col	x^*	Alt
21	**B**	$v_{sn+1,x}$	7				*7*				**7**	1	A	
22	**C**	$v_{sn+1,x}$	6				*6*				**6**	1	A	
23		$v_{sn+1,x}$												
24		$v_{sn+1,x}$												
25														
26														
27	**Etapa 2**	s_n	**B**	**C**			**B**	**C**						
28	s_{n+1}	$f^*_n(x_n)$	7	6			$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	**Mejor**	Col	x^*	Alt
29	**D**	$v_{sn+1,x}$	4	M			*11*	*M*			**11**	1	B	
30	**E**	$v_{sn+1,x}$	1	3			*8*	*9*			**8**	1	B	
31	**F**	$v_{sn+1,x}$	6	4			*13*	*10*			**10**	2	C	
32	**G**	$v_{sn+1,x}$	5	9			*12*	*15*			**12**	1	B	
33														
34														
35	**Etapa 3**	s_n	**D**	**E**	**F**	**G**	**D**	**E**	**F**	**G**				
36	s_{n+1}	$f^*_n(x_n)$	11	8	10	12	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	**Mejor**	Col	x^*	Alt
37	**H**	$v_{sn+1,x}$	2	5	M	3	*13*	*13*	*M*	*15*	**13**	1	D	*
38	**I**	$v_{sn+1,x}$	8	3	7	5	*19*	*11*	*17*	*17*	**11**	2	E	
39	**J**	$v_{sn+1,x}$	M	4	M	4	*M*	*12*	*M*	*16*	**12**	2	E	
40														
41														
42														
43	**Etapa 4**	s_n	**H**	**I**	**J**		**H**	**I**	**J**					
44	s_{n+1}	$f^*_n(x_n)$	13	11	12		$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	$v_{s,x}+f^*_n(x_n)$	**Mejor**	Col	x^*	Alt
45	**K**	$v_{sn+1,x}$	8	5	6		*21*	*16*	*18*		**16**	2	I	

Tabla 5.21. Resolución "en avance" del ejemplo del Anexo 5.5.1. con una planilla electrónica

La expresión $f^*_n(s_{n+1}) = \min_{x_n} f_n(s_{n+1}, x_n)$ se definirá como **función de rendimiento.** En comparación con la otra expresión ya utilizada presenta una alteración en el subíndice correspondiente a la variable de estado. El cambio mencionado se hace simplemente para indicar que **en este caso en cada etapa se tendrá la necesidad de alcanzar un determinado estado final de la etapa** -o inicial para la próxima fase- (a diferencia del cálculo en retroceso, cuando el estado condicionante era el inicial de la etapa), **y se asigna a la variable de decisión (x_n) la identificación del nodo desde el cual se parte para llegar al estado final mencionado.** O sea: para la etapa n se menciona a s_{n+1} para citar su estado final.

La función a minimizar que contiene el cálculo recurrente tiene dos partes:

1. el rendimiento inmediato (v_{s_n+1, x_n}) que indica en cuánto se incrementa el costo total acumulado hasta la etapa anterior por alcanzar -al final de esta fase- el estado s_{n+1} si se ejecuta la decisión x_n;

2. el mínimo costo acumulado hasta el inicio de la etapa actual para cada uno de los estados posibles $(f^*_n(x_n))$.

La ecuación de recurrencia es $f_n(s_{n+1}, x_n) = v_{s_n+1, x_n} + f^*_n(x_n)$.

Los cálculos que se muestran están obtenidos mediante la confección de una planilla de cálculo electrónico (Excel), y pueden apreciarse en la Tabla 5.21.

Resolución.

En primer lugar se presenta la red en términos de una matriz, en la que en cada fila se insertan los datos correspondientes a cada nodo origen de un arco, y en cada columna los respectivos datos inherentes a cada nodo donde termina un arco. De esta manera, en la intersección de fila y columna se coloca el rendimiento inmediato (costos) del arco que corresponda a tal relación inicio-fin. Cuando no existe vinculación entre dos nodos de etapas consecutivas se indica la imposibilidad de tal relación mediante un costo que simboliza a un valor infinitamente grande y que es indeseable para la función que se pretende minimizar (un costo "M"); las celdas vacías responden a nodos que están en la misma etapa o a más de una fase de distancia, y por tal motivo nunca serán arcos para analizar en un programa dinámico.

A partir de la fila 19 de la hoja electrónica se despliegan los cálculos de solución del problema.

En la primera columna (columna B de la hoja), bajo el título s_{n+1} se inserta una fila para cada posible estado final de la fase tratada. En el caso de la etapa 1 los posibles destinos son **B** o **C**. A su vez, para cada posible origen (o estado inicial de la etapa) se tiene una columna; en este caso, para **A**, entre las columnas **D** y **G** de la hoja electrónica.

En la columna C de la hoja está la simbología aplicable a los datos insertados a su derecha hasta la columna G inclusive. Son: s_n para identificar el nodo que representa a cada estado inicial de la fase; $f_n^* \ (x_n)$ para el mínimo costo acumulado hasta el inicio de la etapa actual para cada uno de los estados posibles; $v_{s_n + 1, x_n}$ para expresar los rendimientos (costos) asignados a cada decisión en función del estado inicial y del que se quiere alcanzar al fin de la etapa.

Entre las columnas H y K, ambas inclusive, se repiten las columnas de los posibles estados iniciales para la etapa. En este caso los valores numéricos obtenidos (tal como identifica la fórmula insertada como cabecera de la columna) son el acumulado de la función de rendimiento (costo total) resultante de sumar el efecto inmediato con el acumulado anterior, por vincular el estado inicial identificado en la columna con el estado final de cada fila.

La columna L elige el "mejor" de los valores en base al objetivo perseguido por el problema: en este caso, el mínimo de los valores obtenidos en una fila para las columnas H a K.

La columna M es cálculo auxiliar y meramente indicativa de qué lugar en la fila ocupa el estado seleccionado como "mejor". En base a tal información se completa la columna N, donde x^* establece cuál es el estado inicial óptimo para alcanzar el estado final al que apunta la fila. Si existe más de uno de estos estados iniciales se completa la fila con **"*"** al final.

El esquema descripto se repite para todas las etapas de solución del problema.

Etapa 1. Al proceder con la secuencia de resolución por fases se observa que, en primer lugar, como siempre la solución para la primera etapa es trivial: en este caso, el único estado inicial posible es A y se puede finalizar con B o C. Como el costo que acumulan es, respectivamente, el único computado, directamente esto conduce a la obtención de los valores $f_n^* \ (x_n)$ y a las mejores decisiones para cada situación (x^*).

Etapa 2. Ahora en la columna B de la planilla electrónica figuran los nodos que representan a los posibles estados finales alcanzables en esta fase (D, E, F y G, cada uno con su valor $v_{s_n + 1 x_n}$), y en las columnas se detallan los estados iniciales (B y C) que a su vez arrastran los mejores valores acumulados calculados en la etapa anterior.

Tras los cálculos correspondientes se determina que para llegar a D conviene venir por el nodo B con un costo acumulado de 11, para E el origen también es B a un costo acumulado de 8, lo mismo que para G aunque en este caso el costo acumulado es 12. Para el nodo final F el origen que conviene es C, con costo acumulado 10.

Etapa 3. En la columna B de la planilla electrónica se ubican los nodos que representan a los posibles estados finales para esta fase (H, I, y J) y en las columnas se colocan los estados finales de la etapa 2 (los cuatro analizados en el párrafo anterior).

Los cálculos a ejecutar repiten la fórmula de recurrencia ya aplicada. En este caso para llegar a H se puede venir tanto desde D como desde E (el asterisco final lo señala), y para los estados I y J el único estado inicial posible como óptimo es E. Los costos acumulados desde el principio del proceso son 13, 11 y 12, respectivamente.

Etapa 4. Es la última fase de cálculos, donde es factible un solo estado final: K. Los estados iniciales que pueden conducir al mismo son los finales de la etapa 3 (H, I, y J) y de entre ellos corresponde elegir el estado I por ser el de menor valor para la función de rendimiento: 16.

Conclusión: Éste es el óptimo del problema: $f_4^*(K) = 16$. Y el programa de menor costo requiere pasar por los estados (recorridos en sentido contrario al seguido en la resolución):

K - I - E - B - A

Sobre la planilla electrónica, sus celdas y funciones de Excel aplicadas.

Se mencionarán brevemente algunas cuestiones relacionadas con el aprovechamiento de esta herramienta de cálculo electrónico para resolver programas dinámicos. Queda abierta la posibilidad de que el lector ávido por mejorar esta presentación indague por su cuenta y avance desde esta base de lanzamiento para confeccionar planillas adecuadas a sus necesidades.

En primer lugar, se recomienda reservar para cada etapa un número constante de filas, ya que esto permitirá copiar bloques de celdas correspondientes a una fase y repetirlos a continuación para hacer los cálculos de la siguiente si se les aplican algunos pequeños ajustes. En este caso el número de filas que se necesita es 8, de las cuales hay 4 que no siempre se usan, pero tal es el número máximo de nodos que hay en una etapa cualquiera y se respetará el espacio máximo necesario para alojar estados finales de las etapas (=4).

De manera similar, en alguna etapa los cuatro nodos mencionados son nodos iniciales, y hay que reservarles espacio suficiente. A tales efectos se les asignan las columnas D a G -aunque no siempre se ocupen, como por ejemplo en la etapa 1 que ilustra la Tabla 5.22.

La Tabla 5.22. muestra el contenido de las celdas B19 a G32. Se puede observar que las columnas B y C siempre requieren carga manual de su contenido, así como la fila para $f_n^* \ (x_n)$ de la primera etapa (que siempre es cero).

El rango D21:G24 se carga con una operación que recoge el valor (costo) insertado en la red volcada a una matriz en la parte superior de la planilla. Esta relación entre celdas da la ventaja de poder hacer sensibilidad, una vez resuelto el modelo, sin necesidad de reescribir todas las celdas. Pero para cada etapa estos valores deben cargarse manualmente con estas igualdades, celda por celda; no hay copia posible, tal como se ilustra en el rango D29:E32 de la Tabla 5.22.

Para completar los datos de la Etapa 2, al cargar las filas 27 y 28, que contienen los nombres de nodos y los acumulados de la fórmula de recurrencia $f_n^* \ (x_n)$, se hace referencia a las celdas que los contienen en la etapa anterior. En el primer caso se controla previamente que tal nodo realmente exista, mediante la comparación con "contenido vacío" ***(=SI($B21="",*** etc.).

El rango D27:G32 puede copiarse y repetirse para cálculos de las etapas restantes.

	B	C	D	E	F	G
19	**Etapa 1**	s_n	**A**			
20	s_{n+1}	$f^*_n(x_n)$	0			
21	**B**	$v_{sn+1,x}$	=E6			
22	**C**	$v_{sn+1,x}$	=F6			
23		$v_{sn+1,x}$				
24		$v_{sn+1,x}$				
25						
26						
27	**Etapa 2**	s_n	=SI($B21="";"";B21)	=SI($B22="";"";B22)	=SI($B23="";"";B23)	=SI($B24="";"";B24)
28	s_{n+1}	$f^*_n(x_n)$	=L21	=L22	=L23	=L24
29	**D**	$v_{sn+1,x}$	=G7	=G8		
30	**E**	$v_{sn+1,x}$	=H7	=H8		
31	**F**	$v_{sn+1,x}$	=I7	=I8		
32	**G**	$v_{sn+1,x}$	=J7	=J8		

Tabla 5.22. Contenido de Celdas de la planilla electrónica para las etapas 1 y 2. (Parte I)

La Tabla 5.23. muestra el contenido de las celdas H19 a I32 de la planilla electrónica a modo de muestra del rango completo que abarca los cálculos para las funciones de rendimiento.

Para generar la fila 19 se opera con las columnas ubicadas a su izquierda, vistas en la Tabla 5.22., y puede replicarse para usarla en las siguientes etapas (fila 27, y sucesivas respectivas).

La fila 20 son títulos y se completa con el ingreso manual de los textos.

En la Etapa 1, para el primer estado inicial (rango H21 a H24) deben insertarse manualmente las fórmulas celda por celda. No hay copia posible porque algunas celdas son apuntadas desde todas las celdas del rango, pero sin dejar fija la referencia en el cálculo (D19 y D20). Una vez completado, las celdas H21:H24 pueden copiarse y pegarse en el resto de las columnas de la derecha para completar los cálculos de la fase; por ejemplo, en la columna I de la Tabla 5.23. y las siguientes (que no se muestran para dar mayor claridad a lo expuesto, y por ser simple repetición de la columna I).

Una vez listas las fórmulas para calcular todos los valores de la función de rendimiento el rango completo de celdas H21:K24 puede copiarse y repetirse para aprovecharse en el cálculo de las etapas siguientes hasta la última.

A continuación se explicará el contenido de las últimas cuatro columnas, que completan los cálculos en avance para un programa dinámico en la planilla de la Tabla 5.21.

La encabezada con el título "Mejor" identifica en cada fila cuál es el menor valor de todos los acumulados calculados. Para evitar inconvenientes se controla previamente que haya números insertados, ya que al buscar mínimos Excel identifica como mínimo al valor cero si todas las celdas están vacías. La celda L21 se obtiene con ***=SI(CONTAR(H21:K21)>0;MIN(H21:K21);"")*** y puede copiarse y pegarse en el resto de la columna para que evalúe todos los estados finales posibles.

Para poder identificar a qué estado inicial corresponde el mejor valor de la celda L21 se completan las dos columnas siguientes. En primer lugar, la que tiene por título "Col" permite ubicar el lugar de la fila en que está tal valor. Para la celda M21 esto se hace mediante la fórmula ***=SI(L21="";"";COINCIDIR(L21;H21:K21;0))***, que también hace un control previo para no trabajar con celdas vacías. Esta operación da una referencia para poder buscar en la fila que contiene los nombres de los estados iniciales, y esto se hace en la columna N de la planilla; concretamente, para la celda N21 la función ***=SI(ESNUMERO(M21);INDICE(H19:K19;1;M21);"").***

Finalmente, como la búsqueda descripta en el párrafo anterior muestra únicamente la primera ocurrencia del valor óptimo (mínimo) se incorpora una columna adicional, la O con el título “Alt” (alternativa), que indica si ese valor está en más de un lugar. Las funciones Excel ***=SI(L21=””;””;SI(CONTAR.SI(H21:K21;L21)>1;”*”;””))*** ponen un asterisco o dejan vacía la celda O21, según corresponda indicar o no tal circunstancia de la existencia de decisiones óptimas alternativas.

Este último conjunto de celdas (L21:O24) puede copiarse y pegarse para aprovecharlo en el cálculo de las etapas siguientes hasta la última.

	H	I
19	**=D19**	**=E19**
20	$v_{s,x} + f^*_n(x_n)$	$v_{s,x} + f^*_n(x_n)$
21	=SI(D19="";"";SI($B21="";"";SI(D21="M";"M";D21+D20)))	=SI(E19="";"";SI($B21="";"";SI(E21="M";"M";E21+E20)))
22	=SI(D19="";"";SI($B22="";"";SI(D22="M";"M";D22+D20)))	=SI(E19="";"";SI($B22="";"";SI(E22="M";"M";E22+E20)))
23	=SI(D19="";"";SI($B23="";"";SI(D23="M";"M";D23+D20)))	=SI(E19="";"";SI($B23="";"";SI(E23="M";"M";E23+E20)))
24	=SI(D19="";"";SI($B24="";"";SI(D24="M";"M";D24+D20)))	=SI(E19="";"";SI($B24="";"";SI(E24="M";"M";E24+E20)))
25		
26		
27	**=D27**	**=E27**
28	$v_{s,x} + f^*_n(x_n)$	$v_{s,x} + f^*_n(x_n)$
29	=SI(D27="";"";SI($B29="";"";SI(D29="M";"M";D29+D28)))	=SI(E27="";"";SI($B29="";"";SI(E29="M";"M";E29+E28)))
30	=SI(D27="";"";SI($B30="";"";SI(D30="M";"M";D30+D28)))	=SI(E27="";"";SI($B30="";"";SI(E30="M";"M";E30+E28)))
31	=SI(D27="";"";SI($B31="";"";SI(D31="M";"M";D31+D28)))	=SI(E27="";"";SI($B31="";"";SI(E31="M";"M";E31+E28)))
32	=SI(D27="";"";SI($B32="";"";SI(D32="M";"M";D32+D28)))	=SI(E27="";"";SI($B32="";"";SI(E32="M";"M";E32+E28)))

Tabla 5.23. Contenido de Celdas de la planilla electrónica para las etapas 1 y 2. (Parte II)

5.6. Bibliografía.

ANDERSON, D., SWEENEY, D. Y WILLIAMS, T. (1993). *Introducción a los modelos cuantitativos para Administración*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

BRONSON, R. (1983). *Investigación de Operaciones. Teoría y Problemas resueltos*. México. McGraw Hill - Serie Schaum.

HILLIER, F. Y LIEBERMAN, G. (1997). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México. McGraw Hill.

KAUFMANN, A. (1967). *Métodos y Modelos de la Programación Dinámica*. México. CECSA.

TAHA, H. A. (1994). *Investigación de Operaciones*. México. Alfaomega.

WINSTON, W. (1994). *Investigación de Operaciones*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

6

Capítulo 6

Resolución de los Ejercicios de Aplicación Práctica

6

6. Resolución de los Ejercicios de Aplicación Práctica
6.1. Ejercicios del Capítulo 1

Ejercicio 1.6.1.

a) Tipo de modelo que permite representar la situación planteada: la red es un modelo analógico. Es factible representar la situación con un modelo matemático, en cuyo caso se lo puede clasificar como determinístico o aleatorio (con los datos del enunciado no es posible identificar en cuál de los dos grupos se encuentra) y, en general, será un modelo normativo; aunque podría darse el caso de que sólo se lo utilizara para describir la situación sin proponer cursos de acción, en cuyo caso sería descriptivo.

b) 1. Variables de decisión (únicamente válidas si el modelo es normativo; la nómina no es indicativa de que todas deban estar en el mismo modelo, puesto que dependen del planteo que se haga) pueden ser: cantidad de camiones a despachar diariamente, tarifa a cobrar por kilómetro recorrido / paquete entregado, secuencia de la ruta a seguir, frecuencia de los viajes, secuencia de la rotación de choferes y duración de los turnos a aplicar en el reparto.

b) 2. Los parámetros del modelo pueden ser (la nómina no es indicativa de que todos deban estar en el mismo modelo, puesto que dependen del planteo que se haga y en algún puede ocurrir que sea variable de decisión y no corresponda incluirlo aquí): costo de traslado por Km. recorrido, remuneración de los conductores de camiones, amortización de los vehículos según su uso, cantidad de vehículos / capacidad de reparto disponibles, distancia entre depósitos de los clientes, tarifa a cobrar al cliente, cantidad de Km. a recorrer en cada reparto, cantidad de conductores disponibles.

b) 3. La función que optimiza el modelo (únicamente válida si el modelo es normativo; la nómina no es indicativa de que todas deban estar en el mismo modelo, puesto que dependen del planteo que se haga). Minimizar el costo diario de transportar los envíos de los clientes, maximizar el beneficio por prestar el servicio de distribución, minimizar la cantidad de Km. recorridos en cada entrega, proveer el servicio que mejor satisfaga: expectativas de los clientes, necesidades de la empresa (costos, calidad del servicio, renovación de flota, etc), pretensiones de los empleados, normativa municipal, etc.

Ejercicio 1.6.2.

a)

1) Falso. Juicio y experiencia de un gerente no son modelos.

2) Falso. No se están tomando decisiones que resuelven el problema real. Se proponen cursos de acción en un ámbito simbólico.

3) Falso. Vuelca los aspectos de la realidad que considera más relevantes para el problema que enfrenta.

Ejercicio 1.6.3.

a)

1) Falso. Las variables representan unidades físicas, pero el modelo es simbólico (matemático).

2) Falso. Los valores mencionados son parámetros.

3) Falso. Porque representa a la realidad es un modelo; por hacer dicha representación con expresiones matemáticas se trata de un modelo matemático o simbólico. Un modelo descriptivo no plantea objetivo (como el de maximizar que aparece en este caso).

4) Falso. Las expresiones matemáticas no son representaciones analógicas.

Ejercicio 1.6.4

a) Para aproximarlo más a la realidad que se pretende reflejar pueden agregarse expresiones que tengan en cuenta: condiciones atmosféricas (lluvia, nevadas, viento a favor o en contra), condiciones del camino (estado del piso, embotellamientos, desvíos por cortes de rutas, etc), velocidad crucero, velocidad máxima, etc.

b)

I. 1), 2)

II. 1), 2), 3)

c) Para completar el modelo en la forma indicada, se podrían agregar coeficientes a la variable ***K***, para expresar las alteraciones en el recorrido según lo propuesto en 1.6.4. a). Una nueva variable podría ser "cantidad de Km. recorridos a la velocidad ***x***"

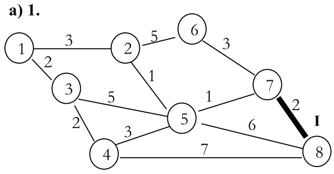
Ejercicio 1.6.5.
a)

Expresión	Variable de decisión	Función objetivo	Restric-ción	Pará-metro	No aplica
Máximo de horas mensuales disponibles de "Corte"			X		
Maximizar la cantidad de carcasas fabricadas		X			
Cantidad de carcazas "diseño C" a producir en el mes	X				
Costo por minuto de máquina de "Estampado"				X	
$4.150				X	
Precio de venta de cada carcaza				X	

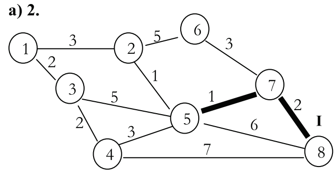
6.2. Ejercicios del Capítulo 2

Ejercicio 2.4.1.
a)

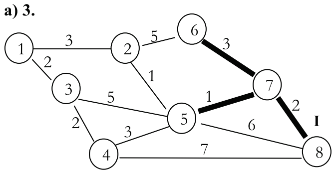
a) 1.



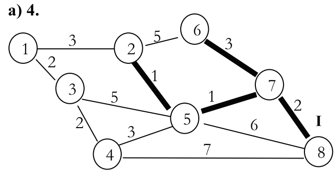
a) 2.



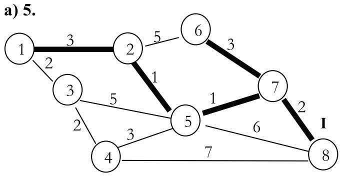
a) 3.



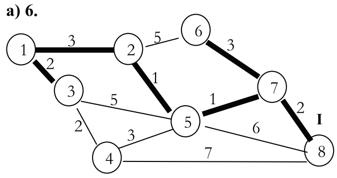
a) 4.



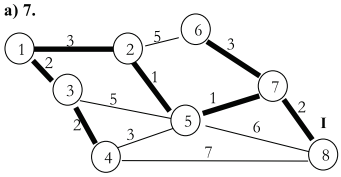
a) 5.



a) 6.



a) 7.



Ejercicio 2.4.2.

a)

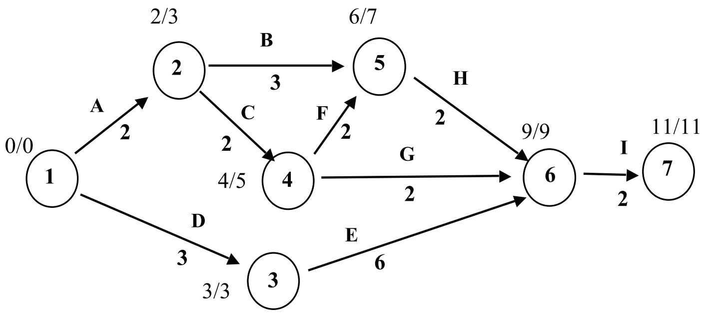
1) Falso. La ruta más corta sólo conecta nodos que unen arcos ubicados en el recorrido de menor distancia entre el origen I y el destino final.

2) Verdadero.

3) Verdadero.

Ejercicio 2.4.3.

a) Duración calculada: 11 días.

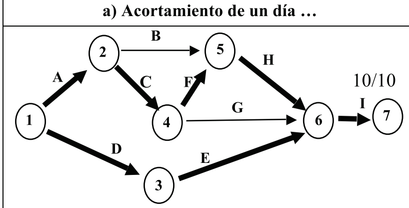
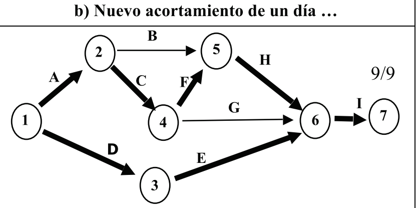


Tarea	Cálculos para determinar criticidad	¿Crítica?
E	$H_E = 9 - 3 - 6$ $H_E = 0$	Sí
G	$H_E = 9 - 4 - 2$ $H_E = 3$	No

b) El costo total del proyecto es de $760 = 20 x 11 + 540

Ejercicio 2.4.4.

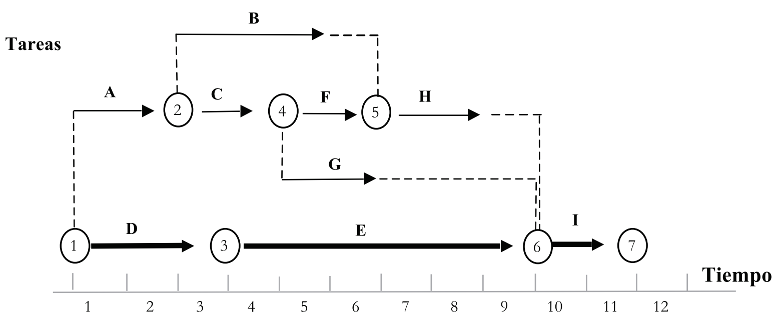
a)

a) Acortamiento de un día …	b) Nuevo acortamiento de un día …
	

Tareas que acortan duración: **E** Efecto sobre el Costo Total: Proviene de dos impactos de sentido opuesto: Aumenta en $15, porque al reducir la duración de E aumenta su Costo Directo. Disminuye en 20 porque al reducir la duración del proyecto baja el Costo Indirecto. La suma de ambos importe produce una reducción en el Costo Total: Efecto neto $-5,00 NUEVO COSTO TOTAL: $ 755, 00 : . ………………………….	Tareas que acortan duración: **I** Efecto sobre el Costo Total: + 16 - 20 = - 4 NUEVO COSTO TOTAL: $ 751,00.

Ejercicio 2.4.5.

a)

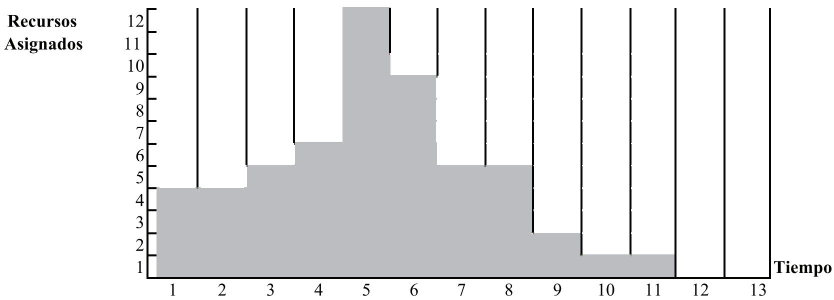


b) Diagrama tabular de carga de recursos del proyecto: se obtiene de volcar en una tabla las necesidades del recurso en cada unidad de tiempo (día) para cada tarea. Sumando todos los requerimientos de cada día se tiene el Total Requerido por el Proyecto cada día.

Tareas	Unidades de recurso necesarias												
1-2	**3**	**3**											
1-3	**1**	**1**	**1**										
2-4			**1**	**1**									
2-5			**3**	**3**	**3**								
3-6				**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**				
4-5					**4**	**4**							
4-6					**3**	**3**							
5-6							**3**	**3**					
6-7							**3**	**3**		**1**	**1**		
TOTAL	**4**	**4**	**5**	**6**	**12**	**9**	**5**	**5**	**2**	**1**	**1**		

Tiempo

c) Diagrama de carga de recursos como gráfico de barras.



d) Distribución de las holguras existentes para mejora en el empleo de los recursos.

Tareas	Unidades de recurso necesarias												
1-2	**3**	**3**											
1-3	**1**	**1**	**1**										
2-4			**1**	**1**									
2-5			**3**	**3**	**3**								
3-6				**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**				
4-5						**4**	**4**						
4-6					**3**	**3**							
5-6								**3**	**3**				
6-7										**1**	**1**		
TOTAL	**4**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**6**	**5**	**5**	**1**	**1**		

Tiempo

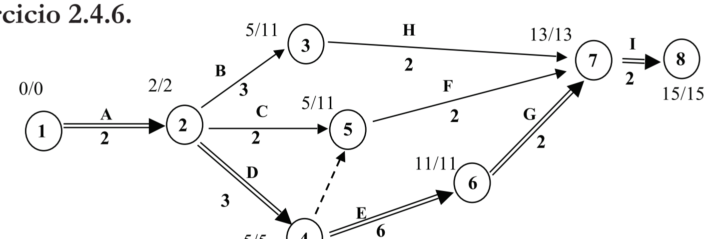
Nuevo Costo Total: $CT = 20 \times 11 + 10 \times 9 \times 11$

$CT = 1210\ \$$

NOTA: Existe solución alternativa si se desplaza 1 o 2 días la ejecución de la tarea G en lugar de F y H.

Ejercicio 2.4.6.

a)



b) Duración del proyecto revisado: 15 días.
c) Costo Total del proyecto revisado: $CT = 15 \times 20 + 540$
$CT = 840\$$

Ejercicio 2.4.7.

a) Las alternativas que se le pueden presentar al cliente para cumplir con el objetivo del proyecto son:

1. Proyecto original: Costo $760, duración 11 días.
2. Proyecto original acortado 2 días: Costo $751, duración 9 días.
3. Proyecto con recursos pico optimizado: Costo $1210, duración 11 días.
4. Proyecto Revisado: Costo $ 840, duración 15 días.

b) La alternativa recomendable para aplicar en el negocio del cliente, por tener la mejor relación tiempo costo es la número 2 (proyecto original acortado), puesto que se realiza en el menor costo total y con menor duración que las demás.

Ejercicio 2.4.8.

a)

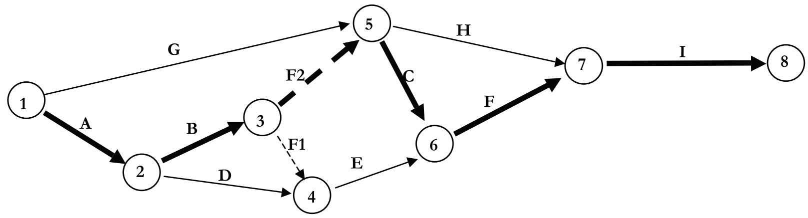
I. 1)
II. 5)
III. 1), 3)
IV. 5)

Ejercicio 2.4.9.

a)

TAREAS	Dur. Optim	Dur. más Prob	Dur. Pesim	$\hat{t}_e$	$\hat{\sigma}_{t_e}$	$\hat{\sigma}_{t_e}^{2}$
A	8	9	10	**9**	**0,3**	**0,1**
B	7	8	9	**8**	**0,3**	**0,1**
C	7	8	15	**9**	**1,3**	**1,8**
D	4	6	8	**6**	**0,7**	**0,4**
E	3	3	3	**3**	**0**	**0**
F	5	13	15	**12**	**1,7**	**2,8**
G	4	4	10	**5**	**1**	**1**
H	1	1	1	**1**	**0**	**0**
I	1	7	7	**6**	**1**	**1**

b)



La duración del proyecto se estima en **44** semanas, mientras que el desvío estándar de esta duración es $\sqrt{\boldsymbol{0,1 + 0,1 + 1,8 + 2,8 + 1}} \boldsymbol{= 2,4}$ semanas.

c) La duración del proyecto para 95,05% de certeza se estima en **48** semanas. CÁLCULOS AUXILIARES si se recurre a tabla de Normal Standard: Corresponde averiguar el valor de ***T*** para el cual es la $\boldsymbol{P_{(T)}}$ = ***0,9505.*** Esto es (según tabla Normal) un valor de ***Z = 1,65***. Haciendo los cálculos se llega a ***T= 47,96.*** (Aproximadamente 48)

Ejercicio 2.4.10.

a)

TAREAS	Media	F1 C3	Beta . Sigma	t'_e= (SIMULADA)
A	----	----	----	**9,2**
B	----	----	----	**7,9**
C	**9**	**-0,11**	**-0,143**	**8,9 Tabla con tm cerca de to**
D	----	----	----	**6,1**
E	----	----	----	**3,0**
F	**12**	**0,33**	**0,561**	**12,6 Tabla con tm cerca de tp**
G	**5**	**0,19**	**0,19**	**5,2 Tabla con tm cerca de to**
H	----	----	----	**1,0**
I	----	----	----	**6,2**

b) La duración estimada en la simulación es de 44,8 semanas.

c)

I. 2), 3)

II. 3)

6.3. Ejercicios del Capítulo 3

Ejercicio 3.7.1.

a)
• **Patrón de arribos:** Poisson
• **Patrón de servicios:** Poisson
• **Estaciones de Servicio:** una sola: el operario del taller de reparación.
• **Población:** máquinas de cortar césped que eventualmente podrían solicitar servicio de reparación. Número infinito.
• **Disciplina de atención:** PEPS
• **Cola:** máquinas en el "Pañol de elementos a reparar"

b) Para poder contestar lo requerido es necesario previamente identificar el principal indicador de desempeño del modelo, que es el **factor de tráfico.** Para esto, a su vez, se deben definir las velocidades de arribos y de servicio.

$$\lambda = 19/6, \qquad \lambda = 3{,}1667 \text{ máq/día}$$
$$\mu = 4 \text{ máq/día}$$
$$\rho = \lambda / \mu, \qquad \rho = 0{,}792$$

$Lc = 3{,}0083$ máquinas
$Tc = 0{,}95$ día
c) $Ts = 1{,}20$ día
d) No se está cumpliendo el objetivo debido a que se tienen en promedio 3,8 máquinas en el local $(Ls = 3{,}0083 + 0{,}792)$.
e) $P_{(n=3)} = 0{,}1034$
f) $P_{(n=0)} = 0{,}2083$

Ejercicio 3.7.2.

a) En este caso, con el cambio introducido se puede cumplir el objetivo, ya que la cantidad de máquinas que hay en el local, incluyendo las que están en reparación se reduce sustancialmente: $Ls = 1{,}4631$

b) Concordantemente con lo observado en el inciso anterior, se reduce el tiempo que cada máquina tiene que esperar para ser atendida: $Tc = 0{,}1287$ día

c) La circunstancia apuntada haría que los pedidos de reparación se acumulen indefinidamente: $\rho = \lambda / (\mu \,.\, s)$, $\rho = 3{,}1667 / (1{,}5 \,.\, 2))$, $\rho > 1$ y la empresa debería adoptar alguna medida para mejorar la prestación del servicio, ya que en estas condiciones no puede hacer frente a la demanda del mismo.

Ejercicio 3.7.3.

a) Debido a que no se puede suponer infinitos clientes, se redefine el modelo. Principalmente el impacto está sobre el significado de $\boldsymbol{\lambda}$.

b) Las medidas de desempeño de este modelo son:

• Promedio de máquinas en espera para ser reparadas: ***Lc = 2,11*** máquinas

• Promedio tiempo esperando iniciar la reparación: ***Tc = 0,68*** día

• Promedio de máquinas en el local comercial: ***Ls=2,89*** máquinas

• Tiempo promedio por máquina desde ingreso hasta salir reparada: ***Ts=0,93*** día

• Probabilidad de que una máquina llegue y comience a ser reparada en forma inmediata : ***P(0)=0,2260***

Ejercicio 3.7.4.

a)

• **Clientes:** animales que se descargan de los camiones y esperan la faena

• **Servidores:** Es la línea de faena, hay un solo servidor. Según el tipo de hacienda utiliza la línea que le corresponde.

• **Arribos:** aleatorios

• **Disciplina de la cola:** PEPS

a)

1) Falso. No hay 2 servidores; es uno solo.

2) Falso. Habría que hacer 2 modelos M/M/1.

3) Falso. No existe cantidad finita de clientes, sino un número ilimitado (infinito).

4) Verdadero.

Ejercicio 3.7.5.

a)

• **Clientes:** automóviles que llegan para ser limpiados.

• **Servidores:** Hay uno solo, y es la máquina lavadora.

• **Arribos:** aleatorios según Poisson.

• **Disciplina de la cola:** PEPS

b) Se definen en primer lugar las velocidades de arribo y de servicio, y el factor de tráfico.

$\boldsymbol{\lambda = 4}$ (vehículos por hora)

$\boldsymbol{\mu = 6}$ (vehículos por hora)

$\boldsymbol{\rho = 0,6667}$

En promedio habrá 1,333 vehículos esperando para ser atendidos, y lo harán por aproximadamente 20 minutos. (***Lc* = 1,333** vehículos, ***Tc* = 0,33** horas)

c) Lo solicitado implica indagar para qué valor de ***n*** o menos las probabilidades son 0,97. Para $\boldsymbol{P_{(n<=8)} = 0{,}974}$ se infiere que el estacionamiento deberá tener 7 lugares.

d) La probabilidad de que un automóvil arribe y sea atendido inmediatamente (es decir, que no haya cola) es $\boldsymbol{P_{(n=0)} = 0{,}3333}$

e) Se busca conocer qué probabilidad existe de que en el sistema (cola + atención) haya 4 clientes o más. Esto es:

$$P_{(n\geq 4)} = 1 - P_{(0)} - P_{(1)} - P_{(2)} - P_{(3)}\,, \quad P_{(n\geq 4)} = 0{,}1975.$$

Ejercicio 3.7.6.

a) Para 95% corresponde un valor ***n*** de ***7*** $\boldsymbol{(P_{(n<=7)} = 0{,}961}$, y para un promedio de 7 vehículos el valor asegurado es $70.000 .7 = ***$490.000.***

Ejercicio 3.7.7.

a) Se definen en primer lugar las velocidades de arribo y de servicio, y el factor de tráfico.

$\boldsymbol{\lambda = 4}$ (vehículos por hora)
$\boldsymbol{\mu = 3}$ (vehículos por hora)
$\boldsymbol{s = 2}$ (máquinas servidoras)
$$\boldsymbol{\rho = 0{,}6667}$$

En este caso la cantidad promedio de vehículos que esperan se reduce en relación con la primera alternativa de atención: ***Lc* = 1,0667** automóviles, con un tiempo de espera ***Tc* = 0,2667** horas

b) ***Ls* = 2,40** autos, con tiempo de servicio ***Ts* = 0,6** horas.

c) $\boldsymbol{P_{(n=0)} = 0{,}20}$

d) Es más eficiente el Modelo M/M/2 con respecto al M/M/1 con igual capacidad instalada

Ejercicio 3.7.8.

a) La situación ya no puede modelarse con alguno de los métodos analíticos estudiados en este capítulo debido a que no cumple los requisitos que les son aplicables. Corresponde replantearlo y, de no encontrarse modelo que pueda representarlo adecuadamente con lo visto en este texto, formular un proceso de simulación.

b) Es discutible si se puede aplicar modelo M/M/s porque los servidores tienen distinta capacidad y, principalmente, debería discutirse si prestan igual servicio (manual vs. máquina automática).

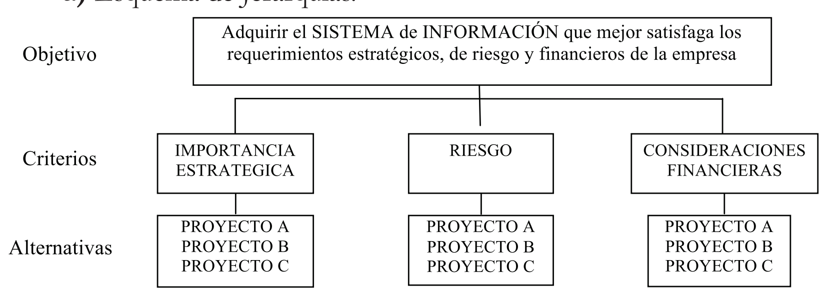
Ejercicio 3.7.9.
a) $\mu = 11{,}07$ (vehículos por hora)

Ejercicio 3.7.10.
a)
1) Falso. El cambio que se hace es en relación con el significado de λ.
2) Verdadero.
3) Falso. Existen otros modelos analíticos en los que se pueden utilizar otras distribuciones. La variable que ajusta a una Distribución Exponencial es el tiempo de servicio.

6.4. Ejercicios del Capítulo 4

Ejercicio 4.6.1.
a)
1) Falso. El proyecto D se descarta por no cumplir con el mínimo requerido por dos subcriterios; no se lo ha comparado con TODOS los criterios para definir si se lo puede calificar como "Dominado".
2) Verdadero.
3) Falso. "Riesgo de obsolescencia de la tecnología" es un criterio, ya que es uno de los factores a tener en cuenta para llegar a la decisión final.
4) Falso. a) "Período de recupero de la inversión" es un subcriterio.
b) En Apoyo Multicriterio a la Decisión no se procura la obtención de óptimos; no se puede pretender que se tenga "el menor período de recupero"
c) Se busca renovar el equipo de sistemas de información, mediante la elección del que mejor satisfaga a los criterios seleccionados para orientar la elección.

Ejercicio 4.6.2.
a) Esquema de Jerarquías.



b) Para proponer la matriz que resuma la opinión de todos los gerentes se pueden utilizar distintos medios. En el caso planteado no se imponen demasiadas exigencias, por lo que la respuesta queda abierta para que quien responda incluya lo que considere correcto, siempre y cuando esté debidamente fundado. Se expresan aquí dos alternativas:

A1: se calcula el promedio simple de cada celda a_{ij} de las matrices de comparaciones pareadas de cada gerente;

A2: se considera el mejor valor de cada celda a_{ij} de las matrices de comparaciones pareadas de cada gerente;

	A	B	C
A	1	4	4
B	1/4	1	1
C	1/4	1	1

	A	B	C
A	1	7	6
B	1/7	1	2
C	1/6	1/2	1

c) El análisis considerará la matriz de comparaciones según A1 (promedio de opiniones).

Matriz de comparaciones	A	B	C	**Matriz de comparaciones normalizada**	A	B	C	**Vector prioridades**
A	1	4	4	A	2/3	2/3	2/3	0,666
B	1/4	1	1	B	1/6	1/6	1/6	0,167
C	1/4	1	1	C	1/6	1/6	1/6	0,167
	3/2	6	6					1,00

Verificación de Consistencia

paso 1

$$0{,}666 \begin{vmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{vmatrix} + 0{,}167 \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + 0{,}167 \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}666 \\ 0{,}167 \\ 0{,}167 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0{,}666 \\ 0{,}167 \\ 0{,}167 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0{,}666 \\ 0{,}167 \\ 0{,}167 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{2{,}000} \\ \mathbf{0{,}500} \\ \mathbf{0{,}500} \end{vmatrix}$$

paso 2

$$\frac{2{,}000}{0{,}667} = \mathbf{3{,}000} \qquad \frac{0{,}500}{0{,}167} = \mathbf{3{,}000} \qquad \frac{0{,}500}{0{,}167} = \mathbf{3{,}000}$$

paso 3

$$\lambda_{(max)} = \frac{3{,}000 + 3{,}000 + 3{,}000}{3}$$

$$\lambda_{(max)} = 3{,}000$$

paso 4

$$IC = \frac{3 - 3}{2} \qquad IC = 0$$

paso 5

$$\mathbf{RC} = \frac{0}{0,58} \qquad \mathbf{RC} = 0 \qquad 0 < 0,10 \quad \text{Los juicios son “consistentes”}$$

d) Obtención del Vector Prioridad Global, según los siguientes Vectores Sumas Ponderadas:

Matriz de prioridades

	Consideraciones financieras	Riesgo	Importancia estratégica
A	0,593	0,123	0,666
B	0,341	0,320	0,167
C	0,066	0,557	0,167

Vector de prioridades

Consideraciones financieras	0,548
Riesgo	0,211
Importancia estratégica	0,241

Cálculo del Vector de Prioridades Globales para cada alternativa:

A : 0,593 . 0,548 + 0,123 . 0,211 + 0,666 . 0,241 = **0,511**
B : 0,341 . 0,548 + 0,320 . 0,211 + 0,167 . 0,241 = **0,295**
C : 0,066 . 0,548 + 0,557 . 0,211 + 0,167 . 0,241 = **0,194**

Conclusión: Se analizarán los valores correspondientes a las prioridades globales de cada proyecto, calculados en el Vector de Prioridades de Alternativas. En base a ese análisis el sistema de información de *Quantum R&D* se debe renovar con el proyecto A, por ser el de mayor valor en función de las preferencias expresadas por los decisores.

Ejercicio 4.6.3.

a)

	Neuquén	**Rufino**	**Tandil**	**Viedma**
Neuquén	1	1/4	4	1/5
Rufino	4	1	6	7
Tandil	1/4	1/6	1	1/5
Viedma	5	1/7	5	1

b) los pasos 1 y 2 son datos del enunciado, indicados como vector VSP / VPi

paso 3

$$\lambda_{(max)} = \frac{4{,}070 + 5{,}692 + 4{,}256 + 5{,}022}{4}$$

$$\lambda_{(max)} = 4{,}7601$$

paso 4

$$IC = \frac{4.7601 - 4}{3} = \qquad IC = 0{,}2534$$

paso 5

$$RC = \frac{0{,}2534}{0{,}90} \qquad \mathbf{RC} = 0{,}282 \qquad 0{,}282 > 0{,}1$$

Los juicios son "inconsistentes"

c) En función del resultado del análisis efectuado sobre el atributo Facilidad de comunicaciones con la casa central, la nueva sucursal de la empresa *Quantum Ideas* debería instalarse en Rufino, por ser la de mejor ponderación (mayor valor) según el Vector de Prioridades. No obstante, existe una advertencia en el sentido de una incongruencia entre los elementos de la matriz de comparaciones pareadas según lo determinado en **b).** Dado que esto indica que las preferencias expresadas por los evaluadores no son consistentes, sería necesario revisar la confección de las matrices de comparación del decisor en relación con cada alternativa.

Ejercicio 4.6.4.

a)

I. 1), 2)

II. 1), 3)

Ejercicio 4.6.5.

a)

1) Falso. En un óptimo de Pareto, cualquier participante que quiera seguir con mejoras en el resultado que obtuvo sólo puede hacerlo si afecta el obtenido por los demás.

2) Falso. "Racionalidad limitada" es un concepto que, aplicado a la toma de decisiones en Administración, rechaza las pretensiones de obtener "óptimos" y procura obtener soluciones aceptables.

3) Verdadero.

4) Verdadero.

Ejercicio 4.6.6.

a)

	Precio	Comodidad	Seguridad	Calidad
Precio	1	1/3	1/4	1/7
Comodidad	3	1	1/5	5
Seguridad	4	5	1	3
Calidad	7	1/5	1/3	1

b) 4, significa que el atributo Seguridad tiene entre moderada y fuerte importancia respecto del atributo Precio

7 , significa que el atributo Calidad tiene muy fuerte importancia respecto del atributo Precio

c)

Matriz de comparaciones

	Precio	Comodidad	Seguridad	Calidad
Precio	1	1/3	1/4	1/7
Comodidad	3	1	1/5	5
Seguridad	4	5	1	3
Calidad	7	1/5	1/3	1
	15	13/2	17/9	64/7

Matriz comparaciones normalizada

	Precio	Comodidad	Seguridad	Calidad
Precio	1/15	5/98	8/57	0
Comodidad	1/5	15/98	11/98	5/9
Seguridad	1/4	3/4	23/41	1/3
Calidad	7/15	3/98	17/91	1/9

Vector prioridades

0,068
0,253
0,480
0,198
1,000

Ejercicio 4.6.7.

a) Criterios: becas de estudios, amigos que se van a radicar y costo de vida.

Alternativas: Córdoba, La Plata y Rosario.

b)

Matriz de comparaciones

	Córdoba	La Plata	Rosario
Córdoba	1	4	1/2
La Plata	1/4	1	7
Rosario	2	1/7	1
	13/4	36/7	17/2

Matriz de comparaciones normalizada

	Córdoba	La Plata	Rosario
Córdoba	0,308	0,778	0,059
La Plata	0,077	0,194	0,824
Rosario	0,615	0,028	0,118

Vector prioridades

0,381
0,365
0,254
1,00

c)

<u>*paso 1*</u>

$$0{,}381 \begin{vmatrix}1\\1/4\\2\end{vmatrix} + 0{,}365 \begin{vmatrix}4\\1\\1/7\end{vmatrix} + 0{,}254 \begin{vmatrix}1/2\\7\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0{,}381\\0{,}095\\0{,}763\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1{,}460\\0{,}365\\0{,}052\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0{,}127\\1{,}775\\0{,}254\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1{,}968\\2{,}236\\1{,}069\end{vmatrix}$$

paso 2

$$\frac{1{,}968}{0{,}381} = 5{,}160 \qquad \frac{2{,}236}{0{,}365} = 6{,}125 \qquad \frac{1{,}069}{0{,}254} = 4{,}214$$

paso 3

$$\lambda_{(max)} = \frac{5{,}160 + 6{,}125 + 4{,}214}{3}$$

$$\lambda_{(max)} = 5{,}1663$$

paso 4

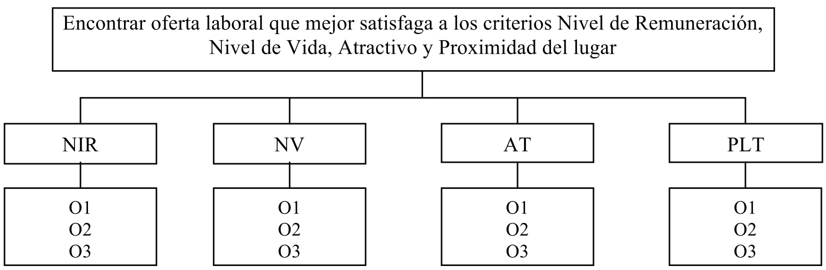
$$IC = \frac{5{,}1663 - 3}{2} \qquad IC = 1{,}0831$$

paso 5

$$RC = \frac{1{,}0831}{0{,}58} \qquad RC = 1{,}867 \qquad 1{,}867 > 0{,}10$$ Las opiniones son Inconsistentes

Ejercicio 4.6.8.

a)



b)

	NIR	NV	AT	PLT
NIR	1	5	8	3
NV	1/5	1	1/2	1/4
AT	1/8	2	1	1/9
PLT	1/3	4	9	1
	5/3	12	37/2	13/3

	NIR	NV	AT	PLT	
NIR	41/68	5/12	16/37	2/3	0,535
NV	7/58	1/12	1/37	0	0,072
AT	0	1/6	2/37	0	0,080
PLT	1/5	1/3	18/37	2/9	0,313
					1,000

Ejercicio 4.6.9.

a) Vectores de prioridad de cada criterio

	NIR	NV	AT	PLT
O1	0,563	0,159	0,252	0,753
O2	0,345	0,252	0,675	0,172
O3	0,092	0,589	0,073	0,075
	1,000	1,000	1,000	1,000

Prioridad Global para cada alternativa:

O1 :0,563 . 0,535 + 0,159 . 0,072 + 0,252 . 0,080 + 0,753 . 0,313 = **0,568**

O2 :0,345 . 0,535 + 0,252 . 0,072 + 0,675 . 0,080 + 0,172 . 0,313 = **0,311**

O3 :0,092 . 0,535 + 0,589 . 0,072 + 0,073 . 0,080 + 0,075 . 0,313 = **0,121**

Conclusión: De acuerdo con las prioridades obtenidas la oferta de trabajo recomendable es la representada con O1, ya que tiene una importancia mayor que las demás.

6.5. Ejercicios del Capítulo 5

Ejercicio 5.5.1.

a) Etapas: cada empresa cliente. Variables de estado: $S_i = 6 - \sum x_{ij}$ (Total de equipos menos cantidad de equipos ya asignados a las etapas siguientes). Variables de decisión: x_n cantidad de equipos a asignar en la etapa n.

Función objetivo:

$$Max\ Z = 0x_{0A} + 4x_{1A} + 5x_{2A} + 9x_{3A} + 11x_{4A} + 15x_{5A} + 16x_{6A} + 0x_{0B} + 6x_{1B} + 8x_{2B} + 9x_{3B} + 10x_{4B} + 11x_{5B} + 13x_{6B} + 0x_{0C} + 2x_{1C} + 7x_{2C} + 14x_{3C} + 15x_{4C} + 17x_{5C} + 18x_{6C} + 0x_{0D} + 5x_{1D} + 6x_{2D} + 12x_{3D} + 13x_{4D} + 14x_{5D} + 16x_{6D}$$

Sujeto a :

$$x_{0A} + x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} + x_{5A} + x_{6A} + x_{0B} + x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} + x_{5B} + x_{6B} + x_{0C} + x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C} + x_{5C} + x_{6C} + x_{0D} + x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D} + x_{5D} + x_{6D} \le 6$$

b) Resolución para obtención de política óptima de asignación.

		Equipos en empresa D										
		0	1	2	3	4	5	6				
Equipos en Empr. C	Rendim.	**0**	**5**	**6**	**12**	**13**	**14**	**16**	s_n	$f_{(sn)}*$	x_n*	Alt.
0	**0**	0	5	6	12	13	14	16	0	**0**	**0**	
1	**2**	2	7	8	14	15	16		1	**5**	**0**	
2	**7**	7	12	13	19	20			2	**7**	**1**	*
3	**14**	14	19	20	26				3	**14**	**3**	
4	**15**	15	20	21					4	**19**	**3**	
5	**17**	17	22						5	**20**	**3**	*
6	**18**	18							6	**26**	**3**	

Equipos en empresas D y C

Equipos en Empr B	Rendim.	0	1	2	3	4	5	6	s_n	$f_{(sn)}$*	x_n*	Alt.
		0	**5**	**7**	**14**	**19**	**20**	**26**				
0	**0**	0	5	7	14	19	20	26	0	**0**	**0**	
1	**6**	6	11	13	20	25	26		1	**6**	**1**	
2	**8**	8	13	15	22	27			2	**11**	**1**	
3	**9**	9	14	16	23				3	**14**	**0**	
4	**10**	10	15	17					4	**20**	**1**	
5	**11**	11	16						5	**25**	**1**	
6	**13**	13							6	**27**	**2**	

Equipos en empresas D, C y B

Equipos en Empr A	Rendim.	0	1	2	3	4	5	6	s_n	$f_{(sn)}$*	x_n*	Alt.
		0	**6**	**11**	**14**	**20**	**25**	**27**				
0	**0**	0	6	11	14	20	25	27	0	**0**	**0**	
1	**4**	4	10	15	18	24	29		1	**6**	**0**	
2	**5**	5	11	16	19	25			2	**11**	**0**	
3	**9**	9	15	20	23				3	**15**	**1**	
4	**11**	11	17	22					4	**20**	**0**	
5	**15**	15	21						5	**25**	**0**	
6	**16**	16							6	**29**	**1**	

Asignación óptima: 29 puntos de coeficiente de eficiencia. Se deben destinar:

1 equipo en Empresa A (sale de tabla anexa a la última, al buscar el máximo $f_{(sn)}$ *

1 equipo en Empresa B (sale de la tabla anterior a la última)

3 equipos en Empresa C (que se deducen de la entrada a la primera tabla de resolución)

1 equipo en Empresa D (sale de la tabla primera)

Ejercicio 5.5.2.

a) Etapas: los meses faltantes.

Producción asignada	Contribución a la f.o. (en miles $)						
	Mes 1	**Mes 2**	**Mes 3**	**Mes 4**	**Mes 5**	**Mes 6**	**Mes 7**
0	0	0	0	0	0	0	0
150	12	12	12	12	12	12	12
300	30	30	30	30	30	30	0
450	45	45	45	45	45	0	0
600	57	57	57	57	0	0	0

Etapa 6. Faltan 2 meses

	Cajas mes 7	0	150
Cajas mes 6	Rendim.	**0**	**12**
0	**0**	0	12
150	**12**	12	24
300	**30**	30	
450	**45**		
600	**57**		

s_n	$f_{(sn)}$*	x_n*	Alt.
0	**0**	**0**	
150	**12**	**0**	*
300	**30**	**300**	
450	**0**		
600	**0**		

Etapa 5. Faltan 3 meses

	Cajas mes 6 y 7	0	150	300
Cajas mes 5	Rendim.	**0**	**12**	**30**
0	**0**	0	12	30
150	**12**	12	24	42
300	**30**	30	42	
450	**45**	45		
600	**57**			

s_n	$f_{(sn)}$*	x_n*	Alt.
0	**0**	**0**	
150	**12**	**0**	*
300	**30**	**0**	*
450	**45**	**450**	
600	**0**		

Etapa 4. Faltan 4 meses

	Cajas mes 5 a 7	0	150	300	450
Cajas mes 4	Rendim.	**0**	**12**	**30**	**45**
0	**0**	0	12	30	45
150	**12**	12	24	42	57
300	**30**	30	42	60	
450	**45**	45	57		
600	**57**	57			

s_n	$f_{(sn)}$*	x_n*	Alt.
0	**0**	**0**	
150	**12**	**0**	*
300	**30**	**0**	*
450	**45**	**0**	*
600	**60**	**300**	

Etapa 3. Faltan 5 meses

	Cajas mes 4 a 7	0	150	300	450	600
Cajas mes 3	Rendim.	**0**	**12**	**30**	**45**	**60**
0	**0**		12	30	45	60
150	**12**		24	42	57	72
300	**30**		42	60	75	
450	**45**		57	75		
600	**57**		69			

s_n	$f_{(sn)}$*	x_n*	Alt.
0	**0**	**0**	
150	**12**	**0**	
300	**30**	**0**	
450	**45**	**0**	
600	**60**	**0**	*
750	**75**	**300**	*

Etapa 2. Faltan 6 meses

	Cajas mes 3 a 7	0	150	300	450	600	750
Cajas mes 2	Rendim.	**0**	**12**	**30**	**45**	**60**	**75**
0	**0**			30	45	60	75
150	**12**			42	57	72	87
300	**30**			60	75	90	
450	**45**			75	90		
600	**57**			87			

s_n	$f_{(sn)}$*	x_n*	Alt.
0	**0**	**0**	
150	**0**	**0**	*
300	**30**	**0**	
450	**45**	**0**	
600	**60**	**0**	*
750	**75**	**0**	*
900	**90**	**300**	*

Etapa 1. Faltan 7 meses

	Cajas mes 2 a 7	0	150	300	450	600	750	900				
Cajas mes 1	Rendim.	**0**	**0**	**30**	**45**	**60**	**75**	**90**	s_n	$f_{(sn)}*$	x_n*	Alt.
0	**0**				45	60	75	0	0	**0**	**0**	
150	**12**				57	72	87	12	150	**0**	**0**	
300	**30**				75	90	105		300	**0**	**0**	
450	**45**				90	105			450	**45**	**0**	*
600	**57**				102				600	**60**	**0**	
									750	**75**	**0**	
									900	**90**	**300**	
									1050	**105**	**300**	

Política óptima de producción:

Se tendrán $105.000 de beneficio neto total. La política óptima de producción es:

400 cajas en Mes 1 (sale de tabla anexa a la última, al buscar el máximo $f^*_{(sn)}$)

0 cajas en Mes 2 (sale de tabla anexa a la etapa 6)

400 cajas en Mes 3 (sale de tabla anexa a la etapa 5)

0cajas en Mes 4 (sale de tabla anexa a la etapa 4)

600 cajas en Mes 5 (sale de tabla anexa a la etapa 3)

0 cajas en Mes 6 (sale de tabla anexa a la etapa 2)

0 cajas en Mes 7 (sale de la tabla primera)

Ejercicio 5.5.4.

a)

1) Falso. Es necesario fraccionar el problema en partes menores, pero su resolución no es simultánea, sino por las etapas que se han planteado.

2) Falso. Un programa dinámico aleatorio únicamente puede tener resolución mediante la técnica denominada "de recusión en retroceso".

3) Verdadero.

4) Falso. Cada vez que se toma una decisión en una etapa la variable de decisión adopta un valor, que constituirá el valor de la variable de estado de la etapa siguiente.

5) Verdadero.